

Лабораторная работа №1

Оценка устойчивости системы методом D-разбиения

Цель работы заключается в получении и закреплении навыков расчета устойчивости систем методом D-разбиения в плоскости одного параметра.

Краткие теоретические сведения

Весьма часто возникает необходимость исследовать влияние на устойчивость САР тех или иных ее параметров. Обычно рассматривают влияние таких параметров, которые могут быть изменены, например коэффициентов передачи и постоянных времени усилительно-преобразовательных элементов.

Допустимые пределы изменения какого-либо параметра определяют при неизменных значениях остальных. В этом случае на плоскости параметра выделяют (строят) *область устойчивости*, т.е. такую область изменения заданного параметра, при котором САР остается устойчивой.

Построение областей устойчивости возможно с помощью любого из критериев устойчивости. Однако так поступают лишь при определении граничного значения коэффициента передачи разомкнутой системы, а при выделении областей устойчивости используют более общий метод *D-разбиения*. Принципиально это метод разделения n -мерного пространства параметров на области, каждой из которых соответствует определенное число правых корней характеристического уравнения. Область, которой соответствует нуль правых корней (т.е. все корни ХП – «левые»), есть область устойчивости. Практически с помощью D-разбиения выделяют области устойчивости в плоскости одного или двух параметров.

D-разбиение в плоскости одного параметра. Пусть μ – параметр разбиения. Требуется выяснить, в каких пределах можно изменять параметр μ , не нарушая при этом устойчивости системы. Предполагаем, что μ входит в характеристическое уравнение замкнутой системы линейно и уравнение можно привести к виду

$$\mu M + N = 0, \quad (1)$$

где M и N – полиномы от s .

Разрешим уравнение (1) относительно параметра μ :

$$\mu = -N/M. \quad (2)$$

Это равенство определяет зависимость параметра разбиения от значения корней характеристического уравнения. Выясним, при каких значениях μ система находится на границе устойчивости, т.е. какие значения μ соответствуют чисто мнимому корню $j\omega$. Сделаем подстановку $s=j\omega$ и построим на комплексной плоскости (рисунок 1) график функции

$$\mu(j\omega) = -N(j\omega)/M(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega)_M + j \operatorname{Im}(\omega)_M, \quad (3)$$

при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$.

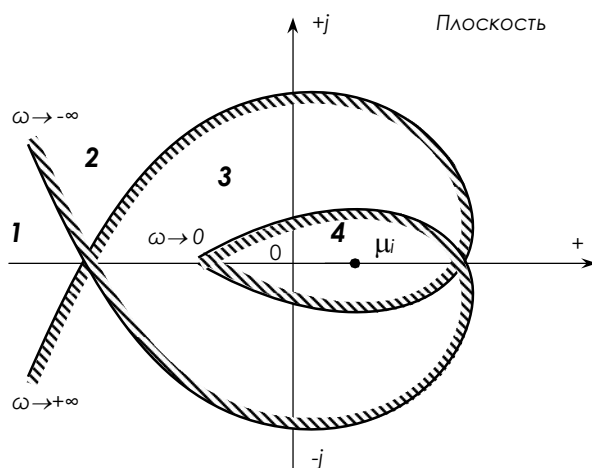


Рисунок 1 – D-разбиение плоскости

Функция $\operatorname{Re}(\omega)$ – четная функция ω , а $\operatorname{Im}(\omega)$ – нечетная, поэтому искомая кривая симметрична относительно вещественной оси и достаточно построить одну ветвь кривой для положительных частот, чтобы затем добавить этой кривой **вставка 1**

Полученную кривую называют *кривой D-разбиения* (или *годографом D-разбиения*), она представляет собой отображение мнимой оси плоскости корней

характеристического уравнения на плоскость параметра μ . Если, двигаясь по кривой при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$, наносить штриховку слева, то она будет направлена в ту часть плоскости параметра μ , которая соответствует левой полуплоскости корней.

На рисунке 1 кривая D-разбиения разделяет плоскость параметра μ на несколько областей (области 1, 2, 3 и 4). Та из них, внутрь которой направлена штриховка обеих ветвей годографа D-разбиения, *может быть областью устойчивости* (область 4). Теперь нужно взять какую-либо точку μ_i из этой

области и, пользуясь любым из критериев устойчивости, проверить устойчивость системы при $\mu = \mu_i$. Если критерий удовлетворяется, то рассматриваемая область и есть область устойчивости системы.

Равенство (3) условно определяет параметр μ как комплексную величину. На самом деле это вещественная величина и на плоскости μ следует рассматривать только те точки, которые лежат на вещественной оси. Поэтому значения параметра μ , при которых система остается устойчивой, определяются отрезком положительной полуоси абсцисс, лежащим внутри области устойчивости.

Иногда параметр μ , влияние которого на устойчивость САР исследуют, входит в характеристическое уравнение во второй степени. Тогда можно обозначить $\mu^2 = \eta$ и делать D-разбиение плоскости параметра η .

Задание

В соответствие с исходными данными следует выполнить следующее:

1. записать характеристическое уравнение системы в соответствии с уравнением (2);
2. построить годограф D-разбиения;
3. определить область устойчивости системы в плоскости параметра разбиения.

Исходные данные для анализа

Вариант	Структурная схема САР	Передаточные функции
01		$W_1 = \frac{2}{5s+1}$ $W_2 = \frac{k}{10s^2 + 10s + 1}$ $W_{01} = 5$ $W_{02} = 2$
02		$W_1 = \frac{1}{10s+1}$ $W_2 = \frac{k}{16s^2 + 2s + 1}$ $W_{01} = 0.5$ $W_{02} = 2$

03		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$ $W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{k}{16s^2+20s+1}$ $W_{O1} = 0.1$ $W_{O2} = 1$
04		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$ $W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{k}{25s^2+20s+1}$ $W_{O1} = 5$ $W_{O2} = 1$
05		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$ $W_2 = \frac{k}{25s^2+5s+1}$ $W_{O1} = \frac{0.2}{s}$ $W_{O2} = 5$
06		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$ $W_2 = \frac{k}{25s^2+25s+1}$ $W_{O1} = 0.2$ $W_{O2} = 5$
07		$W_1 = \frac{2}{5s+1}$ $W_2 = \frac{k}{10s^2+10s+1}$ $W_3 = 2$ $W_{O1} = 5$ $W_{O2} = 2$
08		$W_1 = \frac{1}{10s+1}$ $W_2 = \frac{k}{16s^2+2s+1}$ $W_3 = \frac{1}{20s+1}$ $W_{O1} = 0.5$ $W_{O2} = 2$

09		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$ $W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{k}{16s^2 + 20s + 1}$ $W_4 = \frac{2}{5s+1}$ $W_{O1} = 0.1$ $W_{O2} = 1$
10		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$ $W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{k}{25s^2 + 20s + 1}$ $W_4 = 5$ $W_{O1} = 5$ $W_{O2} = 1$
11		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$ $W_2 = \frac{k}{25s^2 + 5s + 1}$ $W_3 = \frac{1}{36s^2 + 15s + 1}$ $W_{O1} = \frac{0.2}{s}$ $W_{O2} = 5$
12		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$ $W_2 = \frac{k}{25s^2 + 25s + 1}$ $W_3 = \frac{1}{10s^2 + 10s + 1}$ $W_{O1} = 0.2$ $W_{O2} = 5$

Порядок выполнения работы

1. На основе структурной схемы системы найти общую передаточную функцию САР.
2. Найти зависимость и построить кривую D-разбиения в плоскости параметра k .
3. Найти распределение корней в каждой из областей плоскости k .
4. Установить область устойчивости САР и допустимый диапазон изменения параметра k для устойчивой системы.

