МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В.А. ПАВСКИЙ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Для студентов вузов

Кемерово 2012

УДК 512.64(075)
ББК 22.143я7
П 12

Рецензенты:

Н.Н. Данилов, д-р физ.-мат. наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики КемГУ,
А.М. Гудов канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры UNESCO по новым информационным технологиям КемГУ

Рекомендовано редакционно-издательским советом Кемеровского технологического института пищевой промышленности

Павский, В.А.

П 12 Линейная алгебра: учеб. пособие / В.А. Павский; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2012. – 184 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой дисциплины «Линейная алгебра» и предназначено для студентов всех форм обучения. Будет полезно аспирантам и преподавателям

УДК 512.64(075)
ББК 22.143я7

ISBN

Оглавление

Основные обозначения

СИМВОЛ	ЗНАЧЕНИЕ
$A, B, \ldots, \{x\}$	обозначения множеств
$a \sim b$	отношение эквивалентности
$A \subset B$	логический знак принадлежности множества множеству
$a \in A$	логический знак принадлежности элемента множеству
$a = b$, $a \stackrel{\Delta}{=} b$	знак равенства и равенства по определению
$\wedge$, &	«и», логический знак конъюнкция
$\vee$	«или», логический знак дизъюнкция
$\forall$	«для всех» «любой», квантор всеобщности
$\exists$	«существует», квантор существования
$\cap$	знак пересечения множеств
$\cup$	знак объединения множеств
$\neg A$, $\overline{A}$	отрицание A
$A - B$	знак дополнения множеств
▼	знак окончания доказательсва
N	множества натуральных чисел
Z	множества целых чисел
Q	множества рациональных чисел
R	множества действительных чисел
C	множества комплексных чисел
card	символ кардинального числа
$æ_0 = cardN$	«алеф-нуль», мощность N
$2^{æ_0} = cardR$	мощность R
ib	мнимое число, $b \in R$
$a + ib$	комплексное число, $a, b \in K$
i	мнимая единица, $i = \sqrt{-1}$
$\sum$	знак обозначения сокращенного суммирования
$\prod$	знак обозначения сокращенного умножения
А, В, …	оператор
A, [A], $[\alpha_{ij}]$, (α_{ij})	матрица

СИМВОЛ	ЗНАЧЕНИЕ
$A^T,\ [A]^T$	транспонированная матрица
E	единичная матрица
A^{-1}	обратная матрица
Δ, $\det A$, $\|A\|$	определитель матрицы
$n!$	«эн-факториал», произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $0!\overset{\Delta}{=}1$
$\det[\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}]$	характеристический многочлен
C_n^k	символ числа сочетаний из n элементов по k, а $\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k!}$ - число вариантов
r, $rangA$	ранг матрицы A
$\bar{e}$	единичный вектор
$\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$	единичные координатные векторы
$L,\ L^n$	линейное пространство
L_1+L_2	прямая сумма
$\bar{a}\cdot\bar{b},\ (\bar{a},\bar{b})$	скалярное произведение пары векторов
$\bar{a}\times\bar{b}$	векторное произведение векторов
$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c},\ (\bar{a},\bar{b},\bar{c})$	смешанное произведение векторов
$np_{\bar{a}}\bar{b}$	проекция вектора $\bar{b}$ в направлении вектора $\bar{a}$
$\|\bar{a}\|$	длина вектора $\bar{a}$

ВВЕДЕНИЕ

Особенностью развития современного общества является применение математических моделей, методов и быстродействующих вычислительных средств в различных областях знаний. Создание любого нового продукта практически всегда сопровождается применением математических методов и математического (в частности, имитационного) моделирования. Ведущая роль, среди фундаментальных математических наук, отведена алгебре, которая, совместно с математической логикой, пытается формализовать всю математику с целью создания единой математической теории с дальнейшим внедрением ее в программное обеспечение искусственного интеллекта.

Современная линейная алгебра, являясь разделом алгебры, широко применяется в различных областях науки и приложениях. Её модели и методы составляют наиболее разработанную часть программного обеспечения, в плане параллельного программирования, а алгебраические структуры являются частью математического аппарата, используемого при проектировании и создании суперкомпьютеров и других средств быстродействующей вычислительной техники. В сущности, теория множеств, алгебра, математическая логика уже составляют язык современной математики и многих ее приложений.

Предварительная информация о дисциплине «Линейная алгебра» в пособии представлена в объеме несколько большем, чем необходимо. Это обосновывается тем, что в последующих математических дисциплинах, изучаемых в вузе, эта информация будет полностью востребована.

Алгебра или ***универсальная алгебра*** – часть математики, изучающая алгебраические операции.

Линейная алгебра – раздел алгебры, изучающий линейные пространства, линейные операторы (преобразования) и смежные вопросы.

Содержательный смысл определений скрыт в их концентрированности и станет более доступным после ознакомления с этапами развития алгебры, её методами, как фундаментальной науки.

Пособие состоит из введения, восьми разделов, списка литературы, заключения.

Приведен список основных обозначений. Оглавление достаточно подробно и может быть использовано в качестве именного указателя. Особое внимание при изучении линейной алгебры следует уделить ссылкам на литературу, которая, несомненно, поможет лучше усвоить наиболее трудновоспринимаемые разделы и понять ее фундаментальное значение для математики и науки.

Выражаю искреннюю благодарность доктору наук Ивановой С.А., взявшей на себя тяжелый труд по оформлению пособия. Ее критические замечания помогли не только улучшить качество изложения, но и сделать доступным, содержащийся в пособии материал.

I. Введение в линейную алгебру

§1. История развития алгебры

Знакомство с математикой (греч. mathêmatikê – наука, познание), и тем самым с алгеброй, обычно начинается с арифметики (греч. arithmos - число). Один из первых русских учебников, написанный Л.Ф. Магницким в 1707 г., начинался словами: «Арифметика или числительница есть художество честное, независтное и всем удобопонятное …». Арифметика изучает действия над числами, учит решать задачи, сводящиеся к арифметическим операциям: сложению, умножению, вычитанию и делению. Изучение свойств самих чисел составляет предмет теории чисел. Основные этапы развития арифметики: создание учения о величинах, числе, буквенного аппарата алгебры, разработка аксиоматической системы.

В современном изложении, арифметика – область знаний о числе и арифметических операциях в числовых ***множествах***.

Арифметику можно представлять и как начальную ступень математики, на которой, когда возникла необходимость в поиске общих приемов решения однотипных арифметических задач, и появилась алгебра. Следует отметить и роль геометрии (как части математики, изучающей пространственные формы и тела́), в становлении алгебры, появившейся, возможно, раньше арифметики. В III в. до н.э., древнегреческий ученый Евклид написал книгу «Начала», в которой пытался дать логически законченное аксиоматическое изложение геометрии; главы с седьмой по девятую (из двенадцати) Евклид посвятил арифметике.

В школьном курсе алгебры, после изучения алгебраических уравнений 1-ой степени (линейных уравнений), выделяются два направления изучения предмета: решение квадратных и биквадратных уравнений и решение систем из двух или трех алгебраических уравнений.

Эти направления развивались и в высшей алгебре: «Алгебра многочленов одного или нескольких неизвестных» и

«Линейная алгебра», исходной задачей которой являлось изучение систем линейных уравнений.

В первом случае следует отметить вклад Э. Галуа (1811-1832). Работы Галуа содержали окончательное решение проблемы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах (1831). Сегодня это называется теорией Галуа [9] и составляет один из самых глубоко проработанных разделов алгебры.

Во втором случае, исследование систем уравнений привело к созданию теории определителей, а затем и алгебры матриц. Появление теоремы Кронекера-Капелли (1883-1891) завершило построение общей теории систем линейных уравнений.

Оба направления оказались настолько плодотворными, что из них возникло несколько новых разделов алгебры, стимулируемых запросами, не только математическими, но и естественно научными дисциплинами.

Казалось, что развитие алгебры пойдет по традиционному пути. Будут искать новые классы уравнений, доказывать новые тождества и т.д., тем более что после создания комплексных чисел возникли гиперкомплексные числа [5], которые построил ирландский математик У. Гамильтон (1788-1856), но в середине XIX в. появилось понятие множества, а к его завершению, стараниями Б. Больцано (B. Bolzano) 1781-1848, Р. Дедекинда (R. Dedekind) 1831-1916, Ф. Хаусдорфа (F. Hausdorff) 1868-1942 и, особенно, Г. Кантора (G. Cantor) 1845-1918, была создана **теория множеств** – учение о свойствах множеств элиминирующих (лат. eliminare – исключать, устранять) свойства элементов, из которых эти множества состоят [10].

Важным здесь оказались именно свойства множеств как носителя информации, а не его природа (т.е. его элементов). К свойствам множеств, как объекта для алгебры относятся операции алгебраические и аналогичные им по смыслу, результат применения которых к элементам множества дает элемент того же множества.

Анализ применения арифметических операций (сложения, умножения, вычитания и деления) и арифметических действий (наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного и др.) на многочисленных примерах с числовыми множествами показал, что разумно использовать только сложение и умножение, а остальные рассматривать при необходимости их введения, как свойства (аксиомы), дополнительные к свойствам (аксиомам) сложения и умножения.

Более того, оказалось, что и для нечисловых множеств (например, векторов или подобных треугольников) выполняются операции сложения и умножения, не в смысле их обозначения или названий, а в содержательном смысле, представленном в виде свойств.

Так возникло абстрактное понятие операции композиции, как обобщение алгебраической операции.

Тем самым был осуществлен переход от алгебры первого уровня абстракции - использование вместо чисел букв, при поиске общих приемов решения арифметических задач - к алгебре более высокого уровня абстракции: рассмотрение множеств, в которых носителями информации задаются операции композиции, каждая представленная в виде систем аксиом, которым удовлетворяют элементы множеств; остальные свойства элементов элиминируются (игнорируются).

Изучение системы аксиом, определяющих операцию композиции, привело к мысли, что можно изучать только их свойства независимо от объектов, к которым они применяются. Это означает, что два множества с заданными операциями, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие и они удовлетворяют одной и той же системе аксиом, одинаковы. Такие множества называются ***изоморфными***, т.е. обладают одинаковыми свойствами. Другими словами, изучая одно из них, мы, тем самым, узнаем свойства другого.

Поскольку различных множеств, с заданными в них операциями, очень велико, то стали классифицировать множества, хотя и не изоморфные, но обладающие общими свойствами частично. Классы таких множеств получили название ***алгебраической системы***, т.е. системы генерирующей множества с операциями (***универсальные алгебры***). Ясно, что алгебраическая система сама является универсальной алгеброй.

Например, изучив свойства операции умножения матриц, пришли к выделению понятия группы, одного из важнейших понятий не только как представителя универсальной алгебры [2, 7], но и во всей математике. Другим примером универсальной алгебры является понятие поля – множества, для элементов которого определены две операции композиции: сложения и умножения для числовых множеств. Наиболее известны поля множеств рациональных чисел *Q*, действительных (вещественных) чисел *R*, комплексных чисел *C*, названия которых образованы от французских слов Quotient - отношение, Reel - действительный, Complex – комплексный. Название поле (числовое) своему появлению обязано аналогией с обычным полем – местности, по которой можно двигаться без ограничений, не встречая никаких препятствий. Аксиомы поля подобраны так, чтобы в нем выполнялись не только арифметические операции, но и большинство других действий (в зависимости от конкретного числового множества).

Зададим поле аксиоматически. Так как каждое из перечисленных числовых множеств является полем, то, чтобы не связывать себя с числами из конкретных множеств, назовем элементы множеств скалярами (scalaris - ступенчатый) – величины, определяемые только своими числовыми значениями [2, 11].

Скалярное множество будем называть полем, если в нем заданы две бинарные операции композиции: сложение и умножение, удовлетворяющие аксиомам.

А. Для любых скаляров α, β, γ из числового множества найдется скаляр $\alpha+\beta$, называемый суммой α и β, такой, что

1) сложение ассоциативно, т.е. $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$;

2) сложение коммутативно, т.е. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

3) существует единственный скаляр 0 (нуль), такой, что $\alpha+0=\alpha$;

4) для любого α существует однозначно определенный скаляр $(-\alpha)$, такой, что $\alpha+(-\alpha)=0$;

В. Для любых скаляров α, β, γ найдется скаляр $\alpha\cdot\beta$ (или $\alpha\beta$), называемый произведением α и β, такой, что

5) умножение ассоциативно, т.е. $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$;

6) умножение коммутативно, т.е. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$;

7) существует единственный ненулевой скаляр 1 (единица), такой, что для любого α, $\alpha\cdot 1=\alpha$;

8) каждому ненулевому скаляру α соответствует однозначно определенный скаляр α^{-1}, называемый обратным, такой, что $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$;

С. Умножение дистрибутивно относительно сложения, т.е.

9) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

Легко проверить, что множества *Q*, *R*, *C* удовлетворяют этим наборам аксиом. В дальнейшем, в качестве основного, будем рассматривать поле действительных чисел.

Среди других универсальных алгебр отметим а) ***решетки*** – множества с двумя бинарными операциями, например, решетку образует множество положительных рациональных чисел с операциями нахождения наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя; б) ***линейные пространства*** над числовым полем – множество с одной операцией – сложения и умножением на скаляры; в) множество с одной бинарной операцией, обычно называемой умножением (реже - сложением), удовлетворяющей системе аксиом **В** 1)-4) поля, называется ***группой***, а множество с двумя операциями называется ***кольцом***.

Разберем универсальные алгебры подробно.

Группа

Пусть задано непустое множество *G* с одной алгебраической операцией композиции, обычно называемой умножением. Тогда для любых элементов *a*, *b* из *G*, композиция записывается в виде $a\circ b$ и является элементом *G*.

Множество *G* называется ***группой*** [2, 11], если выполняются аксиомы

1) $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$;

2) существует единственный элемент 1, называемый нейтральным (для умножения это единица), такой, что

$$a\circ 1=1\circ a=a;$$

3) существует единственный элемент a^{-1}, называемый обратным к произвольному элементу a группы, такой, что

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1,$$

если к тому же выполняется аксиома

4) $a \circ b = b \circ a$,

то группа G называется абелевой или коммутативной.

Пример I.1. Подстановкой множества называется взаимно-однозначное отображение этого множества на себя по следующей схеме. Пусть $N_n = \{1,2,\ldots,n\}$, тогда подстановка обозначается как $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, где $i_j \in N_n$, $j \in N_n$

Пусть $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Произведением $s \cdot t$ называется подстановка, получаемая по правилу: умножение начинаем с подстановки t: 1 переходит в 2, далее находим в подстановке s число 2, которое переходит в 3 и т.д. Окончательно получим $s \cdot t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполнение аксиомы 1 следует из цепочки равенств для любого a

$$(rs) \cdot t(a) = (rs)(t(a)) = r(s(t(a))),$$

$$r(s \cdot t)(a) = r(s \cdot t(a)) = r(s(t(a))),$$

то есть

$$r(s \cdot t(a)) = rs(t(a)) = r(s \cdot t)(a).$$

В аксиоме 2, в качестве нейтрального элемента используется тождественная подстановка $I(a) = a$, то есть $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, в которой каждый элемент переходит в себя (порядок чисел в верхней строке не важен).

Для аксиомы 3, в качестве обратного элемента рассматривается подстановка s^{-1}, действующая наоборот, то есть $s^{-1} \cdot s(a) = a$ или $s^{-1} \cdot s = I$. Для подстановки s, обратная

$s^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$. В самом деле,

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Тем самым показано, что конечные подстановки образуют группу по умножению. В дальнейшем они будут использованы при аксиоматическом построении и вычислении определителей.