Литература

1. Анхимюк В.Л., Опейко О.Ф., Михеев Н.Н. Теория автоматического управления. – Мн.: Дизайн ПРО. – 2002. – 352с.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. М. – Л.: Энергия, 1965 – 396 с.
3. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.

Лабораторная работа №2

Оценка устойчивости по критерию Найквиста

Цель работы заключается в получении и закреплении навыков расчета устойчивости систем автоматического регулирования при помощи критерия Найквиста.

Краткие теоретические сведения

Частотный критерий Найквиста дает возможность определить устойчивость замкнутой системы автоматического регулирования (САР) по амплитудно-фазовой частотной характеристике ее разомкнутой цепи. Данный критерий применим к системам, у которых степень числителя передаточной функции разомкнутой цепи не выше степени ее знаменателя. Предварительно должна быть определена устойчивость исследуемой системы в ее разомкнутом состоянии.

Принято различать три случая применения критерия Найквиста.

1. *Разомкнутая система – устойчивая*. В этом случае для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы при изменении частоты от нуля до бесконечности не охватывал точку с координатами $[-1, j0]$ (рисунок 1).

2. *Разомкнутая система – на границе устойчивости*. Характеристический полином такой системы имеет нулевые или чисто мнимые корни, при остальных левых.

Если нулевых корней ν , то годограф на нулевой частоте дугой бесконечно большого радиуса перемещается от положительной вещественной полуоси на угол $90^\circ \nu$ по часовой стрелке (рисунок 2).

Если в составе характеристического полинома есть пара чисто мнимых корней, то годограф на частоте разрыва дугой бесконечно большого радиуса перемещается на угол 180° по часовой стрелке (рисунок 3).

В обоих случаях для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой САР при изменении частоты от нуля до бесконечности,

дополненный на участках разрыва дугой бесконечно большого радиуса, не охватывал точку с координатами $[-1, j0]$.

3. *Разомкнутая система – неустойчивая*. Характеристический полином такой системы имеет l правых корней. В этом наиболее общем случае критерий формулируется так: для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от нуля до бесконечности годограф разомкнутой системы охватывал точку с координатами $[-1, j0]$ $l/2$ раз в положительном направлении (против часовой стрелки). Характеристический полином разомкнутой системы, кроме вещественных корней (левых или правых) может иметь нулевые или чисто мнимые корни. Тогда на участках разрыва годограф дополняют дугой бесконечно большого радиуса. При сложной форме годографа разомкнутой системы удобнее использовать так называемое правило переходов (рисунок 4). Тогда критерий формулируется так: замкнутая система устойчива, если разность между числом положительных и отрицательных переходов годографа разомкнутой системы через отрезок вещественной оси $(-\infty, -1)$ равна $l/2$. В противном случае замкнутая система неустойчива.

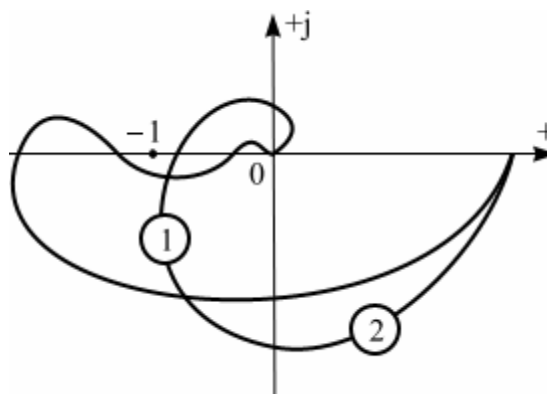


Рисунок 1 – Годографы устойчивых разомкнутых систем

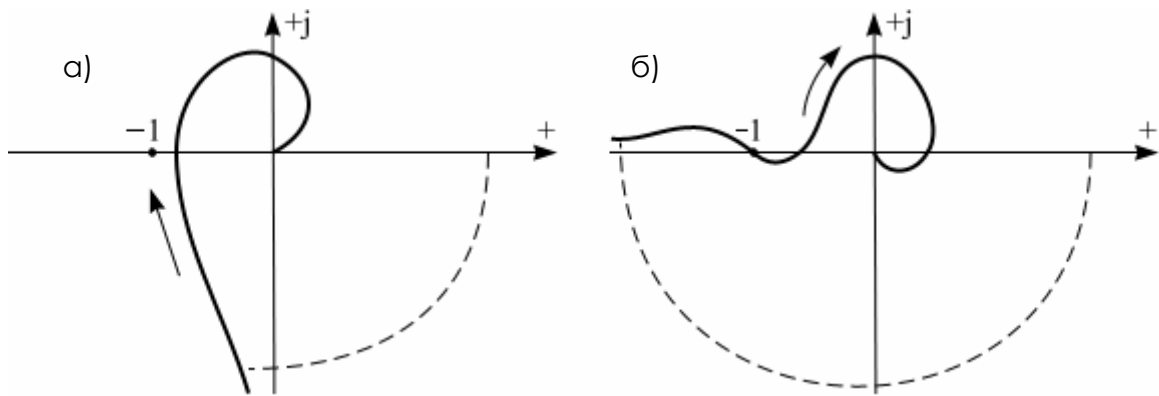


Рисунок 2 – Годографы разомкнутых систем, находящихся на границе устойчивости

(а) – замкнутая система устойчива ($\nu = 1$)

(б) – замкнутая система на границе устойчивости ($\nu = 2$)

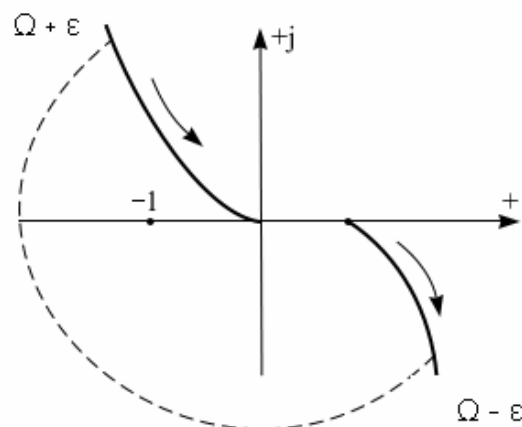


Рисунок 3 – Годограф разомкнутой системы, находящейся на колебательной границе устойчивости

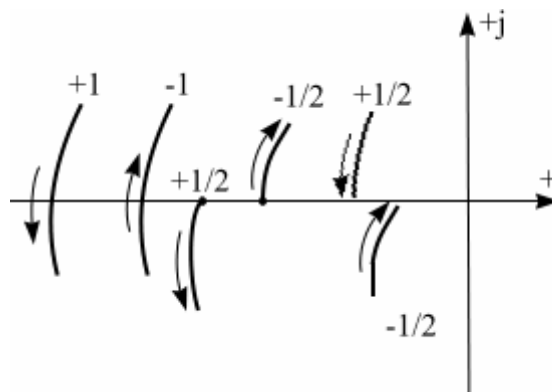


Рисунок 4 – Оценка перехода годографа через отрезок вещественной оси $(-\infty, -1)$

Задание

В соответствие с исходными данными следует для каждого из вариантов систем выполнить следующее:

1. Установить факт устойчивости разомкнутой системы;
2. Построить годограф разомкнутой системы;
3. Выполнить анализ устойчивости замкнутой системы.