Относительно группы с операцией сложения, заметим, что обычно она абелева и используются аксиомы 1) – 4), с соответствующей поправкой на знак операции.

Примерами таких групп являются множества целых чисел $Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, множество $H\subset Z$ четных целых чисел.

Множество *H* называется подгруппой группы *G*.

Пример I.2. Показать, что множество нечетных целых чисел не является группой.

Покажем, что для любых элементов *a*, *b* группы *G*, уравнения $ax=b$ и $ya=b$ имеют единственное решение: $x=a^{-1}\cdot b$ и $y=b\cdot a^{-1}$. В самом деле, имеем

$$a(a^{-1}\cdot b)=(a\cdot a^{-1})b=1\cdot b=b,$$

$$(b\cdot a^{-1})a=b(a^{-1}\cdot a)=b\cdot 1=b.$$

Аналогично можно доказать обратимость сложения – это вычитание, $a+x=b$ для групповой операции сложения: $x=b-a$.

Кольцо

Пусть задано непустое множество *K* с двумя алгебраическими операциями: сложения и умножения [2]. Множество *K* называется кольцом, если выполняются свойства (аксиомы)

А. Сложение:

1) $a+(b+c)=(a+b)+c$;

2) $a+b=b+a$;

3) существует решение уравнения

$a + x = b$, $x = b - a$ (обратимость сложения).

B. Умножение:

4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

C. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

6) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Из аксиом набора **A**, **B**, **C** (1-6) следует, что кольцо образует ***абелеву группу*** относительно сложения. В такой группе 0 является «поглощающим» элементом, то есть $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$. Единицей кольца является символ 1, причем $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Кольцо не обязано обладать единицей, а также не всегда $b \cdot a \neq 0$, если $b \neq 0$ и $a \neq 0$ [3, 11].

Если в **B** добавлена аксиома $a \cdot b = b \cdot a$, то кольцо называется коммутативным.

Кольцо одно из самых популярных универсальных алгебр. Примеры кольца: множество Z целых чисел; множество Q рациональных чисел; множество R вещественных чисел; множество C комплексных чисел; множество многочленов от одного или нескольких переменных; множество квадратных матриц; множество векторов 3-х мерного пространства с операциями сложения и векторного произведения и др.

Подведем некоторые итоги. Алгебра, как часть математики, в своем развитии, прошла два, неравноценных по времени, этапа. Первый этап тысячелетний, до середины XIX в. Алгебру этого времени условно назовем ***элементарной***. Были решены все, поставленные перед ней до XVII в, задачи. К этому времени алгебра не только получила самостоятельное развитие и уже не опиралась на геометрию, но ее методы стали использоваться и в самой геометрии. Завершился первый этап созданием общей теории решения систем линейных алгебраических уравнений, комплексных чисел и решением проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Второй этап (последние 150 лет) условно назовем ***современной алгеброй***. Отметим её вклад в теорию множеств, создание универсальных алгебр и алгебраических систем –

глубоко разработанной теории, объединяющей алгебру и математическую логику.

На долю линейной алгебры отнесем изучение линейных (векторных) пространств, линейных преобразований (операторов, функций) билинейных и квадратичных форм на линейных пространствах и, кроме того, исследование решений систем линейных уравнений и неравенств. Ясно, что основным инструментом исследования являются теория множеств, математическая логика и методы, собственно, самой алгебры, не говоря об арифметике [3, 7].

Результаты, полученные в линейной алгебре, востребованы в математических и естественных науках, математической экономике, из прикладных отметим компьютерные науки: параллельное программирование, теорию вычислительных систем и суперкомпьютеров. Последнее связано с тем, что для повышения эффективности работы программного обеспечения высокопроизводительных вычислительных средств должен быть обеспечен массовый параллелизм, подобно человеческому мозгу, состоящему $\approx$ из 10^{12} нейронов, внутренняя логика которого обладает, практически предельными возможностями для параллелизма. Существует направление в науке – теория нейронных систем [12] и сетей, с компонентами из искусственных нейронов. Методы линейной алгебры в них являются основными при проверке эффективности работы параллельных программ.

§2. Множества

Множество – фундаментальное понятие математики, используемое почти во всех ее разделах. Каждый, имеющий отношение к науке, будь то математик, инженер или философ, в своих исследованиях всегда приходит к обобщениям, т.е. рассматривает некоторую совокупность объектов как целое. Известное определение одного из основателей теории множеств Г. Кантора: «Под множеством понимается объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или мыслью», - первоначально не вызвало возражений. Со временем, когда идеи Кантора стали проникать в умы исследователей, появились противоречия (антиномии) и определение Кантора перешло в разряд поясняющих понятий. Иначе и быть не могло, поскольку множество есть понятие исходное, на котором конструируются остальные понятия современной математики и, следовательно, пока неопределяемое.

Будем придерживаться мнения, что множество – совокупность объектов, объединенных общим ***признаком***, свойством. Объекты множества называются его элементами. Описание элементов, есть описание множества и наоборот. Если число элементов множества ограничено, то оно называется конечным, иначе - бесконечным. Если число элементов множества мало, то его описание, обычно, трудностей не вызывает (достаточно перечислить его элементы). Если число элементов велико или бесконечно, то указывают характеристическое свойство, связывающее элементы множества, например, $P(x)$ - читается: «любой элемент x множества обладает свойством P». (Ранее, при обсуждении понятия универсальной алгебры, характеристическим свойством множеств объявлялась алгебраическая операция или система ее аксиом). Свойство P не должно быть противоречивым или слишком длинным (чтобы мысль не терялась). По этой причине считается неэтичным употреблять выражение: «множество всех множеств», поскольку оно еще не построено, к тому же это дополнительный источник антиномий, которых в теории множеств накопилось немало [10]. В связи со сказанным, основания теории множеств будем излагать, используя аксиоматический подход. Конечно, аксиомы тоже основаны на интуитивном представлении о множествах, но благодаря такому подходу не будет возникать необходимости привлекать интуитивное представление, при выявлении тех или иных свойств множеств, следующих из систем аксиом.

При изучении свойств множеств, часто возникает необходимость группировать элементы множеств по признакам. Если все элементы множества распределены по группам и нет элемента, который мог бы находиться в двух группах, то множество разбито на ***непересекающиеся группы*** или ***классы***.

Оказывается, что не всегда множество можно разбить на классы, хотя способов достаточно много. Пусть мы пожелали получить, на некотором числовом множестве, разбиение чисел по признаку: любые два числа *a, b* принадлежат одному классу, когда $b > a$. Такого разбиения быть не может [3], ведь по условию никакое число не может попасть в один класс с самим собой, поскольку получается, что должно быть $a > a$, а это невозможно (сравни с $b \geq a$). Поэтому, для того, чтобы разбиение на классы было осуществимо, должны быть выработаны условия осуществимости. В алгебре этому посвящен раздел, изучающий ***отношения*** – одна из форм взаимосвязи объектов исследования. Под отношениями понимаются, например: «…больше чем…», «…следует…», отношение порядка, эквивалентности, функциональное отношение, однозначное и взаимнооднозначное соответствие и др.

Пусть задан признак: «элемент *a* связан с элементом *b* отношением эквивалентности», - тогда будем говорить, что *a* эквивалентно *b* и писать: $a \sim b$.

Определение. ***Отношением эквивалентности*** для элементов *a, b, c*, … множества, называется признак, удовлетворяющий условиям:

1) рефлексивности, т.е. $a \sim a$;

2) симметричности, т.е. если $a \sim b$, то $b \sim a$;

3) транзитивности, т.е. если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.

Понятия родственные эквивалентности – равенство, тождество. Легко проверить выполнение этих условий для классов.

§3. Строение множеств

Исходными символами в теории множеств являются

а) знаки: «=» - равенство, «∈» - принадлежность, «⊂» - включение;

б) вспомогательные знаки: «}», «{» - правая и левая фигурные скобки, случат для выделения описания множеств, «)», «(» - скобки, для однозначного восприятия построенных формул; разделительные знаки: «$\rightarrow$» - читается «следует» и «,» - запятая;

в) буквы, число которых бесконечно (не путать с описанием множеств), возможны индексы для обозначения множеств: *A, B, C*, ..., A_1, B_i, C_{ij}, ..., для обозначения элементов множеств: *a, b, c*, ..., a_1, b_i, c_{ij}, ...

г) логические знаки: «&» - читается «и», «$\vee$» - читается «или»;

д) кванторы (лат. quantor - сколько) – количественная характеристика внутренней связи множества и его элементов - общности «$\forall$» читается «для всех», и существования «$\exists$» читается «существует».

Принадлежность элемента *a* множеству *A* записывается «$a \in A$», читается «элемент *a* принадлежит множеству *A*», а принадлежность множества *B* множеству *A* записывается «$B \subset A$», читается «множество *B* включено во множество *A*». Если каждый элемент множества *A* является элементом множества *B*, и обратно, то пишут «$A = B$», то есть, множества совпадают (***изоморфны***). Если каждый элемент множества *B* находится в *A* и в *A* есть хотя бы один элемент, не принадлежащий *B*, то *B* есть собственное подмножество *A*, пишут «$B \subset A$», если таких элементов может не быть, то – «$B \subseteq A$».

Если множество *A* состоит из элементов *a, b, c*, то есть конечное, то пишут $A = \{a, b, c\}$. Если множество *A* бесконечное, то пишут $A = \{x / P(x)\}$, читается «множество элементов *x* обладает свойством *P*». Например, запись $\{x / x^2 + 3x - 4 = 0\}$ описывает множество действительных корней уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$; очевидно, это множество состоит из двух элементов {-4, 1}.

Пусть $\{x / ax^3 + bx + c = 0, a, b, c \in R\}$, где *R* – множество действительных чисел. Это множество может быть интерпретировано, и как множество, состоящее из трех элементов, являющихся корнями уравнения, и как множество, у которого хотя бы один из них есть действительное число, в то время как, два других корня могут быть комплексными числами.

Поскольку при таком описании, мы не можем точно сказать, является ли произвольно выбранное число элементом множества, то это означает, что его характеристическое свойство неопределенно. Следует данное множество определить, например, так: дано множество, состоящее из одного элемента, являющегося единственным действительным корнем уравнения $ax^3+bx+c=0$. Заметим, что условие $a,b,c\in R$ не является необходимым.

Может оказаться, что во множестве, заданном характеристическим свойством, не содержится ни одного элемента. Такое множество называется пустым и обозначается символом «$\varnothing$». Например, $\{x/x^2+1=0\}=\varnothing$, если решение уравнения рассматривать в области действительных чисел, и состоит из двух элементов $\{-i,i\}$, если решать уравнение в области комплексных чисел, где $i=\sqrt{-1}$. Таким образом, пустое множество $\varnothing$ можно определить как множество, ***не имеющее ни одного элемента***.

Кстати, уже можно сформулировать аксиому: «существует хотя бы одно множество». Кажется, что пустое множество не несет никакой конструктивной информации. На самом деле это не так. Его введение позволило получить, например, фундаментальные результаты, как в самой алгебре, так и в других теориях, например, теории вероятностей [8, 12].

Пусть M – множество и множество $B\subset M$, говорят, что B подмножество M. Пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing\subset B\subset M$.

Множество, элементами которого являются другие множества, называется ***системой множеств***.

Из любого множества можно построить систему множеств, например:

а) дано $\varnothing$, тогда $\{\varnothing\}$ есть система множеств, состоящая из одного элемента $\varnothing$, а $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ - множество, состоящее из двух элементов: $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$, т.е. пустое множество и множество, состоящее из одного элемента – пустое множество, и т.д.;

б) дано множество *M*, тогда $\{\varnothing, M\}$ - система множеств, состоящая из двух элементов $\varnothing$ и *M*;

в) дано множество $\{a,b,c\}$, состоящее из трех элементов. Все его возможные подмножества: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$, число которых равно $2^n = 2^3 = 8$.

Обозначим через $F(A)$ систему множеств, состоящую из всех подмножеств множества *A*. Говорят, что $F(A)$ порождена множеством *A*.

Множества типа $F(A)$ относятся к классу универсальных. В теориях и приложениях важными являются бесконечные универсальные множества (пространства). В таких множествах можно выполнять действия с целью получения других множеств. Выполнения этих действий в универсальных множествах, аналогичных алгебраическим операциям в универсальных алгебрах, приводит к результату, который определяется как подмножество исходного множества. Эти операции называются ***теоретико-множественными***.

К ним относятся операции: ***объединение*** «$\bigcup$», ***пересечение*** «$\bigcap$», ***разность*** «–», в универсальных множествах рассматривается операция ***дополнение*** (отрицание) «$\neg$».

Эти операции сильно напоминают алгебраические, что находит подтверждение и в аксиомах теории множеств [6], основанных, в общем-то, на здравом смысле.

1. Аксиома **объемности**. Если множества *A* и *B* составлены из одних и тех же элементов, то они равны, т.е.

$$\forall((a \in A) \sim (a \in B)) \to A = B.$$

2. Аксиома **суммы**. Для произвольных множеств *A* и *B* существует множество $A \bigcup B$ (сумма *A* и *B*), элементами которого являются все элементы множества *A* и все элементы множества *B*, и никаких других элементов не содержит, т.е. $\forall(x \in A \bigcup B) \sim ((x \in A) \vee (x \in B))$.

3. Аксиома **умножения**. Для произвольных множеств A и B существует множество $A \bigcap B$ (произведение множеств A и B), состоящее из тех, и только тех элементов, которые содержатся и в A, и в B, т.е. $\forall(\, x \in A \bigcap B\,) \sim (\,(x \in A) \wedge (x \in B)\,)$.

4. Аксиома **разности**. Для произвольных множеств A и B существует множество $A - B$ (разность множеств A и B), элементами которого являются те, и только те элементы A, которые не содержатся в B, т.е. $\forall(\, x \in A - B\,) \sim \neg(\,(x \in A) \vee (x \in B)\,) \sim (x \in A) \wedge (x \notin B)$.

5. Аксиома **существования**. Существует, по крайней мере, одно множество.

Данная система аксиом непротиворечива и неполна.

Аксиомы не являются независимыми. Например, аксиома умножения выводится из аксиомы разности, т.к. $A \bigcap B = A - (A - B)$ $A \bigcap B = A - (A - B)$.

Из аксиом 1 и 2 следует единственность $A \bigcap B$, аналогично, получаем единственность $A - B$.

Из аксиом 1, 4 и5 следует, что существует единственное множество $A - A = \varnothing$ - не содержащее элементов, т.е. пустое множество.

Отношение включения «$\subset$», можно определить формулой $(\, A \subset B\,) \sim (\, A \bigcap B = B\,)$.

Аксиомы 1–5 позволяют получать новые множества, изучать их свойства и т.д.

Алгебра множеств

Пусть F – система множеств. Если для любых $A, B \subset F$ выполняется операции

1) $A \bigcup B \subset F$,

2) $A \bigcap B \subset F$,

3) $\neg\, A \subset F$,

то говорят, что в F задана алгебра множеств, а если выполняется операция

4) $A - B \subset F$, $B - A \subset F$,

то говорят, что в F задано поле множеств.

Аксиомы не являются независимыми, поскольку, например, $A - B = \neg B \bigcap A$.

Применяя алгебраическую терминологию, можно сказать, что алгебра множеств, есть коммутативное кольцо с единицей.

В теории вероятностей алгебра множеств составляет часть ее аксиоматического построения [8].