Исходные данные для анализа

Вариант	Структурная схема САР	Передаточные функции	
01		$W_1 = \frac{2}{5s+1}$	$W_2 = \frac{1}{10s^2+10s+1}$ $W_{01} = 5$ $W_{02} = 2$
		$W_1 = \frac{0.1}{s}$	
		$W_1 = \frac{2}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{2}{5s-1}$	
02		$W_1 = \frac{1}{10s+1}$	$W_2 = \frac{1}{16s^2+2s+1}$ $W_{01} = 0.5$ $W_{02} = 2$
		$W_1 = \frac{0.05}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{1}{10s-1}$	
03		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{16s^2+20s+1}$ $W_{01} = 0.1$ $W_{02} = 1$
		$W_1 = \frac{0.15}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{2}{10s-1}$	
04		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{25s^2+20s+1}$ $W_{01} = 5$ $W_{02} = 1$
		$W_1 = \frac{0.15}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{2}{10s-1}$	

05		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2+5s+1}$ $W_{01} = \frac{0.2}{s}$ $W_{02} = 5$
		$W_1 = \frac{0.1}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{1}{20s-1}$	
06		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2+25s+1}$ $W_{01} = 0.2$ $W_{02} = 5$
		$W_1 = \frac{0.1}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{1}{20s-1}$	
07		$W_1 = \frac{2}{5s+1}$	$W_2 = \frac{1}{10s^2+10s+1}$ $W_3 = 2$ $W_{01} = 5$ $W_{02} = 2$
		$W_1 = \frac{0.1}{s}$	
		$W_1 = \frac{2}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{2}{5s-1}$	
08		$W_1 = \frac{1}{10s+1}$	$W_2 = \frac{1}{16s^2+2s+1}$ $W_3 = \frac{1}{20s+1}$ $W_{01} = 0.5$ $W_{02} = 2$
		$W_1 = \frac{0.05}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{1}{10s-1}$	

09		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{16s^2+20s+1}$ $W_4 = \frac{2}{5s+1}$ $W_{O1} = 0.1$ $W_{O2} = 1$
		$W_1 = \frac{0.15}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{2}{10s-1}$	
10		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{25s^2+20s+1}$ $W_4 = 5$ $W_{O1} = 5$ $W_{O2} = 1$
		$W_1 = \frac{0.15}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{2}{10s-1}$	
11		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2+5s+1}$ $W_3 = \frac{1}{36s^2+15s+1}$ $W_{O1} = \frac{0.2}{s}$ $W_{O2} = 5$
		$W_1 = \frac{0.1}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{1}{20s-1}$	
12		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2+25s+1}$ $W_3 = \frac{1}{10s^2+10s+1}$ $W_{O1} = 0.2$ $W_{O2} = 5$
		$W_1 = \frac{0.1}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2+1}$	
		$W_1 = \frac{1}{20s-1}$	

Порядок выполнения работы

1. В моделирующей программе создать модель разомкнутой системы автоматического управления;
2. Найти характеристическое уравнение разомкнутой системы и рассчитать его корни.
3. Оценить устойчивость разомкнутой системы (любым из известных способов);
4. Построить годограф разомкнутой САР;
5. На основе анализа полученного годографа сделать заключение об устойчивости замкнутой САР;

Вопросы для самоконтроля

1. Физическая интерпретация оценки устойчивости САР по критерию Найквиста (значение точки с координатами $[-1, j0]$).
2. Как привести замкнутую САР к разомкнутой?
3. Оценка устойчивости замкнутой САР, если разомкнутая САР – устойчивая .
4. Оценка устойчивости замкнутой САР, если разомкнутая САР – на границе устойчивости.
5. Оценка устойчивости замкнутой САР, если разомкнутая САР – неустойчивая.

Литература

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. М. – Л.: Энергия, 1965 – 396 с.
2. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.
3. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. Пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.

Лабораторная работа №3

Расчет системы методом пространства состояний.

Цель работы: получение умений и навыков расчета системы автоматического управления методом пространства состояний (методом переменных состояния).

Исходные данные для анализа

Вариант	Структурная схема САУ	Передаточные функции	
01		$W_1 = \frac{2}{5s+1}$	$W_2 = \frac{1}{10s^2 + 10s + 1}$ $W_{01} = 5$ $W_{02} = 2$
		$W_1 = \frac{0.1}{s}$	
		$W_1 = \frac{2}{s^2 + 1}$	
		$W_1 = \frac{2}{5s-1}$	
02		$W_1 = \frac{1}{10s+1}$	$W_2 = \frac{1}{16s^2 + 2s + 1}$ $W_{01} = 0.5$ $W_{02} = 2$
		$W_1 = \frac{0.05}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$	
		$W_1 = \frac{1}{10s-1}$	
03		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{16s^2 + 20s + 1}$ $W_{01} = 0.1$ $W_{02} = 1$
		$W_1 = \frac{0.15}{s}$	
		$W_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$	
		$W_1 = \frac{2}{10s-1}$	
04		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{25s^2 + 20s + 1}$ $W_{01} = 5$
		$W_1 = \frac{0.15}{s}$	

		$W_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$	
		$W_1 = \frac{2}{10s - 1}$	
05		$W_1 = \frac{1}{20s + 1}$ $W_1 = \frac{0.1}{s}$ $W_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$ $W_1 = \frac{1}{20s - 1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2 + 5s + 1}$ $W_{01} = \frac{0.2}{s}$ $W_{02} = 5$
06		$W_1 = \frac{1}{20s + 1}$ $W_1 = \frac{0.1}{s}$ $W_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$ $W_1 = \frac{1}{20s - 1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2 + 25s + 1}$ $W_{01} = 0.2$ $W_{02} = 5$
07		$W_1 = \frac{2}{5s + 1}$ $W_1 = \frac{0.1}{s}$ $W_1 = \frac{2}{s^2 + 1}$ $W_1 = \frac{2}{5s - 1}$	$W_2 = \frac{1}{10s^2 + 10s + 1}$ $W_3 = 2$ $W_{01} = 5$ $W_{02} = 2$
08		$W_1 = \frac{1}{10s + 1}$ $W_1 = \frac{0.05}{s}$ $W_1 = \frac{1}{s^2 + 1}$ $W_1 = \frac{1}{10s - 1}$	$W_2 = \frac{1}{16s^2 + 2s + 1}$ $W_3 = \frac{1}{20s + 1}$ $W_{01} = 0.5$ $W_{02} = 2$

09		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$ $W_1 = \frac{0.15}{s}$ $W_1 = \frac{1}{s^2+1}$ $W_1 = \frac{2}{10s-1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{16s^2+20s+1}$ $W_4 = \frac{2}{5s+1}$ $W_{O1} = 0.1$ $W_{O2} = 1$
10		$W_1 = \frac{2}{10s+1}$ $W_1 = \frac{0.15}{s}$ $W_1 = \frac{1}{s^2+1}$ $W_1 = \frac{2}{10s-1}$	$W_2 = \frac{0.1}{s}$ $W_3 = \frac{0.5}{25s^2+20s+1}$ $W_4 = 5$ $W_{O1} = 5$ $W_{O2} = 1$
11		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$ $W_1 = \frac{0.1}{s}$ $W_1 = \frac{1}{s^2+1}$ $W_1 = \frac{1}{20s-1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2+5s+1}$ $W_3 = \frac{1}{36s^2+15s+1}$ $W_{O1} = \frac{0.2}{s}$ $W_{O2} = 5$
12		$W_1 = \frac{1}{20s+1}$	$W_2 = \frac{1}{25s^2+25s+1}$ $W_3 = \frac{1}{10s^2+10s+1}$ $W_{O1} = 0.2$ $W_{O2} = 5$

Пример выполнения лабораторной работы.

Пусть исходная блочная структурная схема (БСС) имеет вид (рис. 1):

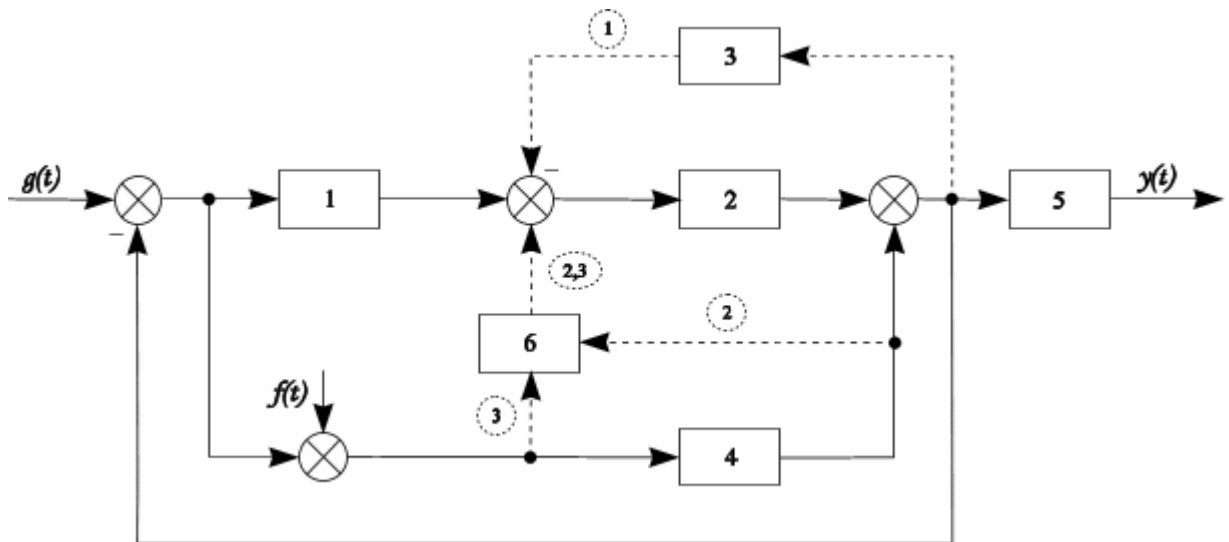


Рисунок 1 – Исходная блочная структурная схема системы.

Номер конфигурации системы – 3, поэтому расчетная БСС выглядит следующим образом:

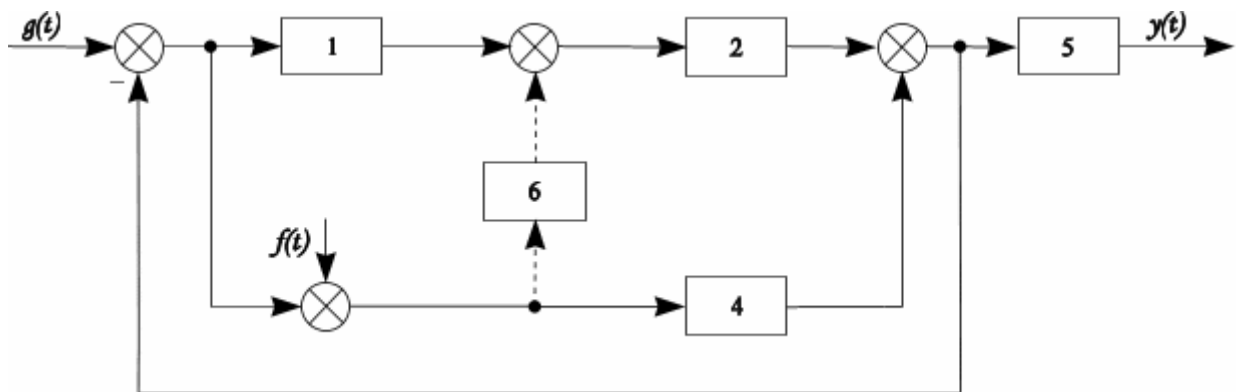


Рисунок 2 – Расчетная блочная структурная схема

Передаточные функции (ПФ) звеньев следующие:

$$W_1(s) = \frac{1}{T_u \cdot s}$$

$$W_2(s) = k_2$$

$$W_4(s) = \frac{k_4}{s}$$

$$W_5(s) = \frac{k_5}{s \cdot (T_5 \cdot s + 1)}$$

$$W_6(s) = k_6$$

Обозначим сигналы на схеме:

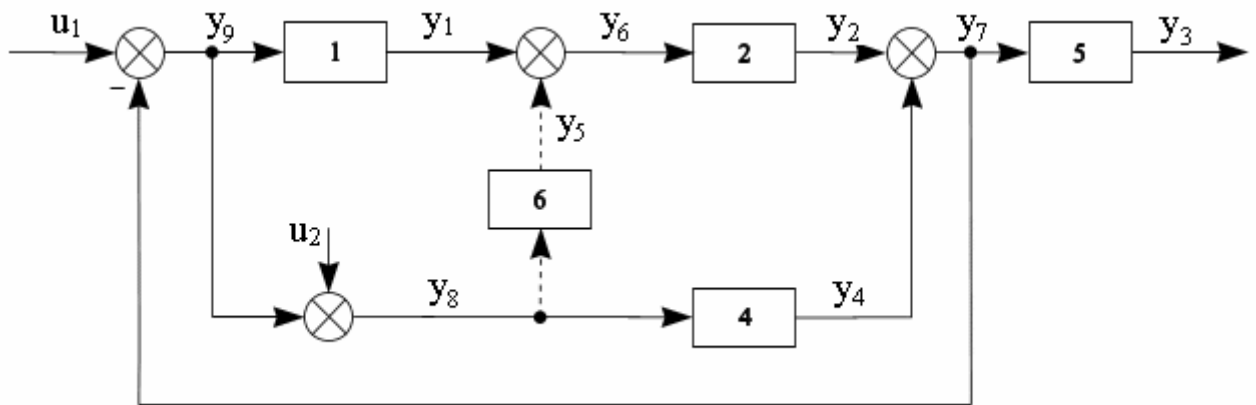


Рисунок 3 – Схема системы с обозначенными сигналами.

Определим порядок системы. Он определяется максимальной степенью характеристического полинома знаменателя $D(s)$. В нашем случае в формировании знаменателя будут участвовать ПФ звеньев №1, 4 и 5. Поэтому порядок системы n , который, в свою очередь, определяет количество переменных состояния (ПС), равен 4.