§4. Число

Развитие

Число – одно из основных понятий математики. Число выражает результат измерения или счета. Для изображения чисел используют различные специальные знаки, называемые цифрами. В древней Руси, культура которой была тесно связана с греческой, числа, как и у греков, записывались буквами. Поступали просто: над буквой ставили специальный знак «~», называемый титло. Числа 1,2,3, … обозначались буквами $\widetilde{A}$, $\widetilde{\text{Б}}$, $\widetilde{\text{В}}$, … . Большие числа записывались также буквами , но впереди ставили знак «≠», например, 1000 записывалась как $\neq \widetilde{A}$, 3000 - $\neq \widetilde{\text{В}}$, а число 10000 как $\textcircled{A}$ и называлось оно «тьма» (отсюда выражение «тьма народу»). Число 100000 называлось легион, известно обозначение числа 10^{49}, которое называлось «колода».

В России уже в XVII в. во всех математических рукописях встречается только позиционная (упорядоченная) десятичная система счисления, которая состоит из десяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Впервые появилась в Индии и через арабов попала в Россию, отсюда и название – арабские цифры. Из этих цифр можно построить любое, сколь угодно большое, но конечное натуральное число.

Постепенно складывалось представление о бесконечности натуральных чисел.

Наряду с натуральными числами применялись дроби – числа, составленные из целого числа долей единицы. Множества натуральных чисел и дробей было достаточно, чтобы выразить результат любого измерения. Долгое время считалось, что измерения всегда выражаются либо целыми натуральными числами, либо их отношениями (число 0 (нуль) еще не было известно, но и после его появления во множество натуральных чисел он так и не попал из-за конструктивных причин построения чисел).

Древнегреческие ученые могли выполнять все арифметические действия, включая возведения в степень, извлечение корня, имели понятие об аналоге нуля, но этого было недостаточно, чтобы все операции объединить в единую систему, поскольку не существовало еще идеи числа. Поэтому сильнейшим шоком для всех оказалось открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Оказалось, что натуральных чисел вместе с дробями недостаточно, чтобы решить эту проблему, когда выяснилось, что диагональ квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$. Такие числа они назвали иррациональными, то есть недоступные разуму.

Возможно, что отсюда началась эпоха теоретической математики, поскольку иррациональные числа, в десятичной системе счисления представимы бесконечной непериодической дробью, то из опыта ни какими измерениями их получить никогда не будет возможным.

Математика разделилась на две части: арифметику – науку о числах и геометрию – науку об объектах, их формах и величинах: длине, площади, объеме.

С развитием алгебры, то есть с появлением уравнений, для их решения, уже в первой степени, потребовались отрицательные числа и 0.

Числа, целые и дробные (положительные и отрицательные) и 0, стали называть рациональными.

Изучение понятия числа осуществлялось не только путем обобщения (были сначала открыты комплексные числа, а затем осуществлено формальное построение теории действительных чисел), но и путем выделения важных частных случаев. Во множестве действительных чисел выделены множества рациональных и иррациональных чисел. Рациональные числа всегда представимы в виде десятичных дробей, в которых, начиная с некоторого места, числа повторяются (имеют период), а иррациональные периода не имеют, то есть их задают бесконечной десятичной непериодической дробью.

В XIV в., в связи с изучением кубических уравнений, в процессе вывода формулы для вычисления их корней (решений), появлялись арифметические корни из отрицательного числа, хотя конечная формула их не содержала, давая действительный корень уравнения. В связи с этим Ж. Кардано (G. Cardano) в 1545 г предложил ввести новые числа и назвать их чисто отрицательными, считая, что $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a$, но сам Кардано считал их бесполезными. В XVII в. крупнейший математик века Л. Эйлер (L. Euler, 1707 - 1783) предложил обозначение $\sqrt{-1}=i$ и называть его мнимой единицей, а с 1831 г благодаря К. Гауссу (1777 - 1855), появилась привычная алгебраическая запись комплексного числа: $a+i\cdot b$, $a,b\in R$.

Обсуждение комплексного числа длилось более двух столетий и на рубеже XVII – XVIII в.в. была построена общая теория корней *n*-ой степени из комплексного числа А. Муавром (1667 - 1754) в 1707 г.

В конце XVIII в. была получена геометрическая интерпретация комплексного числа как точки на плоскости, что в дальнейшем позволило рассматривать его как вектор, заданный на плоскости.

Появилась также, тригонометрическая и показательная запись комплексного числа. Почти сразу возникла потребность в приложениях, чаще там, где использовались векторные величины.

В линейной алгебре комплексные поля являются основными объектами в линейных пространствах.

§5. Числовые множества

Во многих вопросах математики важно уметь сравнивать различные математические объекты, в частности, множества. В дальнейшем среди числовых множеств будем рассматривать бесконечные, начиная с множества натуральных чисел.

Кантор предложил множества, состоящие из конечного числа элементов, сравнивать числом элементов, в них содержащихся, а бесконечные множества по их свойствам. Для этого он ввел понятие ***кардинального числа***, как свойства множества, которое остается после отвлечения от качественных свойств его элементов и от их порядка. Это свойство он назвал ***мощностью*** множества. Два множества A и B считаются равномощными, если после попарного сравнения их элементов, свободных элементов без пары не осталось. Множество, у которого остались элементы без пары, имеет большую мощность. На языке математики это формулируется следующим образом: если существует такая функция f, что между элементами двух множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие, то есть для любого $x \in A$ существует единственное $y \in B$, что $y = f(x)$, где A область определения, а B – область значений функции f, то множества равномощны.

Если множество A конечно, то его кардинальное число есть некоторое натуральное число. Другие множества бесконечные, в частности, объявлено, что множество натуральных чисел бесконечно. Конечные множества и множество натуральных чисел называются ***счетными***. Характеристическим свойством бесконечного множества является свойство быть равномощным со своим подмножеством. Для множества натуральных чисел само N и его подмножество $\{2n\}$ (множество четных чисел), равномощны. В самом деле, зададим однозначную функцию f, отображающую N на N, то есть рассмотрим пары вида $(n, 2n)$, $n \in N$; однозначность очевидна.

Множество рациональных чисел Q также счетно, а множества действительных чисел R и комплексных чисел C имеют мощность большую, чем счетное, которое называется *континуум*.

Если A множество, а 2^A - множество всех подмножеств множества A, то 2^A имеет мощность большую, чем множество A (теорема Кантора) [6].

Таким образом, существуют множества, имеющие мощность большую, чем континуум, но их никто пока не построил. Не ясно также, существуют ли множества, имеющие мощность большую, чем счетное, и меньшую, чем континуум.

Далее будет полезно раскрыть понятие бесконечности в математике и описать свойства основных числовых бесконечных множеств более подробно.

Бесконечные множества

Бесконечность обычно понимается как нечто, не имеющее границы, то есть как альтернатива конечному. В математике основной интерес к бесконечности проявляется в связи с вопросом о природе бесконечных множеств как математических объектов, то есть объектов, которые можно сравнивать количественно. Но как можно сравнивать два множества, состоящие из бесконечного числа элементов каждое? При выполнении каких условий они становятся математическими объектами?

В математике установилось два понятия бесконечности – потенциальная и актуальная.

Потенциальная бесконечность обосновывает построение и существование последовательности, рядов неограниченных геометрических форм (прямая, плоскость, пространство). В сущности, потенциальная бесконечность обосновывает принцип индукции (то есть переход от натурального числа n к числу $n+1$), как аксиому. Ее основной недостаток в том, что она не в состоянии определить количественные отношения между «бесконечными» объектами.

Актуальная бесконечность рассматривает «бесконечные» объекты, как завершенные, отвлекаясь от построения и свойств элементов объекта. Например, в аксиоматическом построении множества натуральных чисел потенциальная бесконечность объявляет потенциально существующим любое сколь угодно большое натуральное число, то есть, имеем натуральный ряд, 1, 2, …, n, …. Объявляя натуральный ряд существующим, актуальная бесконечность создает математический объект – множество натуральных чисел $N=\{1,2,3,\ldots\}$.

Рассматривая направленную геометрическую прямую, как множество вещественных чисел, потенциальная бесконечность объявляет любую ее точку как потенциально существующее число, а добавление к прямой чисел «$-\infty$» и «$+\infty$» со своими правилами действий актуальная бесконечность позволяет считать такую прямую замкнутой и рассматривать ее как существующий математический объект.

Потенциальная и актуальная бесконечность взаимосвязаны и дополняют друг друга, однако до сих пор проблема единства бесконечности в математике окончательно не решена.

Натуральный ряд

Так называют бесконечное множество $N = \{1,2,3,\ldots\}$ натуральных чисел, снабженных естественным порядком, то есть, помимо количественной характеристики предмета, они характеризуют и порядок расположенных элементов в ряд. Отсюда и название – натуральный ряд.

Множество *N*, первое из бесконечных, имеет кардинальное число $cardN = æ_0$ (читается алеф-ноль). Обоснование натурального ряда как множества натуральных чисел, с характеристическим свойством, представленном в виде аксиом, принадлежит Дж. Пеано (1889) [11].

Аксиома 1. 1 (единица) есть натуральное число, то есть $1 \in N$.

Аксиома 2. Если $n \in N$, то $n+1 \in N$, то есть у любого натурального числа есть последующее.

Аксиома 3. Если $n \neq 1$, то $n-1 \in N$, то есть единице не предшествует никакое число.

Аксиома 4. Если $n+1 = m+1$, то $n = m$, то есть каждое число либо не является последующим ни для какого числа, либо является последующим точно для одного числа.

Аксиома 5 (принцип индукции). Каждое множество натуральных чисел, которое содержит число 1 и, вместе с каждым содержащимся в нем числе *n* содержит последующее число $n+1$, содержит все натуральные числа.

Метод индукции. Чтобы доказать, что некоторым свойством *P* обладают все числа, доказывают сначала, что им обладает число 1, а затем в предположении, что свойством *P* обладает некоторое число n, доказывают, что этим свойством обладает число $n+1$. В силу аксиомы 5 множество чисел, обладающее свойством P, должно содержать множество N.

Пример I.3. Пусть $\{a_n\}$, $n \in N$, последовательность, где a_n - общий член последовательности. Пусть $\forall(n \in N)$, $\forall(d \in R) \Rightarrow$ ($a_{n+1} = a_n + d$). Такая последовательность называется арифметической прогрессией. Доказать, что общий член a_n вычисляется по формуле

$$\forall(n \in N) \Rightarrow (a_n = a_1 + d(n-1)). \qquad \text{(I.1)}$$

Доказательство. Применим метод индукции. При $n = 1$, по определению прогрессии, $a_1 = a_1 + d(1-1) = a_1$. Пусть при $n = k$, $a_k = a_1 + d(k-1)$. Докажем справедливость (1) для $n = k+1$. Имеем, по определению, $a_{k+1} = a_k + d$, тогда $a_{k+1} = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk$, что доказывает справедливость формулы (I.1) для любого $n \in N$ ▼.

Множество натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения, то есть $\forall(n, m \in N) \Rightarrow$ $(n+m \in N) \,\&\, (n \cdot m \in N)$, называемые суммой и произведением, соответственно.

Неравенства: $\forall a, b, c \in N$ имеет место одно и только одно из соотношений

1) $(a<b) \vee (a=b) \vee (a>b)$;
2) если $(a<b) \wedge (b<c)$, то $(a<c)$;
3) если $(a<b)$, то $(a+c)<(b+c)$;
4) если $(a<b)$, то $(a \cdot c)<(b \cdot c)$.

Множество целых чисел

Это бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел. Его кардинальное число $cardZ = cardN =$ æ$_0$, где

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Для доказательства, равномощности заметим, что для установления взаимной однозначности достаточно рассмотреть классы пар: $(1,0)$, $(2n,n)$ и $(2n-1,-n)$, где $\forall(a,b)$, $a\in N$, $b\in Z$.

Множество Z замкнуто относительно операций сложения, умножения и вычитания. Образует коммутативное кольцо.

Неравенства: свойства 1) – 3) сохраняются. Учитывая знак, имеем для

4) если $(c>0)$ и $(a<b)$, то $(a\cdot c)<(b\cdot c)$,

если $(c<0)$ и $(a<b)$, то $(a\cdot c)>(b\cdot c)$.

Множество натуральных чисел является собственным подмножеством множества целых чисел, то есть $N\subset Z$.

Множество рациональных чисел

Бесконечное множество Q равномощное множеству натуральных чисел $cardQ = æ_0$ и

$$Q=\left\{q/\,q=\frac{m}{n}, m\in Z, n\in N\right\},$$

называется множеством рациональных чисел.

Рациональное число вводится как отношение целого к натуральному числу. Рациональное число $q=\dfrac{m}{n}$ определено не однозначно, поскольку числитель и знаменатель дроби можно домножить на одно и тоже, не равное нулю число r, то есть $q=\dfrac{m}{n}=\dfrac{r\cdot m}{r\cdot n}$, $r\in Z$, $r\neq 0$. Если в знаменателе рационального числа стоит 1, то получаем целое число, то есть $Z\subset Q$.

Совокупность рациональных чисел упорядочена в отношении порядка «больше», «меньше» (см. неравенства в Z). Обладает свойством плотности, то есть $\forall\, p,q\in Q$, между p и q можно расположить бесконечно много рациональных чисел. Это дает возможность не только оценивать предметы количественно, но и проводить измерения с любой точностью, например, отрезка прямой. Однако множество Q не обладает полнотой. Множество рациональных чисел, с точки зрения алгебры, есть коммутативное кольцо или поле.

Множество Q есть минимальное поле, в котором выполнимы алгебраические операции: $\forall\, a, b, c, d \in Q$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

1) сложение: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$;

2) умножение: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

3) вычитание: $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$;

4) деление: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $c \neq 0$.

Введено понятие степени числа и извлечение корня. $\forall\, a, b \in Q$ и $m, n \in N$

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$;

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$;

6) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$;

в частности, если $a \neq 0$

7) $a^0 = 1$;

8) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Действие с корнями

1) $\sqrt[m]{a} = a^{1/m}$; $\sqrt{a} = a^{1/2}$, $a \geq 0$;

2) $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$;

3) $\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$;

4) $\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, $b \neq 0$;

5) $(\sqrt[m]{a})^n = (a^{1/m})^n = a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$;

6) $\sqrt[m/n]{a} = a^{n/m}$.

Для упрощения вычислений, то есть сведе́ния умножения и деления к сложению и вычитанию, введено понятие логарифма.

Определение. Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание, чтобы получить число b.

При $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a b = x$, где $b = a^x$, $b > 0$.

Свойства.

Пусть $a, b, c, d > 0$, $a \neq 1$, $d \neq 1$

1) из определения, $a^{\log_a b} = b$;

2) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;

3) $\log_a (b / c) = \log_a b - \log_a c$;

4) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$, $m \in Q$;

5) $\log_{a^m} b^m = \dfrac{1}{m} \cdot \log_a b^m = \log_a b$, $m \in Q - \{0\}$;

6) $\log_a b = \dfrac{\log_d b}{\log_d a}$, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $b \neq 1$;

7) $\log_a a = 1$;

8) $\log_a 1 = 0$.

Во множестве Q впервые введено понятие последовательности и ее предела. Геометрическая интерпретация рационального числа – точка на числовой прямой. Расстояние между двумя числами p и q определяется как $|p - q|$.

Несмотря на то, что рациональные числа плотно расположены на числовой прямой, их оказалось недостаточно для изучения ***непрерывно*** изменяющихся величин. Решение проблемы заключалось в заполнении пустоты, то есть во введении множества иррациональных чисел, которые добавлены к рациональным до непрерывности.

Множество действительных чисел

Множество действительных чисел R линейно упорядочено, образует поле по отношению к арифметическим операциям, включает в себя множество рациональных чисел Q. Важным свойством действительных чисел является свойство непрерывности, понятие, основанное на признаке близости соседних элементов. Во множестве R получила развитие теория пределов, непрерывных функций, что привело к созданию дифференциального и интегрального исчисления. Множество R имеет кардинальное число $cardR = c \sim 2^{æ_0}$ - мощность континуума.

Из школьной математики известно, что десятичные дроби бывают конечные и бесконечные. Бесконечные дроби разделяют на периодические и непериодические. Любые рациональные числа, включая целые, представимы в виде периодической десятичной дроби. Существуют ли числа, представимые непериодическими десятичными дробями, то есть числа, не являющиеся рациональными? Это тем более важно, что в области рациональных чисел не определено решение уравнений, например, $x = \log_2 3$ или $x^n = 2$, $n \geq 2$. Такие числа существуют, и они не только представимы десятичной непериодической дробью, но и являются, по этой причине, решениями уравнений отмеченного класса. Эти числа назвали иррациональными (irrationalis – не доступные разуму, не существующие), и в совокупности с рациональными они образуют множество действительных чисел R, существенно расширяющих понятие числа.

Покажем, что на координатной (числовой) прямой можно поместить все действительные числа, и других, более широкого множества чисел, там быть не может [3].

В самом деле, пусть имеем числовую прямую, то есть геометрическую прямую, на которой заданы начало, масштаб и направление. Сечением прямой в любой ее точке (числе) p назовем ее представление в виде двух интервалов вида: 1) $(-\infty, p) \bigcup [p, +\infty)$; 2) $(-\infty, p] \bigcup (p, +\infty)$, где $p \in Q$. Воспользуемся одним из свойств, определяющих рациональное число: для любых $p,q \in Q$, $p<q$, всегда содержится бесконечное число не равных рациональных чисел. Отсюда следует, что есть еще один вариант сечения числовой прямой: 3) $(-\infty, p) \bigcup (p,+\infty)$, то есть существует нерациональное число, через которое проходит сечение. Таких чисел, очевидно, много больше, чем рациональных чисел. Объединяя их в одно множество, получим, что любое сечение числовой прямой проходит через действительное число, то есть, имеем деление на два класса чисел, и других чисел нет. Именно поэтому числовую прямую называют множеством действительных (***вещественных***) чисел.

Построением теории действительных чисел занимались Г. Кантор, Дедекинд (J.W.R. Dedekind, 1831-1916) и К. Вейерштрасс (K.T.W. Weierstras, 1815-1897). Рассмотренные здесь сечения называются сечениями Дедекинда.

Итак, множество действительных чисел R состоит из множества рациональных чисел Q и множества чисел, дополняющих рациональные числа до непрерывности, то есть иррациональных, обозначаемое как $R-Q$ или $Q \bigcup (R-Q) = R$.

В дальнейшем выяснилось, что действительные числа удобно разделить на два класса: ***алгебраические*** числа и все остальные, которые назвали ***трансцендентными***.

Алгебраические – это числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений n-ой степени вида $a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n = b$, где $a_i, b \in Z$, $i = 0,1,\ldots,n$. Если $a_0 = 1$, то корень уравнения, если он существует, называется целым алгебраическим числом (например, уравнение $x^3 - 10 = 0$ имеет корнем целое алгебраическое число $\sqrt[3]{10}$, а уравнение $27x^3 - 10 = 0$ имеет корнем просто алгебраическое число $\sqrt[3]{10}/3$).

Ясно, что каждое рациональное число $\dfrac{a}{b}$ - алгебраическое, так как является решением уравнения $ax - b = 0$.

Примерами трансцендентных чисел являются, например, число $\pi = 3{,}14159\ldots$, число $e = 2{,}71828\ldots$, число $2^{\sqrt{2}}$. Хотя трансцендентных чисел очень много, проверить на иррациональность заданное число очень трудно. Существуют числа, трансцендентность которых еще не выяснена.

Множество комплексных чисел

В XVI в., в связи с изучением кубических уравнений при выводе формулы для нахождения их корней, появлялись корни арифметические из отрицательного числа, хотя конечный результат давал действительный корень уравнения.

Своим введением в математику комплексные числа обязаны желанием извлечения корней четной степени из любого действительного числа, и отрицательного в том числе.

Самого по себе желания, конечно, недостаточно, тем более, что в то время потребности, практически всегда, вполне удовлетворялись вещественными числами. Уже отмечалось, что, если решать уравнения традиционными методами, то в процессе преобразования до результата встречался квадратный корень из отрицательного числа (например, в формуле Кардано), хотя конечный результат был числом действительным. Поэтому, корни из отрицательных чисел использовались без объяснения причин, а получаемые промежуточные числа называли мнимыми.

В конце 18-го века Ф. Гаусс (1777-1855) ввел комплексные числа, дал им геометрическую интерпретацию и доказал (1799) в частном случае основную теорему алгебры, о том, что каждый многочлен с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный или комплексный корень.

Будем считать, что известны множество вещественных чисел и правила действий над ними. Рассмотри уравнение $x^2+1=0$. Применяя к нему обычные правила нахождения корней, получим $x^2=-1$. Допуская, что решение этого уравнения существует и $x=i$, мы приходим к тому, что $i^2=-1$. В области действительных чисел такого числа нет. Тогда, объявляя i новым числом, мы присоединяем его к множеству действительных чисел. Предполагая выполнение для этого числа операций сложения и умножения, мы будем иметь для любых $a,b\in R$ числа $a+i$, $b\cdot i$, $a+i\cdot b$, хотя $a+i$ - частный случай $a+i\cdot b$ при $b=1$. Тем самым, мы получили новые числа $z=a+i\cdot b$, где $a,b\in R$. Выражение $z=a+i\cdot b$ называется ***алгебраической формой записи*** комплексного числа z. Отсюда следует, что множество действительных чисел есть подмножество нового числового множества – комплексных чисел. Таким образом, множество комплексных чисел

$$C=\{z\,/\,z=a+i\cdot b,\;\; a,b\in R\},\; i^2=-1.$$

Оправдалось предположение Дж. Кардано: с мнимыми числами можно действовать по правилам обычной алгебры, то есть писать, при $a\geq 0$, $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a$. Пусть комплексное число $z=a+i\cdot b$, тогда $\operatorname{Re} z=a$, а $\operatorname{Im} z=b$, где Re сокращение от Real (действительный), а Im – от Imaginares (мнимый). Говорят, $\operatorname{Re} z$ - действительная часть, $\operatorname{Im} z$ - мнимая часть комплексного числа z. Эти обозначения введены для удобства работы с комплексными числами [3, 7].

Отталкиваясь от алгебраической формы записи комплексного числа, определим поле комплексных чисел. Пусть даны два комплексных числа $z_1=a_1+i\cdot b_1$, $z_2=a_2+i\cdot b_2$, $a_j,b_j\in R$, $j=1,2$, тогда

1) $z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2,\; b_1=b_2$;

2) $z_1+z_2=(a_1+i\cdot b_1)+(a_2+i\cdot b_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$;

3) $z_1\cdot z_2=(a_1+i\cdot b_1)(a_2+i\cdot b_2)=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+$
$+i\cdot(b_1\cdot a_2+a_1\cdot b_2)$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\dfrac{(a_1+i\cdot b_1)(a_2-i\cdot b_2)}{(a_2+i\cdot b_2)(a_2-i\cdot b_2)}=$

$$=\frac{(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)+i\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2}{a_2^2+b_2^2}+$$

$$+i\cdot\frac{b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Число $\overline{z}=a-i\cdot b$ называется комплексно сопряженным числу $z=a+i\cdot b$, при этом $z\cdot\overline{z}=\overline{z}\cdot z=a^2+b^2$.

Модулем комплексного числа $z = a + i \cdot b$ называется действительное число $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\forall\, z_k, x_k \in C$, $k \in N$, имеет место:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (неравенство треугольника);

3) $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot x_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ (неравенство Коши-Буняковского).

Геометрически комплексное число *z* представимо точкой *A* на плоскости с заданной декартовой системой координат. Ось *Ox* называется действительной осью, а ось *Oy* – мнимой, тогда для $z = a + i \cdot b$ ставится в соответствие точка $A = (a, b)$ или вектор $\overline{OA} = (a, b)$, $|z| = r = |\overline{OA}|$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. I.1).

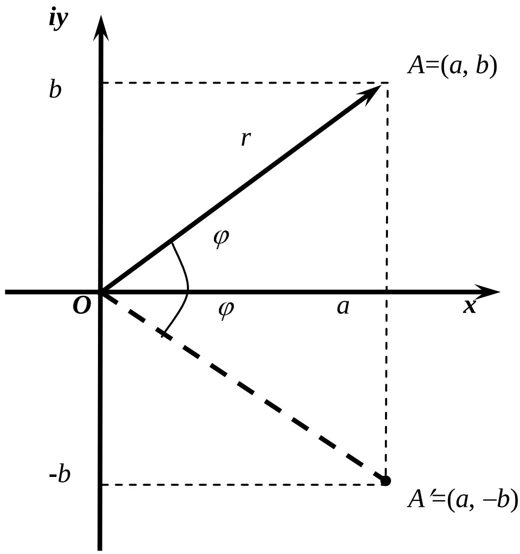


Рис. I.1

Из рис. I.1 следует, что $a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$. Угол φ называется аргументов $Argz$ комплексного числа $z = a + i \cdot b$.

Значение аргумента, удовлетворяющего условию $-\pi < \varphi \le \pi$, называется главным значением аргумента комплексного числа z и обозначается $\arg z$, тогда $Argz = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$.

Выражение $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, где $\varphi = \arg z$, называется ***тригонометрической формой записи*** комплексного числа $z = a + i \cdot b$.

Учитывая формулу Эйлера [3, 5]: $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\cdot\varphi}$, получаем, что $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$ - ***показательная форма записи*** комплексного числа; заметим, что $|e^{i\cdot\varphi}| = 1$ и $e^{i\cdot\varphi} = e^{i\cdot\varphi + 2\pi k}$, $k \in Z$.

Таким образом, комплексное число имеет три формы записи: алгебраическую, тригонометрическую и показательную.

Возведение комплексного числа в целую степень *n* легко осуществить по формуле Муавра [3, 5]:

$$z^n = (r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) = r^n \cdot e^{in\varphi}.$$

В частности, при $z = i$ имеем $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ и т.д.

Эта же формула справедлива и для отрицательного показателя степени: учитывая, что $z^{-n} = 1/z^n$, получим

$$z^{-n} = r^{-n} \cdot e^{-in\varphi} = r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i \cdot \sin(-n\varphi)) =$$
$$= r^{-n} \cdot (\cos n\varphi - i \cdot \sin n\varphi).$$

Например,

$$i^{-3} = (1/i)^3 = (-i/(-i \cdot i))^3 = (-i)^3 = \left(\cos(-\pi/2) + i \cdot \sin(-\pi/2)\right)^3 =$$
$$= \left(\cos(-3\pi/2) + i \cdot \sin(-3\pi/2)\right) = i.$$

Для извлечения корня из комплексного числа воспользуемся формулой:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \; n \in N.$$

Пример I.4. Найти $z = \sqrt[4]{1}$.

***Решение*.** Модуль комплексного числа z равен $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$,

$\sqrt[4]{r} = \sqrt[4]{1} = 1$. Поскольку $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, тогда $\varphi = \arg z = 0$. Применим формулу

$$z_k = \sqrt[4]{1} = \left(\cos\frac{2\pi k}{4} + i\cdot\sin\frac{2\pi k}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi k}{2}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, 3,$$

и получим

1) $k = 0$, $z_0 = \cos 0 + i\cdot\sin 0 = 1$;

2) $k = 1$, $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2} = i$;

3) $k = 2$, $z_0 = \cos\pi + i\cdot\sin\pi = -1$;

4) $k = 3$, $z_0 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

При других значениях k корни повторятся (см рис. I.1)

Дальнейшие обобщения числа ни к чему принципиально новому не привели. В конце 19-го века выяснилось, что для выхода за пределы множества комплексных чисел следует отказаться от каких-либо обычных свойств числа, конечно, если это будет возможным.

Девятнадцатый век и начало двадцатого оказались очень плодотворными для математики. Произошло ее аксиоматическое построение на теоретико-множественной основе. К тому времени появилось достаточно много математических теорий, и все они, как было замечено, изучали ту или иную алгебраическую систему, как обобщение числовой, то есть некоторое множество элементов с операциями умножения и сложения, не в смысле арифметических действий с конкретными элементами, а в смысле свойств (аксиом), которыми они определяются.

Суммы и произведения

Операции суммы и произведения относятся к основным алгебраическим операциям. Как правило, на практике приходится сталкиваться с многократными повторениями. Для удобства выполнений операций вводятся символы многократного повторения сложения – «∑» и умножения – «∏».

Пусть имеем конечное множество $M=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, тогда сумма его элементов записывается как $\sum_{i=1}^{n} a_i$, а произведение - $\prod_{i=1}^{n} a_i$, допускаются также обозначения $\sum_{i=1}^{n} a_i \sim \sum_{i}^{n} a_i \sim \sum_{i} a_n \sim \sum a_n$. Аналогичные вольности допускаются и при обозначении произведения элементов. Индекс i называется скользящей переменной, которая может быть заменена любой другой буквой.

Пусть $n=r\cdot k$, тогда при необходимости двойной индексации можно ввести двойное суммирование, например,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_{i+0\cdot k} + \sum_{i=1}^{k} a_{i+1\cdot k} + ... + \sum_{i=1}^{k} a_{i+(r-1)k} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\ .$$

Для двойной суммы выполняется аксиома коммутативности. В самом деле, имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} a_{ij} = \sum_{i=1}^{k} a_{i1} + \sum_{i=1}^{k} a_{i2} + ... + \sum_{i=1}^{k} a_{ir} = (a_{11}+...+a_{k1}) +$$

$$(a_{12}+...+a_{k2}) + ... + (a_{1r}+...+a_{kr}) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\ .$$

Аналогично можно записать и произведение $n=r\cdot k$ элементов с тем же свойством

$$\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{r} a_{ij} = \prod_{j=1}^{r}\prod_{i=1}^{k} a_{ij}\ .$$

Пример I.5. Раскрыть двойную сумму $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i}^{r} a_{ij}$.

Решение. Имеем $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=i}^{r} a_{ij}\right) = (a_{11}+a_{12}+...+a_{1r}) +$

$$+(a_{22}+a_{23}+...+a_{2r}) + ... + (a_{k-1r-1}+a_{k-1r}) + a_{kr}\ .$$

Приближенные вычисления

Множество действительных чисел R широко применяется в математике и ее приложениях. В инженерных расчетах обычно конечный результат представляют в виде десятичной дроби. Но не каждое действительное число может быть точно записано в таком виде. К ним относятся все рациональные с периодом и все иррациональные числа. Их приходится округлять, то есть записывать приближенно. Для того, чтобы иметь n точных знаков после запятой нужно вычислить не менее, чем $n+2$ знака (т.е. дополнительно 2 разряда) и округлить по известным правилам.

Следует иметь в виду, что если приходится суммировать очень много слагаемых, то накапливается ошибка. Пренебрежение правилами округления, а иногда и при округлении с любой точностью, можно получить принципиально неверный результат. Особенно актуальна проблема оценки ошибок вычисления при нахождении корней уравнений и решения систем уравнений. Например, система уравнений $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 2x+3y=10^{-10}, \end{cases}$ не имеет решений (система несовместна), а при округлении правой части второго уравнения $10^{-10} \approx 0$ система $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 2x+3y=0, \end{cases}$ имеет множество решений.

При нахождении корней уравнения $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$ любое округление в сторону уменьшения $\sqrt{2}$ приводит к отсутствию действительных корней.