Произведем выбор ПС:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_4 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = \dot{y}_3 \end{cases}$$

Запишем ПФ звеньев №1, 4, 5 через обозначенные выше сигналы:

$$W_1(s) = \frac{y_1}{y_9}$$

$$W_4(s) = \frac{y_4}{y_8}$$

$$W_5(s) = \frac{y_3}{y_7}$$

Распишем невыраженные через ПС сигналы y_7 , y_8 , y_9 в соответствии с характером соединений в схеме рис.3:

$$\begin{aligned} y_7 &= y_2 + y_4 = k_2 \cdot y_6 + x_2 = (y_1 + y_5) \cdot k_2 + x_2 = (x_1 + k_6 \cdot y_8) \cdot k_2 + x_2 = \\ &= x_1 \cdot k_2 + (u_2 + y_9) \cdot k_2 \cdot k_6 + x_2 = x_1 \cdot k_2 + k_2 \cdot k_6 \cdot u_2 + k_2 \cdot k_6 \cdot (u_1 - y_7) + x_2 = \\ &= x_1 \cdot k_2 + k_2 \cdot k_6 \cdot u_2 + k_2 \cdot k_6 \cdot u_1 - k_2 \cdot k_6 \cdot y_7 + x_2; \end{aligned}$$

$$y_7 + k_2 \cdot k_6 \cdot y_7 = x_1 \cdot k_2 + x_2 + k_2 \cdot k_6 \cdot u_1 + k_2 \cdot k_6 \cdot u_2;$$

$$y_7 \cdot (1 + k_2 \cdot k_6) = x_1 \cdot k_2 + x_2 + k_2 \cdot k_6 \cdot u_1 + k_2 \cdot k_6 \cdot u_2;$$

$$y_7 = x_1 \cdot \frac{k_2}{1 + k_2 \cdot k_6} + x_2 \cdot \frac{1}{1 + k_2 \cdot k_6} + u_1 \cdot \frac{k_2 \cdot k_6}{1 + k_2 \cdot k_6} + u_2 \cdot \frac{k_2 \cdot k_6}{1 + k_2 \cdot k_6}.$$

$$\begin{aligned} y_8 &= u_2 + y_9 = u_2 + (u_1 - y_7) = u_1 + u_2 - (y_2 + y_4) = u_1 + u_2 - x_2 - y_6 \cdot k_2 = \\ &= u_1 + u_2 - x_2 - k_2 \cdot (y_1 + y_5) = u_1 + u_2 - x_2 - x_1 \cdot k_2 - y_8 \cdot k_2 \cdot k_6; \end{aligned}$$

$$y_8 \cdot (1 + k_2 \cdot k_6) = -x_1 \cdot k_2 - x_2 + u_1 + u_2;$$

$$y_8 = -x_1 \cdot \frac{k_2}{1 + k_2 \cdot k_6} - x_2 \cdot \frac{1}{1 + k_2 \cdot k_6} + u_1 \cdot \frac{1}{1 + k_2 \cdot k_6} + u_2 \cdot \frac{1}{1 + k_2 \cdot k_6}.$$

$$\begin{aligned} y_9 &= u_1 - y_7 = u_1 - (y_2 + y_4) = u_1 - (y_6 \cdot k_2 + x_2) = u_1 - k_2 \cdot (y_1 + y_5) - x_2 = \\ &= u_1 - x_1 \cdot k_2 - y_8 \cdot k_2 \cdot k_6 - x_2 = u_1 - x_1 \cdot k_2 - k_2 \cdot k_6 \cdot (u_2 + y_9) - x_2 = \\ &= u_1 - x_1 \cdot k_2 - u_2 \cdot k_2 \cdot k_6 - y_9 \cdot k_2 \cdot k_6 - x_2; \end{aligned}$$

$$y_9 \cdot (1 + k_2 \cdot k_6) = -x_1 \cdot k_2 - x_2 + u_1 - u_2 \cdot k_2 \cdot k_6;$$

$$y_9 = -x_1 \cdot \frac{k_2}{1 + k_2 \cdot k_6} - x_2 \cdot \frac{1}{1 + k_2 \cdot k_6} + u_1 \cdot \frac{1}{1 + k_2 \cdot k_6} - u_2 \cdot \frac{k_2 \cdot k_6}{1 + k_2 \cdot k_6}.$$

Модель системы в терминах пространства состояний состоит из двух векторно-матричных уравнений (ВМУ): дифференциального уравнения состояния 1-го порядка и алгебраического уравнения выхода, т.е.

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_j(t) = A \cdot \overline{x}_j(t) + B \cdot \overline{u}_i(t); \\ \overline{y}_k(t) = C \cdot \overline{x}_j(t) + D \cdot \overline{u}_i(t). \end{cases}$$

Поскольку в нашем случае системный выход выражается через одну из ПС ($y = x_3$ – это и есть уравнение выхода), то полная модель (векторно-матричная модель - ВММ) расчетной системы будет сформирована только из векторно-матричного уравнения (ВМУ) состояния системы.

Запишем модель состояния, включающую в себя состояния 4 скалярных уравнения состояния:

1) Сформируем первое скалярное уравнение состояния:

$$W_1(s) = \frac{y_1}{y_9} = \frac{1}{T_u \cdot s};$$

$$y_1 \cdot T_u \cdot s = y_9.$$

Заменим переменную Лапласа s на оператор Лапласа p :

$$p \cdot x_1 \cdot T_u = y_9.$$

Поскольку $p \cdot x_1 = \dot{x}_1$, то $\dot{x}_1 \cdot T_u = y_9$.

Запишем это уравнение в нормальной форме Коши:

$$\dot{x}_1 = -x_1 \cdot \frac{k_2 \cdot T_u^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} - x_2 \cdot \frac{T_u^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} + u_1 \cdot \frac{T_u^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} - u_2 \cdot \frac{k_2 \cdot k_6 \cdot T_u^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6};$$

2) Сформируем второе скалярное уравнение состояния:

$$W_4(s) = \frac{y_4}{y_8} = \frac{k_4}{s};$$

$$p \cdot x_2 = k_4 y_8;$$

$$\dot{x}_2 = k_4 y_8;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \frac{k_2 k_4}{1 + k_2 k_6} - x_2 \frac{k_4}{1 + k_2 k_6} + u_1 \frac{k_4}{1 + k_2 k_6} + u_2 \frac{k_4}{1 + k_2 k_6};$$

3) Сформируем третье скалярное уравнение состояния:

Поскольку $x_3 = y_3$, а $y_3 = x_4$, то $\dot{x}_3 = \dot{x}_4$;

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_4;$$

4) Сформируем четвертое скалярное уравнение состояния:

$$W_5(s) = \frac{y_3}{y_7} = \frac{k_5}{T_5 \cdot s^2 + s};$$

$$p^2 \cdot y_3 \cdot T_5 + p \cdot y_3 = k_5 \cdot y_7;$$

$$x_3 \cdot T_5 + y_3 = k_5 \cdot y_7;$$

$$x_4 \cdot T_5 + x_4 = k_5 \cdot y_7;$$

$$\dot{x}_4 = -x_4 \cdot T_5^{-1} + k_5 \cdot T_5^{-1} \cdot y_7;$$

$$\dot{x}_4 = x_1 \cdot \frac{k_2 \cdot k_5 \cdot T_5^{-1}}{1 + k_2 k_6} + x_2 \cdot \frac{k_5 \cdot T_5^{-1}}{1 + k_2 k_6} - x_4 \cdot T_5^{-1} + u_1 \cdot \frac{k_2 \cdot k_5 \cdot T_5^{-1} \cdot k_6}{1 + k_2 k_6} + u_2 \cdot \frac{k_2 \cdot k_5 \cdot T_5^{-1} \cdot k_6}{1 + k_2 k_6}.$$