II. Элементы линейной алгебры

§1. Матрицы и определители [3, 7]

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ элементов, представленная в виде таблицы, состоящей из m строк и n столбцов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – элемент матрицы *A*, стоящий на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, $m,n\in N$.

Матрица размера $1\times n$ или $m\times 1$ называется матрицей-строкой или матрицей-столбцом, соответственно (или вектором).

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, а число строк называется ее порядком или размером. Матрица *A* порядка *n* имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы квадратной матрицы размера *n*, стоящие на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами, то есть, a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}, образуют главную диагональ, а сумма элементов главной диагонали $a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ называется следом матрицы. Соответственно элементы a_{1n}, $a_{2\,n-1}$, …, a_{n1}, лежащие на прямой, соединяющей правый верхний и левый нижний углы матрицы, образуют побочную диагональ.

Мы будем рассматривать числовые и функциональные матрицы.

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называют нулевой.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю, называется единичной и обозначается

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица, у которой элементы расположенные ниже главной диагонали равны нулю, называется треугольной.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица A^{T} называется транспонированной к матрице A, если у нее каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером.

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

1. Сложение матриц.

Пусть матрицы A и B имеют одинаковый размер $m \times n$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица C размера $m \times n$ называется суммой матриц A и B, если

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},\ m,n\in N,$$

то есть, чтобы сложить матрицы одинакового размера, необходимо сложить их соответствующие элементы.

2. Умножение матрицы на число.

Чтобы умножить матрицу на число, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix},\ m,n\in N,\ \lambda-const.$$

3. Умножение матриц.

Произведением матрицы A размера $m\times n$ и матрицы B размера $n\times k$ называется матрица C размера $m\times k$, имеющая следующий вид:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,k$.

Замечание II.1. Отметим, что умножение матриц определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Замечание II.2. Из правила умножения матриц следует, что, вообще говоря, $A\cdot B\neq B\cdot A$, то есть умножение матриц не коммутативно.

Пример II.1. Заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти, если это имеет смысл, $A+B$, $A\cdot B$, B^{T}.

*Решение***.** Так как матрицы квадратные, то для них все эти операции выполняются. Определим сумму матриц A и B, для этого вычислим суммы соответствующих элементов:

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&1-1&3+2\\2-2&2+1&1+2\\3+1&2+0&1-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&5\\0&3&3\\4&2&0\end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot(-2)+3\cdot1&1\cdot(-1)+1\cdot1+3\cdot0&1\cdot2+1\cdot2+3\cdot(-1)\\2\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot1&2\cdot(-1)+2\cdot1+1\cdot0&2\cdot2+2\cdot2+1\cdot(-1)\\3\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot1&3\cdot(-1)+2\cdot1+1\cdot0&3\cdot2+2\cdot2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&7\\0&-1&9\end{pmatrix}.$$

Для транспонирования матрицы B, необходимо поменять местами соответствующие строки и столбцы:

$$B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

Упражнение. Выяснить, какие из предложенных операций примера 1.1 выполнимы, если размерность матрицы A - $m\times n$, а матрицы B - $n\times k$.

Определитель матрицы

Если числовая матрица квадратная, то ее можно оценить (определить), то есть, поставить в соответствие число.

Определение. Определителем Δ (или $\det A$) матрицы A порядка n называется многочлен элементов этой матрицы.

Для матрицы порядка n, определитель записывается в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если матрица числовая, то значение определителя есть число, которое находят по известным правилам.

Свойства определителей

1. Определитель матрицы не меняется при транспонировании матрицы.

$$\det A = \det A^{\mathrm{T}}.$$

2. Определитель матрицы равен нулю, если он содержит строку (столбец), все элементы которой равны нулю.

3. Определитель матрицы равен нулю, если элементы двух строк (столбцов) одинаковые.

4. Определитель матрицы равен нулю, если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны.

5. Определитель матрицы меняет свой знак на противоположный при перестановке местами любых двух строк (столбцов).

6. Если все элементы некоторой строки (столбца) имеют общий множитель, то он выносится за знак определителя как сомножитель.

7. Если к одной строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец) умноженную на число, то определитель не изменится.

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

Вычисление определителей

Определитель 2-го порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Пример II.2. Вычислить определители:

1). $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=4\cdot 6-(-2)\cdot 1=24+2=26$;

2). $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ \sqrt{b} & \sqrt{a}+\sqrt{b} \end{vmatrix}=\sqrt{a}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{b}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\left(\sqrt{a}\right)^2+$

$+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}+\left(\sqrt{b}\right)^2=a+b$;

3). $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}=\sin x\cdot\sin x-(-\cos x)\cdot\cos x=\sin^2 x+$

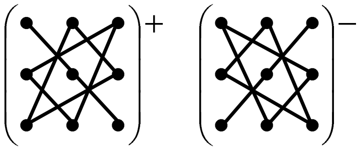
$+\cos^2 x=1.$

Определитель 3-го порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+$$

$$+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}). \qquad \text{(II.1)}$$

Для запоминания используется мнемоническое правило – ***правило треугольников***. Оно состоит в изображении (явном или мысленном) элементов матрицы точками. Точки, соответствующие произведениям, которые входят в формулу определителя, соединяются отрезками.



Главной диагонали и двум треугольникам, основания которых параллельны главной диагонали, соответствуют произведения со знаком “+”, а побочной диагонали и треугольникам, основания которых ей параллельны, соответствуют произведения со знаком “–”.

Определение. Минором *k*-го порядка матрицы порядка *n* называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием *n-k* строк и *n-k* столбцов. Определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении вычеркнутых *n-k* строк и столбцов, называется дополнительным минором к минору *k*-го порядка, $k=1,2,\ldots,n$.

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы порядка *n* называется определитель порядка *n*-1, полученный вычеркиванием *i*-ой строки и *j*-го столбца из определителя Δ исходной матрицы. Элемент a_{ij} и его минор M_{ij} являются взаимнодополнительными минорами, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы порядка *n* называется минор M_{ij} этого элемента взятый со знаком «+», если сумма *i*+*j* четная, и со знаком «–», если сумма *i*+*j* нечетная, то есть

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},\ i,j=1,2,\ldots,n. \qquad \text{(II.2)}$$

Определитель *n*-го порядка можно вычислить ***разложением по i-ой строке*** (*j-ому столбцу*). Например, для определителя 3-го порядка получаются следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+a_{i3}\cdot A_{i3},\ i=1,2,3,$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}, \quad j = 1,2,3.$$

Пример II.3.

1). Вычислим определитель по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} -$$

$$-\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} - \frac{1}{30} - \frac{1}{36} - \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{72 + 15 + 5 - 12 - 10 - 45}{360} = \frac{25}{360} = \frac{5}{72}.$$

2). Вычислим определитель разложением по третьему столбцу. Определим алгебраические дополнения элементов третьего столбца:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{7}{120},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 \end{vmatrix} = -\left(1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40}.$$

Далее, по формуле (II.2), имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot A_{13} + \frac{1}{6} \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{7}{120}\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} +$$

$$+ 1 \cdot \frac{3}{40} = -\frac{7}{360} + \frac{1}{72} + \frac{3}{40} = \frac{-7 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 9}{360} = \frac{25}{360} = \frac{5}{72}.$$

Аксиоматическое построение теории определителей

Определение. Определителем (детерминантом) квадратной матрицы $A = (a_{ij})$, порядка n над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей называется элемент кольца равный сумме $n!$ членов вида

$$(-1)^k \cdot a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \ldots \cdot a_{in}, \tag{II.3}$$

где i_1, i_2, …, i_n перестановки чисел 1, 2, 3, …, n, а k – число инверсий перестановки i_1, i_2, …, i_n.

Для приложений наиболее важные случаи: K – числовое поле, K – кольцо многочленов

Нам потребуются некоторые определения и факты, относящиеся к конечным множествам.

Пусть M_9 - множество, состоящее из всех цифр кроме 0, $M_9 = \{1,2,\ldots,9\}$. Сколько различных девятизначных чисел можно составить из этих цифр, если они не повторяются? Очевидно, что если $M_1 = \{1\}$, то в этом случае имеет место только одно число 1, т.е. 1! вариантов; если $M_2 = \{1, 2\}$, то возможно только 2 варианта: 12 и 21, т.е. 2!; если $M_3 = \{1, 2, 3\}$, то имеют место числа 123, 132, 213, 231, 312, 321, которых $6 = 3!$; для $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ всего $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ вариантов. Ясно, что из цифр множества M_9 можно составить 9! чисел.

В общем случае, пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ состоит из n различных элементов. Тогда число перестановок из всех элементов множества M, очевидно, равно $n!$. По определению положим $0! = 1$ и $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ - подстановка, тогда, если любые два числа поменять местами, то получим новую перестановку. Такое преобразование назовем ***транспозицией***.

Все $n!$ перестановок из n различных элементов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки.

Отсюда следует, что от любой перестановки из n элементов можно перейти к любой другой перестановке из тех же элементов при помощи нескольких транспозиций.

Будем говорить, что в данной перестановке числа i и j составляют инверсию, если $i > j$, но в перестановке i стоит раньше j.

Перестановка называется ***четной***, если ее элементы составляют четное число инверсий, и ***нечетной*** – в другом случае.

Например, перестановка 1, 2, …, n – четная, так как здесь число инверсий равно 0. Перестановка 1, 3, 5, 4, 2 – четная, так как для нее число инверсий равно 4.

Теорема. Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

Следствие. При $n \geq 2$ число четных перестановок из n элементов равно числу нечетных, то есть $n!/2$.

Пример II.4. В подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ найти число инверсий для получения тождественной подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: три инверсии.

Положим $\det A = d(a_1, a_2, ..., a_n)$. Из определения следует, что множество определителей удовлетворяет условиям:

1) $\det A$ - линейная функция любой строки матрицы A:

$d(a_1,...,\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i,...,a_n) = \alpha \cdot d(a_1,...,a_i,...,a_n) +$

$+ \beta \cdot d(a_1,...,b_i,...,a_n)$;

2) если матрица B получена из A заменой строки a_i строкой $a_i + a_j$, $i \neq j$, то $d(A) = d(B)$;

3) $d(E_n) = 1$, где E_n - единичная матрица размера n.

Условия 1) – 3) однозначно определяют аксиоматическое построение теории определителей.

Проверим свойства 1) – 3) на примере матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in R.$$

1) $\begin{vmatrix} \alpha\cdot a_{11}+\beta\cdot b_{11} & \alpha\cdot a_{12}+\beta\cdot b_{12} & \alpha\cdot a_{13}+\beta\cdot b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= \alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \beta\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$

2) к 1-ой строке, умноженной на α, добавим 2-ую, умноженную на β:

$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a_{11}+\beta\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{12}+\beta\cdot a_{22} & \alpha\cdot a_{13}+\beta\cdot a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ - очевидно.

Пример II.5. Построить определитель третьего порядка.

Решение. Имеем $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Из определения следует, что число членов определителя равно 3!=6. Из следствия следует, что число четных инверсий равно числу нечетных. Рассмотрим подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$, из которой имеем $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Для первой подстановки из шести имеем член определителя $(-1)^0\cdot a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$, для второй - $(-1)\cdot a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$, далее $(-1)\cdot a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$, $(-1)^2\cdot a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$, $(-1)^2\cdot a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$, $(-1)^3\cdot a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$.

Таким образом, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}).$$

С точностью до слагаемых получили формулу (II.1).

Обратная матрица

Определение. Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной. В противном случае, квадратная матрица называется невырожденной.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A порядка n, если она удовлетворяет следующему равенству:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E\,.$$

Теорема II.1. Для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной [3].

Если обратная матрица к матрице A порядка n существует, то она находится по формуле:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}. \qquad \text{(II.4)}$$

Пример II.6.

Найти матрицу обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 12 - (8 + 2 + 2) = 17 - 22 = -5 \neq 0\,.$$

Так как $\Delta \neq 0$, матрица A является невырожденной, и для нее существует обратная, найдем ее. Для этого вычислим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим найденные значения в формулу (II.4):

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 1 & -8 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1/5 & 8/5 & -1 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Обозначается $rangA = r \geq 0$.

Элементарные преобразования матрицы

1). Перестановка двух строк.

2). Умножение любой строки на ненулевое число.

3). Добавление к одной строке другой, умноженной на любое число.

Замечание. При определении ранга матрицы целесообразно при помощи элементарных преобразований привести ее к треугольному виду. Используя свойство 8 определителей, легко найти наибольший порядок отличных от нуля миноров.

Теорема II.2. Ранг матрицы не изменится, если к ней применить элементарные преобразования.

Пример II.7. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\5&8&3\\1&2&1\end{pmatrix}$.

*Решение***.** Приведем матрицу A к треугольному виду. Переставим местами 1-ую и 3-ю строки местами. Домножим 1-ую строку на (-5) и (-2) и прибавим ко 2-ой и 3-ей строке соответственно. Полученную 2-ую строку разделим на (-2) и прибавим к полученной 3-ей.

$$\begin{pmatrix}2&3&1\\5&8&3\\1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\5&8&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-5)\quad\times(-2)\\ +\quad + \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&-2\\0&-1&-1\end{pmatrix}:(-2)\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}+\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, минор 3-го порядка $\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix}=0$, минор 2-го порядка $\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\cdot1=1\neq0$, поэтому $rangA=2$.

§2. Системы линейных алгебраических уравнений

Пусть задана система m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1,\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m,\end{cases}$$

где x_j - неизвестные, a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, b_i - свободные члены, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

Обозначим через A матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных x_j, а через $\overline{A}$ матрицу, полученную из A присоединением к ней столбца свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),\ m,n\in N\ .$$

Матрица A называется матрицей коэффициентов системы уравнений, а матрица $\overline{A}$ - расширенной матрицей коэффициентов системы уравнений.

Определение. Решением системы уравнений называется совокупность таких значений неизвестных: $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$, которые удовлетворяют всем уравнениям системы. Решить систему уравнений значит указать все его решения или показать, что их нет.

Определение. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решения, то она называется несовместной.

Теорема II.3 (Кронекера – Капелли).

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $\overline{A}$. Причем, если ранг матрицы A равен рангу матрицы $\overline{A}$ и равен числу неизвестных, то система уравнений имеет единственное решение; если ранги матриц A и $\overline{A}$ равны и меньше числа неизвестных системы, то система уравнений имеет множество решений (доказательство на стр. 82, теорема III.4).

Методы решения СЛАУ

Рассмотрим систему из трех линейных алгебраических уравнений и трех неизвестных

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3, \end{cases} \qquad \text{(II.5)}$$

тогда матрица коэффициентов при неизвестных и расширенная матрица коэффициентов имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

1. Метод Крамера

Для системы (II.5) введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

где Δ_i, i=1,2,3, - определители, полученные из исходного определителя Δ заменой i-ого столбца столбцом свободных членов.

Тогда при решении системы, методом Крамера [7], возможны следующие случаи:

1) если $\Delta \neq 0$, то система (II.5) совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

2) если $\Delta=0$, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, то система (II.5) либо имеет множество решений, либо несовместна;

3) если $\Delta=0$ и хотя бы один из Δ_1, Δ_2, Δ_3 не равен нулю, то система (II.5) несовместна и решения не имеет.

2. Матричный метод

Пусть для системы (II.5) определитель $\Delta \neq 0$. Запишем ее в матричной форме. Имеем: A – матрица коэффициентов при неизвестных, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A \cdot X = B.$$

Так как умножение матриц не коммутативно (неперестановочно), то, чтобы получить в левой части равенства X, умножим это уравнение на A^{-1} слева

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как, $A^{-1} \cdot A = E$, то имеем

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

или

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad \text{(II.6)}$$

3. Метод Гаусса

Метод Гаусса основан на алгоритме последовательного исключения неизвестных. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов системы (II.5):

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Задача состоит в том, чтобы привести ее к «треугольному» виду при помощи эквивалентных преобразований и получить единицы на главной диагонали и нули под ними.