Модель состояния системы 4-го порядка с двумерным векторным входом, записанная в скалярной форме, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2; \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2; \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2; \\ \dot{x}_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + b_{41}u_1 + b_{42}u_2, \end{cases}$$

откуда матрицы состояния A и управления B записываются так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

$$\dim A = [4 \times 4] \quad \dim B = [4 \times 2]$$

Система скалярных уравнений состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \frac{k_2 \cdot T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} - x_2 \frac{T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} + u_1 \frac{T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} - u_2 \frac{k_2 k_6 \cdot T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} ; \\ \dot{x}_2 = -x_1 \frac{k_2 \cdot k_4}{1 + k_2 k_6} - x_2 \frac{k_4}{1 + k_2 k_6} + u_1 \frac{k_4}{1 + k_2 k_6} + u_2 \frac{k_4}{1 + k_2 k_6} ; \\ \dot{x}_3 = x_4 ; \\ \dot{x}_4 = x_1 \frac{k_2 k_5 T 5^{-1}}{1 + k_2 k_6} + x_2 \frac{k_5 T 5^{-1}}{1 + k_2 k_6} - x_4 T 5^{-1} + u_1 \frac{k_2 k_5 T 5^{-1} k_6}{1 + k_2 k_6} + u_2 \frac{k_2 k_5 T 5^{-1} k_6}{1 + k_2 k_6} , \end{cases}$$

где

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{k_2 T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} & -\frac{T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} & 0 & 0 \\ -\frac{k_2 k_4}{1 + k_2 k_6} & -\frac{k_4}{1 + k_2 k_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2 k_5 T 5^{-1}}{1 + k_2 k_6} & \frac{k_5 T 5^{-1}}{1 + k_2 k_6} & 0 & -T 5^{-1} \end{array} \right] ;$$

$$B = \left[\begin{array}{cc} \frac{T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} & \frac{-k_2 k_6 T u^{-1}}{1 + k_2 k_6} \\ \frac{k_4}{1 + k_2 k_6} & \frac{k_4}{1 + k_2 k_6} \\ 0 & 0 \\ \frac{k_2 k_5 T 5^{-1} k_6}{1 + k_2 k_6} & \frac{k_2 k_5 T 5^{-1} k_6}{1 + k_2 k_6} \end{array} \right] .$$

Реализация расчета системы по методу ПС в универсальном пакете MathCad.

1. Задаем значения параметров звеньев

$$\begin{aligned} T_И &:= 2.5 & k_4 &:= 1 & T_5 &:= 2 \\ k_2 &:= 0.5 & k_5 &:= 0.9 & k_6 &:= 1.5 \end{aligned}$$

2. Записываем вектор начальных условий

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Формируем матрицы А и В

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-k_2 \cdot T_И^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} & \frac{-T_И^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} & 0 & 0 \\ \frac{-k_2 \cdot k_4}{1 + k_2 \cdot k_6} & \frac{-k_4}{1 + k_2 \cdot k_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2 \cdot k_5 \cdot T_5^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} & \frac{k_5 \cdot T_5^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} & 0 & -T_5^{-1} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \frac{T_И^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} & \frac{-k_2 \cdot k_6 \cdot T_И^{-1}}{1 + k_2 \cdot k_6} \\ \frac{k_4}{1 + k_2 \cdot k_6} & \frac{k_4}{1 + k_2 \cdot k_6} \\ 0 & 0 \\ \frac{k_2 \cdot k_5 \cdot T_5^{-1} \cdot k_6}{1 + k_2 \cdot k_6} & \frac{k_2 \cdot k_5 \cdot T_5^{-1} \cdot k_6}{1 + k_2 \cdot k_6} \end{pmatrix}$$

4. Записываем входные сигналы

$$\begin{aligned} g(t) &:= 1.2 \sin(4.5t) + 3 \\ f(t) &:= 1.2t \end{aligned}$$

5. Записываем систему дифференциальных уравнений (т.е. ВМУ состояния)

$$dxdt(t, x) := A \cdot x + B \cdot \begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$$

6. Задаем решение

$$X := rkfixed(x, 0, 20, 2000, dxdt)$$

где: **rkfixed** - функция, дающая решение системы диф.уравнений
0 - начало временного интервала
20 - конец временного интервала
2000 - число шагов, на которые разбивается интервал

7. Задаем изменение индекса

$$j := 0..2000$$

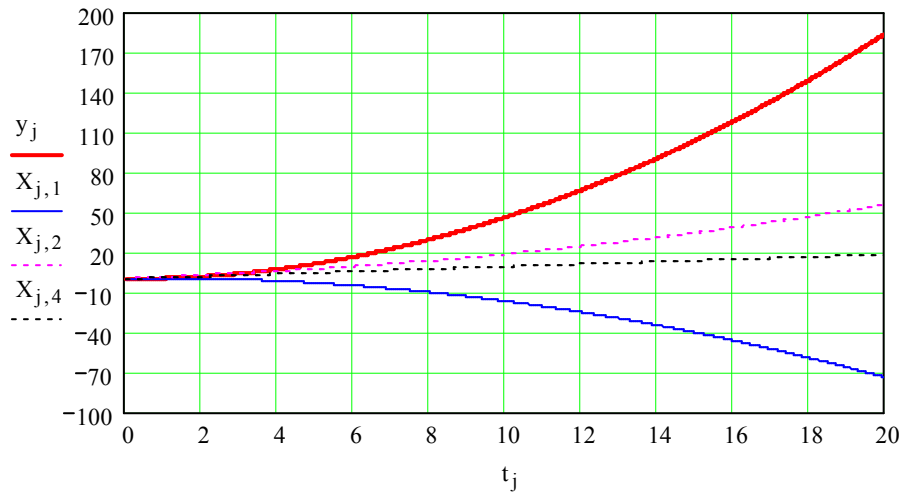
8. Обозначим ось времени

$$t_j := X_{j,0}$$

9. Зададим выходной параметр системы

$$y_j := X_{j,3}$$

10. Построим график решения системы ДУ, который будет являться переходным состоянием системы $x_{j,k}$.



$$X_{j,k} = \begin{bmatrix} x_{j,1}(t) \\ x_{j,2}(t) \\ x_{j,3}(t) \\ x_{j,4}(t) \end{bmatrix}$$

Литература

1. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.
2. Федосенков Б.А. Теория автоматического управления. Линейные системы. – Кемерово, 2006г. – 156с.