Алгоритм состоит в том, что на каждом шаге выполняются следующие действия (количество шагов определяется количеством уравнений). Выбирается одна из ненулевых не рассмотренных ранее строк, ее номер считаем равным *i*. Все элементы этой строки делятся на элемент, стоящий на *i*-ом месте (номер столбца этого элемента равен *j*). Если на *i*-ом шаге какая – то из строк содержит уже на *i*-ом месте единицу, то именно она переставляется и считается *i*-ой строкой. Далее добавляя к остальным, ранее не рассмотренным, строкам *i*-ую строку умноженную на подходящее число, добиваемся того, что все элементы j-го столбца, расположенные ниже i-ой строки, были равны нулю.

При решении систем алгебраических уравнений больших порядков требуется выполнять большой объем вычислений, в этом случае без техники не обойтись, следовательно, актуальной становится финансовая сторона вопроса.

Оценим число арифметических операций, необходимых для решения систем алгебраических уравнений порядка n методом Крамера. Будем учитывать только операции умножения и деления, поскольку времени на выполнение операций сложения и вычитания требуется на порядок меньше.

Для нахождения решения необходимо вычислить $n+1$ определитель порядка n, каждый из них содержит n! Членов, пренебрегая операциями сложения и вычитания и, учитывая, что для нахождения n неизвестных требуется n операций деления, окончательно получаем $\approx(n+1)!$ операций. Поскольку у быстродействующей вычислительной техники программное обеспечение ориентировано на параллельную обработку информации (содержит параллельные программы), то время на выполнение вычислений может быть существенно уменьшено, но не более чем до $n!$.

Оценим число операций необходимое для решения той же системы методом Гаусса. В первом уравнении этой системы n неизвестных и для приведения к 1 всех коэффициентов в каждом из n уравнений требуется $n\cdot(n-1)$ операций деления. Для получения системы из n-1 уравнения требуется выполнить $2n$ операций вычитания, пренебрегая которыми, получаем после 1-го шага $\approx n\cdot(n-1)$ операций. Далее, по индукции, получаем $(n-1)(n-2)$ и т.д. до $2\cdot1$ операций, то есть окончательно получаем

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k-1)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\approx\frac{n^3}{3}\ \text{операций.}$$

Таким образом, при больших n предпочтение, несомненно, должно быть отдано методу Гаусса. Часто по этой причине метод Гаусса называют машинным.

Плата за эффективность метода достаточно велика – это «неустойчивость» решения. Другими словами, правильность полученного решения системы методом Гаусса, вообще говоря, невозможно проверить.

При решении системы уравнений (II.5) методом Гаусса возможны следующие случаи

1). Если матрица $\overline{A}$ приведена к треугольному виду, то система (II.3) совместна и имеет единственное решение.

2). Если матрица $\overline{A}$ содержит хотя бы одну строку, все элементы которой равны нулю, то система (II.5) совместна и имеет множество решений.

3). Если матрица $\overline{A}$ содержит строку, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то система (II.5) несовместна, то есть решения не имеет.

Пример II.8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. 1). Решим систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 36.$$

Так как, $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{18}{18} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{0}{18} = 0$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{36}{18} = 2$.

2). Решим систему матричным методом.

Так как $\Delta \neq 0$, то обратная матрица к матрице A существует. Вычислим алгебраические дополнения, имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

тогда, обратная матрица A^{-1} имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы. Для этого запишем уравнение (II.6) в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 7 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \\ -3 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

следовательно, x_1=1, x_2=0, x_3=2.

3). Решим систему методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу коэффициентов $\overline{A}$ к “треугольному виду”. Для этого переставим 1-ую и 2-ую строки местами. Затем домножим 1-ую строку на (-2) и прибавим ко 2-ой и 3-ей строкам. Полученную 2-ую строку домножим на (3) и прибавим к полученной 3-ей строке. В итоге последнюю строку разделим на 18.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 2 \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times 3 \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :(-18) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Матрица приведена к треугольному виду, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Найдем его, выписав систему уравнений, соответствующую последней матрице.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ \qquad x_2 - 5x_3 = -10, \\ \qquad\qquad x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2\cdot 2 - 0 = 1, \\ x_2 = -10 + 5\cdot 2 = 0, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: x_1=1, x_2=0, x_3=2.

Пример II.9.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + 11x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

1). Решим систему методом Крамера, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 0\,,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -5 & 11 \end{vmatrix} = -140 \neq 0\,.$$

Так как Δ=0, $\Delta_1 \neq 0$, то система несовместна, решения не имеет.

2). Решим систему матричным методом. Так как Δ=0, то обратная матрица к матрице A не существует, матричный метод не применим.

3). Решим систему методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу коэффициентов $\overline{A}$ к треугольному виду. Для этого домножим 1-ую строку на (-3) и (-2) и прибавим ко 2-ой и 3-ей строкам, соответственно. Полученную 2-ую строку прибавим к полученной 3-ей строке.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 11 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-3) \times(-2) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right) + \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right).$$

Так как у полученной матрицы, в последней строке, коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член не равен нулю, то решения нет, то есть система несовместна.

Ответ: система несовместна.

Однородная система линейных алгебраических уравнений (ОСЛАУ)

Определение. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется однородной, если все свободные члены системы равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = 0. \end{cases} \qquad \text{(II.7)}$$

Очевидно, что однородная СЛАУ всегда совместна, так как одно ее решение всегда известно: все неизвестные равны нулю.

Теорема II.4. Однородная система (II.7) имеет единственное нулевое решение, тогда и только тогда, когда определить матрицы коэффициентов при неизвестных не равен нулю. В противном случае, система (II.7) имеет множество решений.

Пример II.10. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

*Решение***.** Вычислим определитель матрицы *A*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 12 - 22 + 20 - 11 + 6 = 0\,.$$

Так как $\det A = 0$, то хотя бы одна из строк является линейной комбинацией других, следовательно, система имеет множество решений, которое найдем, например, методом Крамера.

Решим систему из двух уравнений (оставшееся уравнение является комбинацией этих двух).

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = t$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = t, \\ 2x_1 + 5x_2 = -t. \end{cases}$$

Вычислим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} t & 3 \\ -t & 5 \end{vmatrix} = 8t, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & -t \end{vmatrix} = -3t.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{8t}{-1} = -8t$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-3t}{-1} = 3t$, $x_3 = t$.

Ответ: $x_1 = -8t$, $x_2 = 3t$, $x_3 = t$, $t \in R$.

§3. Системы линейных алгебраических неравенств

Определение. Два алгебраических выражения, соединенные одним из знаков <, >, ≤, ≥ образуют неравенства. Неравенства называется линейными, если переменные *x*, *y* входят в него в первых степенях, не перемножаясь между собой, то есть имеют вид:

$$ax + by + c > 0, \ ax + by + c < 0;$$
$$ax + by + c \geq 0, \ ax + by + c \leq 0.$$

Решением линейного неравенства называется всякая пара значений переменных *x, y*, при которых оно выполнимо. Решить неравенство – значит, найти множество всех его решений [2, 3].

Известно, что пара действительных чисел (x, y) однозначно определяет точку координатной плоскости, поэтому множество решений линейного неравенства можно изобразить графически на координатной плоскости. В зависимости от знака неравенства, графическим изображением решения линейного неравенства является одна из полуплоскостей, на которые разделяется плоскость соответствующей прямой.

Пусть задана система линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \ge c_1, \\ a_2x + b_2y \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny \ge c_n, \end{cases}$$

тогда решением этой системы называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому из неравенств этой системы, поэтому множество решений системы есть пересечение множеств решений, входящих в нее неравенств. Если это пересечение пусто, то решения системы неравенств не существует.

Пример II.11. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x + y - 1 > 0$.

*Решение***.** Преобразуем данное неравенство к виду $y > 1 - x$. Построим на координатной плоскости прямую $y = 1 - x$ (рис. II.1).

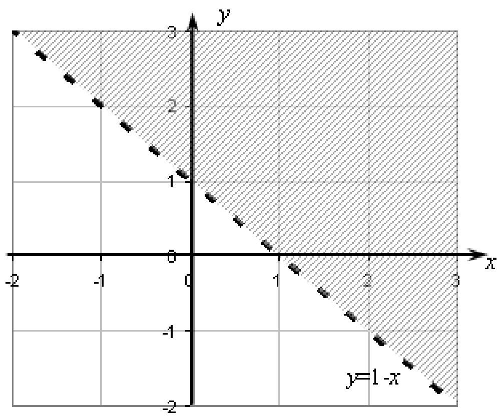


Рис. II.1

Так как ордината любой точки, лежащей выше прямой $y = 1 - x$, больше, чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на прямой, то множество точек плоскости, расположенных выше этой прямой, и будет геометрическим изображением решений заданного неравенства.

Пример II.12. Изобразить множество решений системы неравенств на координатной плоскости и определить координаты «угловых» точек этого множества.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \ge 0, \\ x_2 - x_1 + 4 \ge 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 20 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим на координатной плоскости прямые $x_2 = 1 - x_1$ (1), $x_2 = x_1 - 4$ (2), $x_2 = (20 - 4x_1)/5$ (3), $x_1 = 0$ (4), $x_2 = 0$ (5) (рис. II.2).

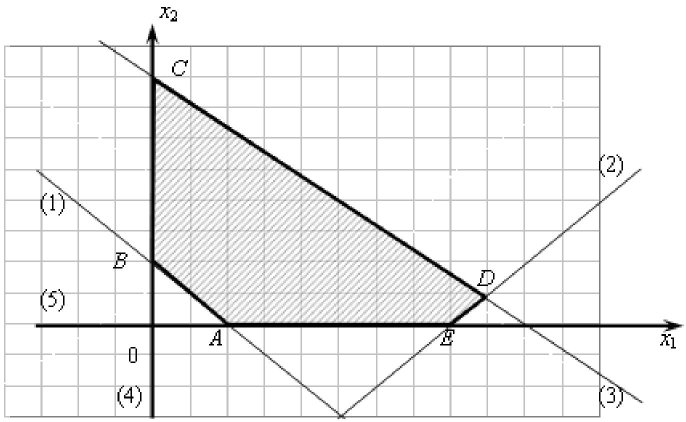


Рис. II.2

Все неравенства, входящие в систему, нестрогие, поэтому сами прямые будут входить в множество решений системы. Если неравенство имеет вид $x_2 \le f(x_1)$, то геометрическим изображением его решения является нижняя полуплоскость, если $x_2 \ge f(x_1)$, то – верхняя полуплоскость.

Угловые точки, полученного множества, лежат на пересечении двух прямых, поэтому, чтобы найти их координаты, необходимо решить системы уравнений, их задающих.

$$A\colon \begin{cases} x_2 = 1 - x_1, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow A(1;0).$$

$$B\colon \begin{cases} x_2 = 1 - x_1, \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow B(0;1).$$

$$C\colon \begin{cases} x_2 = \dfrac{4}{5}(5 - x_1), \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \Rightarrow C(0;4).$$

$$D\colon \begin{cases} x_1 = x_2 + 4, \\ 4x_1 + 5x_2 = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4\dfrac{4}{9}, \\ x_2 = \dfrac{4}{9}, \end{cases} \Rightarrow D\left(4\frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right).$$

$$E\colon \begin{cases} x_2 = x_1 - 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow E(4;0).$$

III. Линейные пространства

Ранее отмечалось, что многие множества, существенно различаясь по природе своих элементов, имеют одинаковые свойства, то есть могут быть описаны, с точки зрения современной алгебры, единой системой аксиом. Наиболее востребован практикой оказался класс множеств, обладающих свойствами линейного пространства. Часто их называют векторными, поскольку векторные величины получили широкое распространение в различных научно-практических исследованиях и приложениях. Кроме того, векторные пространства геометрически наглядны, что делает линейные пространства понятными, расширяя, тем самым, область использования их в науке и практических исследованиях.

Во введении понятие числового поля определялось аксиоматически. Рассмотрены поля рациональных чисел Q, действительных чисел R и комплексных чисел C. В этом разделе введем аксиоматически линейные пространства.

Пусть дано любое числовое поле, и все скаляры являются его элементами [11].

Определение. Линейным пространством над числовым полем, например, R называется множество L элементов удовлетворяющее аксиомам:

А. Для любой пары $\overline{a}$, $\overline{b}$ элементов из L всегда найдется элемент $(\overline{a}+\overline{b})$, называемый суммой элементов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, что выполняется

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (коммутативность);

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (ассоциативность);

3) существует нейтральный элемент $\overline{0}\in L$, называемый начальным, такой, что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;

4) каждому элементу $\overline{a}$ соответствует однозначно определенный элемент $-\overline{a}\in L$ такой, что $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$.

В. Для любой пары из α, β и $\overline{a}$, $\alpha,\beta\in R$, $\overline{a}\in L$, найдется элемент $\alpha\cdot\overline{a}$, $\beta\cdot\overline{a}\in L$, называемый произведением α и $\overline{a}$ или β и $\overline{a}$, соответственно, такой, что

5) $\alpha\cdot(\beta\cdot\overline{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\overline{a}$ (ассоциативность умножения на скаляры);

6) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$.

С.

7) $\alpha\cdot(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\cdot\overline{a}+\alpha\cdot\overline{b}$ - умножение на скаляры дистрибутивно (сочетательно) относительно сложения;

8) $(\alpha+\beta)\cdot\overline{a}=\alpha\cdot\overline{a}+\beta\cdot\overline{a}$ - умножение на элементы дистрибутивно относительно сложения скаляров.

Отношения между линейным пространством L и полем скаляров выражают словами: линейное пространство L над полем скаляров.

В дальнейшем под полем скаляров будем понимать основное поле R действительных чисел, а имея дело с линейными пространствами в обозначениях и геометрической интерпретации, будем использовать векторные обозначения, что и было сделано в аксиомах.

Вектор (лат. vector - скользящий) – в геометрическом пространстве определяется как отрезок прямой, имеющий направление; задается упорядоченно: начало вектора (точка A) и конец (точка B). Для обозначения такого вектора используются а) пара букв $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$, а также одна буква $\bar{a}$ или $\boldsymbol{a}$ (полужирный шрифт), б) на рисунках как направленный отрезок прямой. Таким образом, векторные обозначения и геометрические векторы – суть обозначения элементов линейного пространства.

Рассматривают геометрические векторные пространства трех видов векторов: связанные, скользящие и свободные. В пространстве свободных векторов достаточно иметь одинаковые направления; скользящие векторы лежат на одной прямой; связанные векторы имеют общее начало. Длина для всех видов векторов определяется его модулем – $|\bar{a}|$. Из условия упорядоченности обозначений вектор $\overline{BA}$ противоположен вектору $\overline{AB}$. Вектор, у которого начало совпадает с концом, например $\overline{AA}$, называется нуль-вектором, $|\overline{AA}| = 0$, то есть обозначение совпадает с числом 0; ему приписывают любое направление. Вектор $\bar{e}$, длина которого $|\bar{e}| = 1$, называется единичным, помимо этого свойства, он выполняет функции масштаба.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат в одной или в параллельных прямых, и компланарными, если лежат в одной или параллельных плоскостях.

Зададим вектор (свободный) аксиоматически. Определим векторное пространство, как понятие, обобщающее понятие совокупности всех векторов обычного трехмерного пространства. По-прежнему, элементы числового поля будем называть скалярами.

Определение. Векторным пространством над скалярным полем P называется множество L векторов, в котором определена операция сложения векторов и операция умножения векторов на скаляры из основного поля P, задаваемых аксиомами:

А. Сложение. $\forall(\bar{a}, \bar{b} \in L)$, $\exists((\bar{a}+\bar{b}) \in L)$, называемый суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, что

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;

2) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;

3) существует нулевой вектор $\bar{0} \in L$ такой, что $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;

4) для вектора $\bar{a}$ найдется единственный противоположный вектор $-\bar{a} \in L$ такой, что $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$;

В. Умножение. $\forall(\alpha, \beta, 1 \in P)$, $\forall(\bar{a} \in L)$ $\Rightarrow \exists$ вектор $\overline{\beta a} \in L$, называемый произведением скаляра β и вектора $\bar{a}$, что

5) $1 \cdot \bar{a}=\bar{a}$;

6) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{a}=\alpha \cdot(\beta \cdot \bar{a})$;

С. Умножение дистрибутивно относительно

7) сложения векторов, $\alpha \cdot(\bar{a}+\bar{b})=\alpha \cdot \bar{a}+\alpha \cdot \bar{b}$;

8) сложения скаляров, $(\alpha+\beta) \cdot \bar{a}=\alpha \cdot \bar{a}+\beta \cdot \bar{a}$.

Из аксиом вытекают важные свойства векторов L ($\bar{0} \in L$)

1) $\alpha \cdot \bar{0}=0$; то есть умножение нуль–вектора на скаляр дает число 0;

2) $0 \cdot \bar{a}=0$; умножение числа 0 на вектор дает также число 0;

3) $-1 \cdot \bar{a}=-\bar{a}$, то есть чтобы получить вектор, противоположный заданному, достаточно умножить его на -1.

Аксиомы 1) – 4) образуют абелеву группу, а аксиомы 5) – 8) отражают тот факт, что умножение элементов на скаляры является линейной функцией (оператором, преобразованием) элементов из L. Это подтверждает не только внешнее сходство аксиом поля и векторного пространства, но и их внутреннюю связь, другими словами, понятия линейное пространство и векторное пространство – изоморфны.

Пример III.1. Рассмотрим множество векторов на плоскости. Покажем, что оно образует линейное пространство L^2 над полем чисел R. Достаточно проверить выполнение аксиом 1) – 8). Проверку осуществим, используя геометрические образы.

Исходя из определения свободных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, совместим параллельным переносом конец вектора $\bar{a}$ с началом вектора $\bar{b}$, а затем - начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$. Полученный вектор $\overline{AD}$ назовем суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. III.1), то есть $\bar{a}+\bar{b}=\overline{AD}$.

Положим $\bar{a}=\overline{AB}$, тогда $\bar{a}=\overline{CD}$, аналогично, $\bar{b}=\overline{BD}$, тогда $\bar{b}=\overline{AC}$ (рис. III.1).

А. Сложение. Если векторы неколлинеарные, то по «правилу треугольников» сложения векторов, имеем

1) $\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{CD}$.

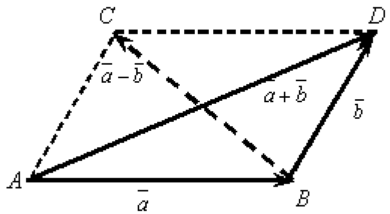


Рис. III**.**1

Для коллинеарных векторов это очевидно, так как ΔADB вырождается в отрезок прямой.

2) $\overline{AC}+(\overline{CD}+\overline{DB})=(\overline{AC}+\overline{CD})+\overline{DB}$ или $\bar{b}+(\bar{a}-\bar{b})=(\bar{b}+\bar{a})-\bar{b}=\bar{a}$.

Тот факт, что векторы параллелограмма попарно равны, не является принципиальным. Для общего случая, можно рассмотреть любой четырехугольник на плоскости.

3) Очевидно, если обозначить $\bar{0}=\overline{AA}$;

4) Следует из доказательства аксиомы 2.

В. Умножение. Пусть $\bar{a}=\overline{OA}$ лежит на прямой (рис. III.2).

5) $\bar{a}=\overline{OA}=1\cdot\overline{OA}=1\cdot\bar{a}$;

Рис. III**.**2

6) положим $\overline{OB} = \beta \cdot \overline{OA}$, а $\overline{OC} = \alpha \cdot \overline{OB}$ $\alpha, \beta \in (0,1)$ (рис.2), тогда $\overline{OC} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{OA}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{OA}$ или $\alpha(\beta \cdot \bar{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{a}$.

C. Дистрибутивность.

7) Следует из свойств пропорциональности отрезков (рис. III.3). В самом деле, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$. Пусть $\dfrac{|\bar{a}|}{|\overline{AC}|} = \dfrac{|\bar{b}|}{|\overline{CB}|} = \alpha$, тогда

$$\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{a+b},\ \overline{CB} = \alpha \cdot \bar{b},\ \overline{AB} = \alpha \cdot \bar{a}\ \Rightarrow\ \alpha \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \cdot \bar{a} + \alpha \cdot \bar{b} .$$

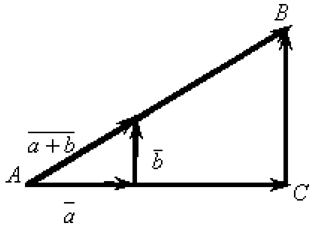


Рис. III.3

8) Следует из рис. III.2 и правил сложения векторов, если положить $\bar{a} = \overline{OA}$, $\overline{OB} = \alpha \cdot \bar{a}$, $\overline{BC} = \beta \cdot \bar{a}$, тогда $\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{a} = (\alpha + \beta) \cdot \bar{a}$.

Тем самым, выполнение аксиом показано геометрически.

Пример III.2. Пусть R^2 множество всех упорядоченных пар действительных чисел и $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, где $x, y \in R^2$. Положим по определению

1) $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$;
2) $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot \xi_1, \alpha \cdot \xi_2)$;
3) $0 = (0,0)$;
4) $-x = (-\xi_1, -\xi_2)$,

где $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \alpha \in R$.

Аксиомы групп **A**, **B**, **C**, очевидно, выполняются, следовательно, R^2 – двумерное действительное линейное пространство, в котором задана система координат.

Пример III.3. Если в примере 2 вместо пар рассматривать действительные числа, то множество R есть линейное пространство над самим собой, геометрически это числовая ось.

То же самое справедливо для любого другого скалярного поля.

Пример III.4. Пусть П - множество полиномов (многочленов) переменной x с действительными коэффициентами. Под сложением полиномов будем понимать обычное их сложение по правилу приведения подобных членов, а умножение на скаляр – обычное умножение полинома на действительное число. Нейтральный элемент – полином, все коэффициенты которого равны 0. Множество полиномов с действительными коэффициентами будет действительным линейным пространством.

Пример III.5. Определим на множестве действительных чисел R сложение действительных чисел и их умножение на скаляр являющегося рациональным числом, тогда множество R будет рациональным действительным линейным пространством.

§1. Линейная зависимость

Перейдем к описанию свойств линейных пространств. В первую очередь, к ним относятся отношения между его элементами.

Линейной комбинацией элементов $\overline{a_i} \in L$ над полем действительных чисел R называется элемент

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{a_n}, \qquad \text{(III.1)}$$

где $\overline{a} \in L$, $\alpha_i \in R$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Определение. Множество элементов $\{\overline{a_i}\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, называется линейно независимым, если из равенства

$$\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{a_n} = \overline{0}, \qquad \text{(III.2)}$$

с необходимостью следует, что $\forall i$, $\alpha_i = 0$. Ясно, что любая часть элементов из $\{\overline{a_i}\}$, также линейно независимая. Если хотя бы одно из $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, то множество $\{\overline{a_i}\}$ называется линейно зависимым.

Пример III.6. Пусть дано векторное множество $\{\overline{a_i}\}$. Если один из векторов $\overline{a_i}$, например, $\overline{a_{i0}}=0$, то такая система векторов линейно зависима. В самом деле, пусть множество $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_{i0-1}}$, $\overline{a_{i0}}$, …, $\overline{a_n}$ линейно независимо, тогда из равенства $\alpha_1\cdot\overline{a_1}+\alpha_2\cdot\overline{a_2}+..\alpha_{i0-1}\cdot\overline{a_{i0-1}}+\alpha_{i0+1}\cdot\overline{a_{i0+1}}+...+\alpha_n\cdot\overline{a_n}=\overline{0}$, следует, что $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_{i0-1}=\alpha_{i0+1}=...=\alpha_n=0$.

Добавляя к этому множеству $\overline{0}$ вектор, умноженный на $\alpha_{i0}\neq 0$, по-прежнему имеем равенство

$$\alpha_1\cdot\overline{a_1}+\alpha_2\cdot\overline{a_2}+...+\alpha_{i0-1}\cdot\overline{a_{i0-1}}+\alpha_{i0}\cdot\overline{0}+\alpha_{i0+1}\cdot\overline{a_{i0+1}}+$$
$$+...+\alpha_n\cdot\overline{a_n}=\overline{0}.$$

Следовательно, множество векторов, как, впрочем, и любых других элементов, содержащих нулевой элемент всегда линейно зависимо ▼.

Замечание. Если множество векторов пусто, то оно линейно независимо. В самом деле, если нет никаких индексов, то невозможно выбрать им соответствующие не равные нулю числа, чтобы сумма вида (III.2) была равна 0. Такая интерпретация линейной независимости может быть принята за доказательство, тем более что такой результат хорошо согласуется с теорией [11].

В связи со сказанным, определение линейной независимости можно сформулировать так: множество элементов $\{\overline{a_i}\}$ линейно независимо, если $\sum\alpha_i\cdot\overline{a_i}=0$, и нет ни одного индекса, для которого $\alpha_i\neq 0$. В частности, это множество может быть и пустым.

Пример III.7. Любые два скользящих вектора линейно зависимы. Напомним, что скользящими векторами называются векторы, лежащие на одной прямой. Взяв единичный вектор $\bar{e}$, можно получить любой другой вектор умножением на соответствующее действительное число $\alpha\in R$, то есть $\bar{a}=\alpha\cdot\bar{e}$

или $1\cdot\bar{a}-\alpha\cdot\bar{e}=\bar{0}$. Следовательно, уже любые два вектора в одномерном пространстве линейно зависимы.

Пример III.8. Рассмотрим пространство полиномов, где $\overline{a_1}=1-t$, $\overline{a_2}=1-t^2$, $\overline{a_3}=t-t^2$, $t\in R$. Запишем

$$\alpha_1\cdot\overline{a_1}+\alpha_2\cdot\overline{a_2}+\alpha_3\cdot\overline{a_3}=0.$$

Полагая $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=1$, получим, тождественно по t

$$(1-t)-(1-t^2)+t-t^2\equiv 0,$$

то есть множество $\{\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}\}$ линейно зависимо. Заметим, что любое конечное множество вида $\{1,t,t^2,...,t^n\}$, $n\in N$, линейно независимо. Для доказательства рассмотрим случай $n=2$, тогда из равенства

$$\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot t+\alpha_3\cdot t^2=0, \tag{III.3}$$

в случае предположения о его линейной зависимости, следовало бы, что существуют не все равные нулю числа α_1, α_2, α_3, что тождественно для любого $t\in R$ выполняется (III.3), но это противоречит основной теореме алгебры: любой многочлен n-ой степени имеет не более чем n действительных корней. В нашем случае это уравнение имеет только два корня, а не бесконечное их множество. Получили противоречие.

§2. Линейные комбинации. Базисы

Пусть $\bar{a}=\sum\alpha_i\cdot\overline{a_i}$. Будем говорить, что $\bar{a}$ есть ***линейная комбинация*** элементов $\{\overline{a_i}\}$.

Теорема III.1 (основная). Множество ненулевых элементов $\{\overline{a_i}/i=1,2,...,n\}$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда некоторый элемент $\overline{a_{i_0}}$, $2\le i_0\le n$, является линейной комбинацией предшествующих элементов.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что элементы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$ линейно зависимы и пусть $2\le i_0\le n$ первое натуральное число, для которого элементы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_{i_0}}$ линейно зависимы, тогда

$$\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + ... + \alpha_{i_0} \cdot \overline{a_{i_0}} = \overline{0},$$

при не всех равных нулю α_i и обязательно $\alpha_{i_0} \neq 0$ (иначе бы этим коэффициентом было бы α_{i_0-1}, что противоречило бы заявленному). Отсюда имеем линейную комбинацию

$$\overline{a_{i_0}} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{i_0}} \cdot \overline{a_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_{i_0}} \cdot \overline{a_2} - ... - \frac{\alpha_{i_0-1}}{\alpha_{i_0}} \cdot \overline{a_{i_0-1}}.$$

Достаточность очевидна, поскольку, каждое множество, содержащее линейно зависимое множество, само линейно зависимо ▼.

Определение. Базисом (координатной системой) линейного пространства *L* называется множество *A* линейно независимых элементов, такое, что каждый элемент из *L* является линейной комбинацией элементов из *A*, $A \subset L$ [11].

Мы будем рассматривать конечномерные линейные пространства L^n, $0 \leq n < \infty$.

Пример III.9. Рассмотрим трехмерное векторное пространство L^3. Возьмем единичные векторы $\overline{e_1} = (1,0,0)$, $\overline{e_2} = (0,1,0)$, $\overline{e_3} = (0,0,1)$. Они образуют базис, при $n = 3$.

Покажем, что векторы линейно независимы. В самом деле, имеем

$$\alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \alpha_3 \cdot \overline{e_3} = \overline{0}$$

или $\alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 \cdot (0,1,0) + \alpha_3 \cdot (0,0,1) = (0,0,0)$. Отсюда по правилам умножения вектора на число и сложения векторов (пример III.2), получим

$$(\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3) = (0,0,0) \text{ или } (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0,0,0).$$

Следовательно, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ ▼.

Пусть $\overline{a} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ - произвольный вектор пространства L^3, тогда исходя из аксиом линейного пространства, получаем

$$\overline{a} = \beta_1 \cdot \overline{e_1} + \beta_2 \cdot \overline{e_2} + \beta_3 \cdot \overline{e_3}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для пространства с базисом, $n > 3$. Из основной теоремы следует, что в произвольном конечномерном линейном пространстве *L*, любой элемент $\overline{a}$ может быть представлен как линейная комбинация его базисных элементов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$, то есть

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{a_n}.$$

Причем, такое разложение единственно. В самом деле, пусть имеем

$$\overline{a} = \beta_1 \cdot \overline{a_1} + \beta_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots + \beta_n \cdot \overline{a_n},$$

тогда после вычитания, получаем

$$\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \overline{a_1} + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \overline{a_2} + \ldots + (\alpha_n - \beta_m) \cdot \overline{a_n}.$$

Отсюда, в силу независимости элементов $\overline{a_i}$, $\alpha_i - \beta_i = 0$, $\forall i$, то есть $\alpha_i = \beta_i$ ▼.

Теорема III.2 (о дополнении до базиса). Пусть L^n – конечномерное линейное пространство и $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}\}$ - некоторое множество линейно независимых элементов. Если они не образуют базис, то в L^n можно найти такие элементы $\overline{b_{m+1}}$, $\overline{b_{m+2}}$, …, $\overline{b_n}$, что множество элементов $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}, \overline{b_{m+1}}, \overline{b_{m+2}}, \ldots, \overline{b_n}\}$ образуют базис в L^n. То есть, каждое линейно независимое множество элементов линейного пространства может быть дополнено до базиса.

Доказательство. Поскольку пространство L^n - конечномерное, то у него есть базис, состоящий, например, из n элементов, пусть это элементы $\{\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n}\}$. Рассмотрим множество элементов $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}, \overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n}\}$.