Расчет переходных процессов в САУ

Цель работы: овладеть навыками расчета переходных процессов в САУ при помощи системы CLASSIC и пакета MathCad

Исходные данные

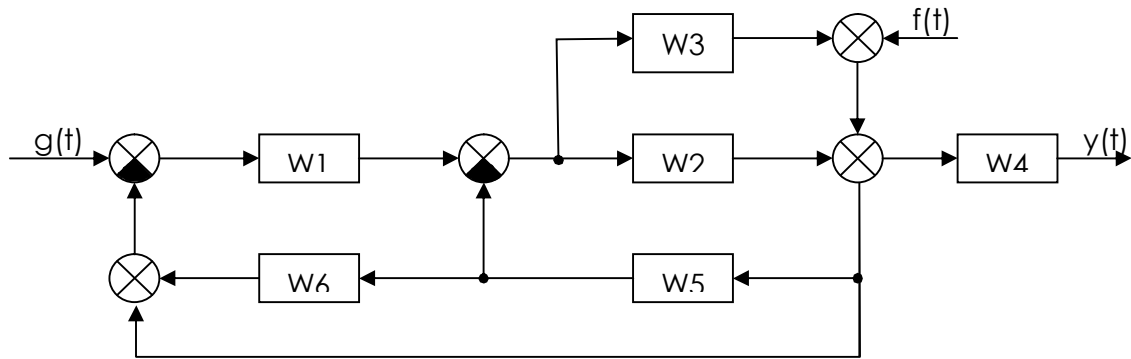


Рисунок 1 – Структурная схема расчетной САУ

Параметры входных воздействий

$n = 1..6$	$g(t) = X_m \cdot \sin \omega t + X_m$ $f(t) = X_e \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$	$X_m = 0.5n$ $\omega = 2 + n$ $X_e = 0.2n$ $T = 2n$
$n = 7..12$	$g(t) = X_m \cdot \sin \omega t + X_0$ $f(t) = k \cdot t$	$X_0 = 2n$ $k = 0.5n$

Передаточные функции звеньев схемы:

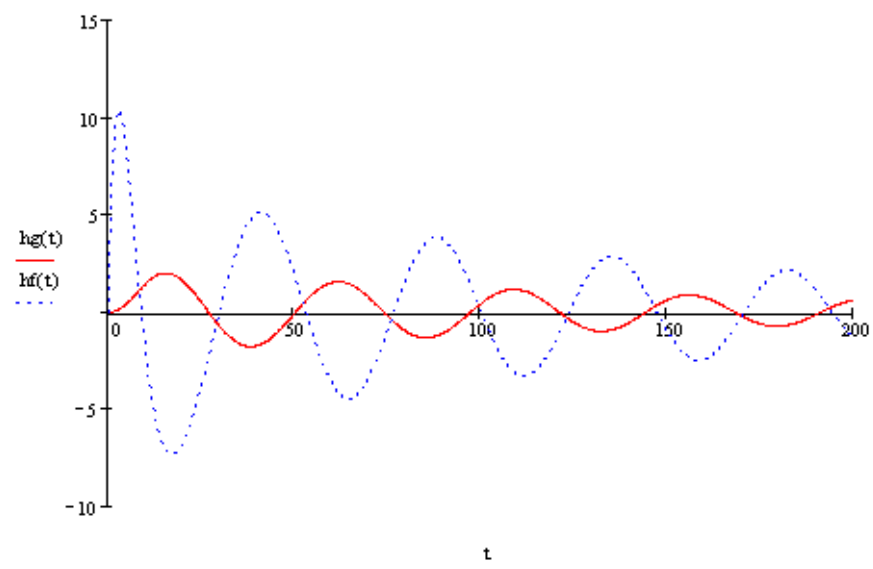
$W1(s) = \frac{n}{T_{12}^2 s^2 + T_{11} s + 1} \quad T_{11} = 10 + n \quad \xi = \frac{T_{11}}{2T_{12}} = 0.5 + 0.1n$			$W2(s) = \frac{0.5s}{ns + 1}$
$W3(s) = 0.5n$	$W4(s) = \frac{0.2n}{2n \cdot s + 1}$	$W5(s) = \frac{0.05n}{ns^2 + s}$	$W6(s) = \frac{n}{2ns + 1}$

Порядок выполнения работы:

- 1 Создать модель САУ в моделирующей системе.
- 2 Найти ПФ САУ по каждому из каналов «вход-выход».
- 3 Рассчитать переходные процессы в САУ по каждому из каналов «вход-выход»
- 4 Выполнить расчет переходных процессов САУ в пакете MathCad
- 5 Сравнить полученные графики переходных процессов

Реализация расчета переходных процессов в пакете MathCad

1-е входное воздействие	$g(t) := 5 \sin(10t) + 5$	
2-е входное воздействие	$f(t) := 10 \exp(-0.1t)$	
Изображение 1-го входного воздействия	$g(s) := g(t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{50}{(s^2 + 100)} + \frac{5}{s}$	
Изображение 2-го входного воздействия	$f(s) := f(t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{10.}{(s + .100000000000000000000)}$	
Формирующий фильтр по 1-му входному воздействию	$Wffg(s) := g(s) \cdot s$	
Формирующий фильтр по 2-му входному воздействию	$Wfff(s) := f(s) \cdot s$	
ПФ САУ по каналу g-y без фильтров	$Wyg(s) := \frac{0.009s^4 + 0.00945s^3 + 0.00324s^2 + 0.00036s}{s^7 + 1.75s^6 + 1.235s^5 + 0.4645s^4 + 0.105s^3 + 0.01517s^2 + 0.00149s + 0.00012}$	
ПФ САУ по каналу f-y без учета фильтров	$Wyf(s) := \frac{0.9s^6 + 1.125s^5 + 0.495s^4 + 0.0936s^3 + 0.008325s^2 + 0.00045s}{s^7 + 1.75s^6 + 1.235s^5 + 0.4645s^4 + 0.105s^3 + 0.01517s^2 + 0.00149s + 0.00012}$	
Переходный процесс САУ по каналу g-y	$hg(t) := \frac{Wffg(s) \cdot Wyg(s)}{s} \text{ invlaplace, } s \rightarrow 4.4842902812702790954 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(10 \cdot t) - 3.1422591778031985674 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(10$	
Переходный процесс САУ по каналу f-y	$hf(t) := \frac{Wfff(s) \cdot Wyf(s)}{s} \text{ invlaplace, } s \rightarrow -3.0308699719363891487 \cdot \exp(-.100000000000000000000 \cdot t) - 5.015670833269$	

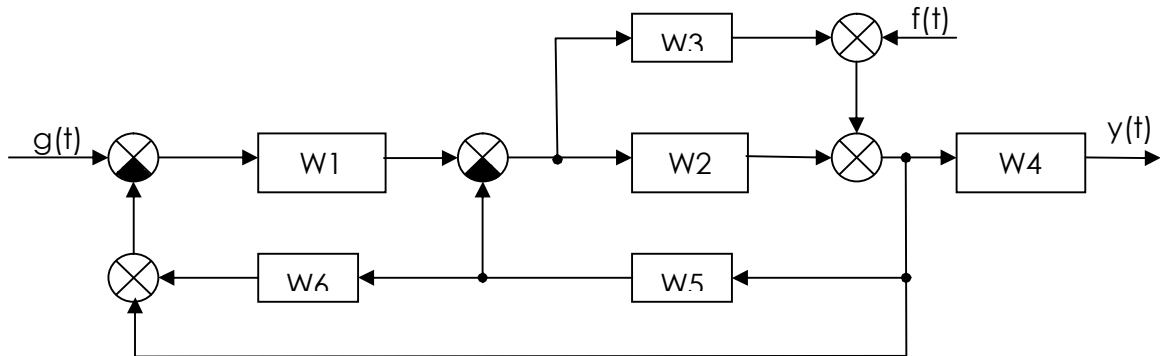


Лабораторная работа № 5

Расчет переходных процессов в САУ графическим способом по методу В.В. Солодовникова (методу трапеций или методу h-функций)

Цель работы: овладеть навыками расчета переходных процессов в САУ графическим способом

Исходные данные



Параметры входных воздействий

$n = 1..6$	$g(t) = X_m \cdot \sin \omega t + X_m$ $f(t) = X_e \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$	$X_m = 0.5n \quad \omega = 2 + n$ $X_e = 0.2n \quad T_e = 0.2n$
$n = 7..12$	$g(t) = X_e \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$ $f(t) = k \cdot t$	$X_e = 0.2n \quad T_e = 0.2n$ $k = 0.5n$

Передаточные функции звеньев схемы:

$W1(s) = \frac{n}{T_{12}^2 s^2 + T_{11} s + 1} \quad T_{11} = 10 + n \quad \xi = \frac{T_{11}}{2T_{12}} = 0.5 + 0.1n$			$W2(s) = \frac{0.5ns}{ns + 1}$
$W3(s) = 0.5n$	$W4(s) = \frac{0.2n}{2n \cdot s + 1}$	$W5(s) = \frac{(0.05/n)}{ns^2 + s}$	$W6(s) = \frac{n}{2ns + 1}$

Порядок выполнения работ:

- 1 Найти передаточные функции формирующих фильтров для каждого из каналов
- 2 Создать модель САУ в моделирующей системе
- 3 Найти ПФ САУ по каждому из каналов вход-выход
- 4 Найти и построить переходный процесс в САУ по каждому из каналов вход-выход
- 5 Найти и построить ВЧПФ САУ по каждому из каналов
- 6 Рассчитать переходные процессы по каждому из каналов САУ по методу Солодовникова
- 7 Сравнить графики переходных процессов, полученные машинным и графическим способами
- 8 Вывод

Указания:

- 1 Получить ВЧПФ САУ можно несколькими способами:
 - 1.1 На основании годографа САУ, определив действительную часть ЧПФ (Classic)
 - 1.2 определить и построить действительную часть можно и при помощи средств MathCad (работа с комплексными числами)

$W(s) := \frac{10}{20s + 1}$ — передаточная функция исследуемого звена

Процедура определения ВЧПФ звена (системы)

$w := 0,0001 \dots 10$ $j := \sqrt{-1}$

$s(w) := j \cdot w$ $Re(w) := Re(W(j \cdot w))$

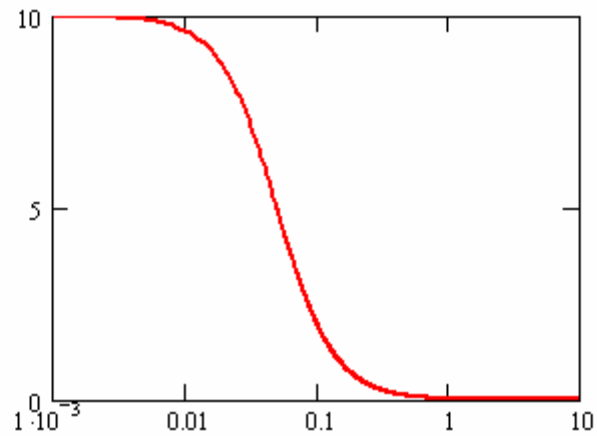


Рисунок 1 – ВЧПФ инерционного звена 1-го порядка

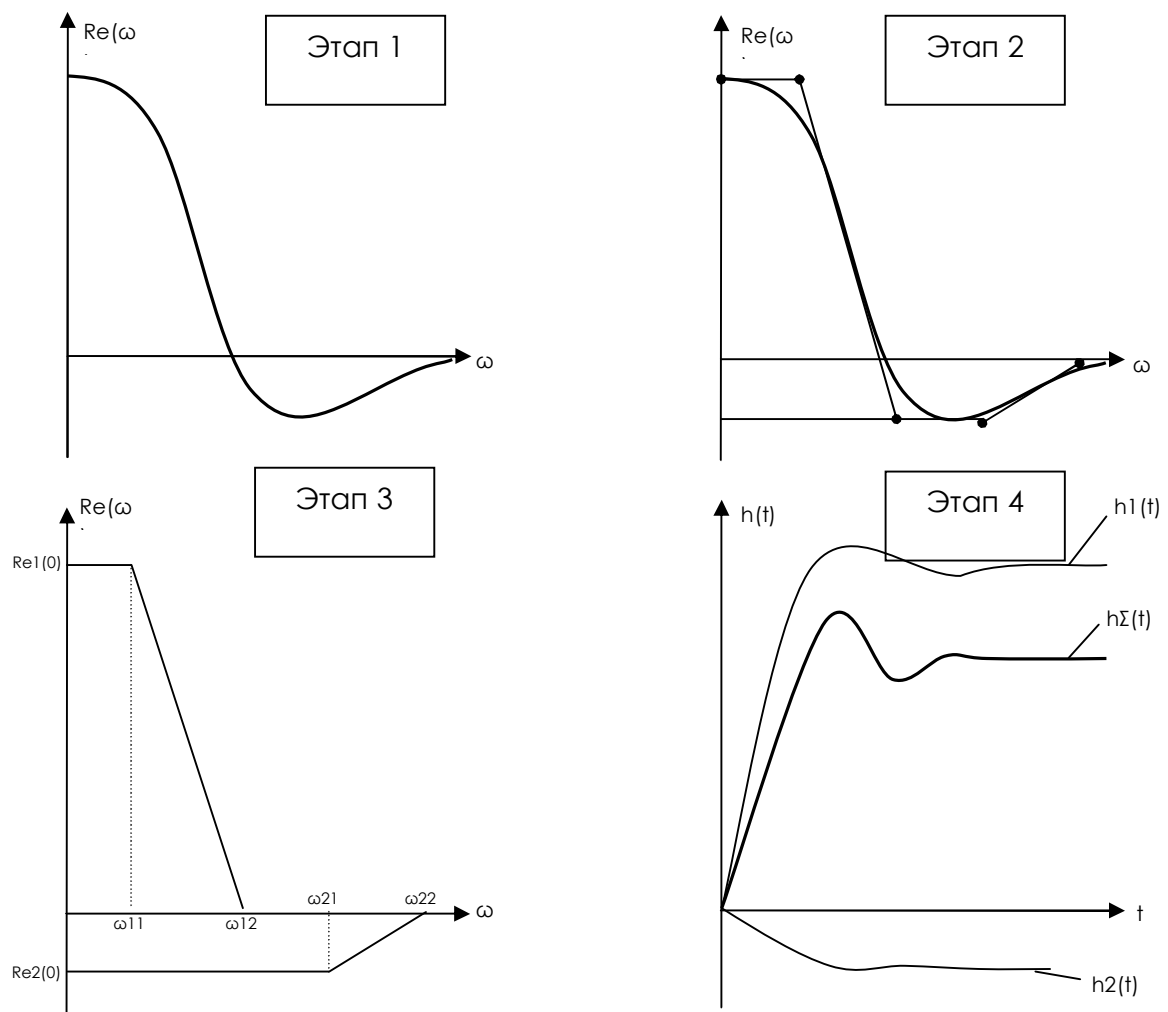


Рисунок 2 –Этапы определения переходного процесса по методу
Солодовникова В.В.:

Этап 1 – расчет ВЧПФ звена/системы второго порядка;

Этап 2, 3 – аппроксимация трапецеидальными типовыми ВЧПФ;

Этап 4 – определение результирующего переходного процесса методом суперпозиции.

Литература

1. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.
2. Федосенков Б.А. Теория автоматического управления. Линейные системы. – Кемерово, 2006г. – 156с.