Применим основную теорему. В порядке следования элементов рассмотрим множество A. Оно заведомо линейно зависимое, поскольку любой из элементов $\overline{a_j}$ есть линейная комбинация $\overline{c_i}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как элементы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_m}$ - линейно независимые, то добавляя к нему последовательно элементы $\overline{c_i}$ до тех пор, пока не появится первый элемент, например, $\overline{c_k}$, такой, что он будет линейной комбинацией предыдущих векторов этого множества, то есть

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}, \overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_{k-1}}$. Выбрасывая этот элемент из множества A, получим $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}, \overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_{k-1}}, \overline{c_{k+1}}, ..., \overline{c_n}\}$. Продолжаем эту процедуру до тех пор, пока в этом множестве не останется n линейно независимых элементов, среди которых все элементы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_m}$ и n-m из элементов $\overline{c_i}$. Полученное множество и будет базисом ▼.

Пример III.10. Доказать, что векторы $\overline{e_1} = (1,0,0)$, $\overline{e_2} = (0,1,0)$, $\overline{e_3} = (0,0,1)$ и $\overline{a} = (1,1,1)$ образуют линейно зависимое множество, а любые три из них линейно независимы.

Покажем, что существуют не все равные нулю числа α_i, для которых

$$\alpha_1 \cdot \overline{a} + \alpha_2 \cdot \overline{e_1} + \alpha_3 \cdot \overline{e_2} + \alpha_4 \cdot \overline{e_3} = \overline{0}.$$

В самом деле, при $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ имеем

$$-1 \cdot \overline{a} + 1 \cdot \overline{e_1} + 1 \cdot \overline{e_2} + 1 \cdot \overline{e_3} = \overline{0},$$

$$(-1,-1,-1) + (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = (0,0,0).$$

Линейная зависимость доказана. Покажем, что тройка векторов, например, $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{a}$, образует базис. Составим равенство

$$\alpha_1 \cdot \overline{a} + \alpha_2 \cdot \overline{e_1} + \alpha_3 \cdot \overline{e_2} = \overline{0},$$

$$\alpha_1 \cdot (1,1,1) + \alpha_2 \cdot (1,0,0) + \alpha_3 \cdot (0,1,0) = (0,0,0).$$

Выполняя действия с векторами, получим

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (0,0,0).$$

Приравнивая соответствующие координаты в правой и левой частях последнего равенства, получим систему уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 0$, решая ее получим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Аналогичное рассуждение справедливо и для оставшихся троек векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_3}$, $\overline{a}$ или $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, $\overline{a}$.

Теорема III.3 (о размерности пространства). Все базисы конечномерного линейного пространства L состоят из одинакового числа базисных элементов.

Доказательство. Пусть даны два множества $A, B \subset L$, где $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}\}$; $B = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_m}\}$, $n, m \in N$. Каждому из них припишем одно из двух свойств, определяющих базис: 1) через элементы множества *A* линейно выражаются любые элементы из *L*, 2) элементы множества *B* представляют линейно независимую совокупность, но не обязательно всю из *L*. Будем считать, что элементы *A* и *B* упорядочены.

Рассмотрим множество *A* и применим к его элементам *m* раз метод из основной теоремы. Так как элементы из *B* линейно независимы, то получим, по-прежнему, линейно зависимое множество

$$\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_m}, \overline{a_{m+1}}, \overline{a_{m+2}}, \ldots, \overline{a_n}. \qquad \text{(III.4)}$$

В самом деле, если бы $m \geq n$, то получилось бы линейно независимое множество $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_{m-n}}$, а оставшиеся *n* элементов множества *B* линейно выражались бы через них, что невозможно, значит $m < n$. Но этого тоже быть не может, так как по построению множество (III.4) обладает свойством базиса множества *A*. Поскольку пространство *L* конечномерное, то остается только $m = n$, то есть два разных базиса пространства *L* состоят из одинакового числа элементов ▼.

Следствие. В любом *n*-мерном линейном пространстве ($1 \leq n < \infty$) можно найти бесконечно много базисов.

Доказательство следует из правила умножения элементов линейного (векторного) пространства на число.

Определение. Размерностью линейного пространства *L* называется число элементов, составляющих его базис.

Из определения следует, что пустое множество элементов – тривиальное линейное пространство – имеет размерность 0, что, как следует заметить, оправдывает терминологию линейной зависимости и позволяет заявить: *n*-мерное пространство L^n имеет размерность *n*, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, подводя итоги сказанному, получаем, что каждое множество из *n*+1 элемента *n*-мерного линейного пространства линейно зависимо; множество из *n* элементов линейного пространства является базисом тогда и только тогда, когда оно линейно независимое (или каждый элемент пространства L^n является линейной комбинацией элементов его базиса); в любом линейном пространстве число базисов бесконечно.

Пример III.11 (теорема Кронекера - Капелли).

Пусть имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases} \qquad \text{(III.5)}$$

где A – матрица коэффициентов системы, $\overline{A}$ – расширенная матрица коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Будем считать столбцы расширенной матрицы коэффициентов векторами $\overline{a_i} = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^T$, $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$, где $\overline{e}^T$ - транспонированная вектор-строка. Запишем вектор $\overline{b}$ как линейную комбинацию

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{a_i}\text{, где } x_i \in R, \qquad \text{(III.6)}$$

эта запись эквивалентна системе уравнений (III.5).

Теорема III.4 (Кронекера - Капелли). Система линейных алгебраических уравнений (III.5) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы $\overline{A}$, то есть $rang A = rang \overline{A}$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть система (III.5) совместна, тогда у нее существует решение: $x_i = \alpha_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\alpha_i \in R$. Учитывая (III.6), $\overline{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{a_i}$, но в этом случае $\overline{b}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$. Следовательно, через множество векторов $\overline{b}$, $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$ можно выразить любой вектор из $\overline{a_i}$. Это означает, что $rangA = rang\overline{A}$.

Достаточность. Пусть $rangA = rang\overline{A}$. Выберем любой базис из $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$, тогда $\overline{b}$ линейно выражается через базис (это могут быть как все векторы $\overline{a_i}$, так и их часть) и тем самым, через все векторы $\overline{a_i}$, $i = 1,2,...,n$. Это означает, что система уравнений совместна ▼.

Рассмотрим *n*-мерное линейное пространство *L*. Каждый вектор можно представить линейной комбинацией $\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{a_i}$, где множество $A = \{\overline{a_i}\}$, $i = 1,2,...,n$, состоит из базисных векторов. Перепишем линейную комбинацию в виде $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и установим взаимнооднозначное соответствие между элементами и их координатами

$$\overline{a} \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in R^n$.

Это означает, что между *n*-мерным линейным векторным пространством векторов $\overline{a} \in L$ над *n*-мерным полем действительных чисел R^n установлено взаимно-однозначное соответствие.

Определение. Два линейных пространства L_1 и L_2 над одним и тем же скалярным полем ***изоморфны***, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие *f*, так чтобы

$$f(\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2}) = \alpha_1 f(\overline{a_1}) + \alpha_2 f(\overline{a_2}),$$

то есть под изоморфизмом понимается взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее все линейные отношения. Ясно, что изоморфные пространства имеют одинаковую размерность.

Из примера и определения изоморфизма следует, что с точки зрения изучения проблем линейности, изоморфные пространства одинаковы, поэтому формально *вместо n-мерного линейного пространства L над полем* R^n *можно изучать только поле* R^n.

§3. Подпространства

Линейные пространства изучают не только отношения между элементами, но и прямые, плоскости и другие линейные аналоги геометрических образов.

Определение. Непустое множество *M* линейного пространства *L* называется подпространством или линейным многообразием [11], если из принадлежности $\overline{a_1}, \overline{a_2} \in L$ следует, что ему принадлежат все линейные комбинации $\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} \in L$.

Последнее означает, что с любым элементом $\overline{a}$ оно содержит и элемент $\overline{a} - \overline{a}$, то есть нулевой элемент $\overline{0}$, Поэтому, говоря о подпространствах (прямых, плоскостях и т.д.) следует иметь в виду, что все они содержат нуль-вектор или проходят через начало координатной системы, если таковая введена.

Следовательно, любое подпространство является пространством.

Очевидными примерами подпространства являются само пространство *L* и множества *O*, состоящее из одного элемента $\{\overline{0}\}$ или начала.

Пример III.12. Выберем в трехмерном линейном пространстве три единичных взаимно перпендикулярных вектора, и приведем их к общему началу (рис. III.1), которое обозначили через *O*.

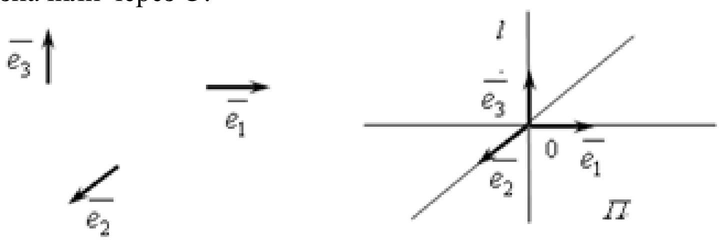


Рис. III.1

Из определения подпространства следует, что пространство L^3 есть объединение подпространств L_1 и L_2 с базисами $\{\overline{e_1}\}$ и $\{\overline{e_2}, \overline{e_3}\}$, соответственно. Ясно, что $L_3 = L_1 \bigcup L_2$ и $L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$, где множество $\{0\}$ содержит один элемент $\overline{0}$ - нуль-вектор. Из рисунка видно, что L^3 является объединением плоскости *П* и прямой *l*. Приведение к общему началу позволяет ввести прямоугольную координатную систему с заданным масштабом $|\overline{e_i}|=1$ и направлением.

§4. Прямые суммы

Пусть L_1 и L_2 линейные пространства над одним и тем же числовым полем *R*. Их прямой суммой называется линейное пространство $L_3 = L_1 + L_2$, элементами которого являются всевозможные пары элементов $\left\langle \overline{a_i^1}, \overline{a_i^2} \right\rangle \subset L_3$, где $\overline{a_i^1} \in L_1$, $\overline{a_i^2} \in L_2$, а линейные операции определяются формулой

$$\alpha_1 \cdot \left\langle \overline{a_{i_1}^1}, \overline{a_{i_1}^2} \right\rangle + \alpha_2 \cdot \left\langle \overline{a_{i_2}^1}, \overline{a_{i_2}^2} \right\rangle = \left\langle \alpha_1 \cdot \overline{a_{i_1}^1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_{i_2}^1}, \alpha_1 \cdot \overline{a_{i_1}^2} + \alpha_2 \cdot \overline{a_{i_2}^2} \right\rangle.$$

Множество всех элементов вида $\langle \overline{a}, 0\rangle$ образует в L^3 подпространство, соответствие $\langle \overline{a}, 0\rangle \to \overline{a}$ показывает, что это подпространство изоморфно L_1, а $\langle 0, \overline{a} \rangle$ - L_2.

Какова связь между L_1 и L_2, если их рассматривать как подпространства L_3?

Теорема III.5. Если L_1 и L_2 подпространства линейного пространства L_3, то следующие условия эквивалентны

1) $L_3 = L_1 + L_2$;

2) $L_1 + L_2 = O'$, где $O'=\{0\}$ – нуль-пространство и $L_1 + L_2 = L_3$ (то есть L_1 и L_2 дополняют друг друга);

3) любой элемент $\overline{a_3}$ из L_3 можно записать как $\overline{a_3} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$, где $\overline{a_1} \in L_1$, $\overline{a_2} \in L_2$ (рис. III.2).

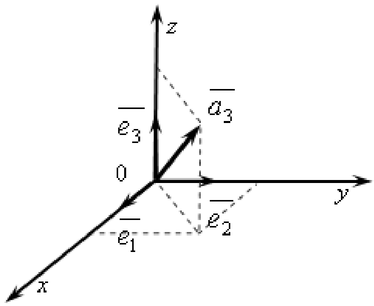


Рис. III.2

Теорема III.6. Размерность прямой суммы равна сумме размерностей ее слагаемых.

Следствие. Любое подпространство конечного линейного пространства обладает дополнением.

Пример III.13. Пусть элементы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ принадлежат L_4, а L_1 и L_2 подпространства такие, что $\{\overline{a},\overline{b}\}\in L_1$, $\{\overline{c},\overline{d}\}\in L_2$. Проверить равенство $L_4 = L_1 + L_2$, если

а) $\overline{a}=(1,1,0,0)$, $\overline{b}=(1,0,1,0)$, $\overline{c}=(0,1,0,1)$, $\overline{d}=(0,0,1,1)$;

б) $\overline{a}=(1,0,0,1)$, $\overline{b}=(0,1,1,0)$, $\overline{c}=(1,0,1,0)$, $\overline{d}=(0,1,0,1)$.

Имеем $\alpha_1\cdot\overline{a}+\alpha_2\cdot\overline{b}+\alpha_3\cdot\overline{c}+\alpha_4\cdot\overline{d}=\overline{0}$ или

$$(\alpha_1,\alpha_1,0,0)+(\alpha_2,0,\alpha_2,0)+(0,\alpha_3,0,\alpha_3)+(0,0,\alpha_4,\alpha_4)=(0,0,0,0).$$

По правилу сложения координат, получили а) $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_3+\alpha_4)=(0,0,0,0)$. Приравнивая соответствующие координаты правой и левой частей последнего равенства, получим систему уравнений, решение которой имеет вид: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, то есть элементы линейно независимые. Рассматривая пары $\{\overline{a},\overline{b}\}$, $\{\overline{c},\overline{d}\}$, получаем $\alpha_1\cdot(1,1)+\alpha_2\cdot(1,0)=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=0$, $\alpha_2=0$. Таким образом, равенство $L_4=L_1+L_2$ верно.

Аналогичные вычисления для случая б) дают $\alpha_1=\alpha_2=-1$, $\alpha_3=\alpha_4=1$, то есть элементы линейно зависимые, $L_4\neq L_1+L_2$.

Докажем теорему (о размерности пространства), используя разложение пространства в прямую сумму подпространств.

Теорема III.7. Все базисы *n*-мерного линейного пространства L^n состоят из *n* элементов.

Доказательство. Рассмотрим *n*-мерное линейное пространство L^n, $0 \le n < \infty$. Доказательство проведем методом математической индукции.

При $n = 0$, число базисных векторов равно 0, что следует из определения линейной комбинации. При $n = 1$, число базисных элементов $\overline{a_i}$ равно $i = 1$. Любой другой элемент получается умножением базисного на число $\alpha_1 \in R$, то есть $\alpha_1 \cdot \overline{a_1}$, следовательно, базис одномерного линейного пространства (прямая) состоит из одного элемента.

Предположим, что *n*-мерное линейное пространство L^n состоит из *n* базисных элементов. Докажем, что *n*+1-мерное линейное пространство L^{n+1} состоит из (*n*+1) базисного элемента. В самом деле, представим (*n*+1)-мерное пространство L^{n+1} в виде прямой суммы подпространств $L^1 + L^n = L^{n+1}$, где L^1 - одномерное линейное пространство, что возможно в силу предыдущей теоремы. Любой элемент пространства L^n получается умножением базисных элементов $\overline{a_i}$ на число $\alpha_i \in R$, $\alpha_i \ne 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. В силу свойств прямой суммы получаем, что любой базис пространства L^{n+1} состоит из *n*+1 элемента и число базисов в любом линейном пространстве $1 \le n < \infty$ бесконечно ▼.

Замечание. Между прочим, доказательство по индукции можно было начинать с $n = 0$, не акцентируя внимание на $n = 1$.

Замечание. Из теоремы, в силу метода индукции, следует, что потенциально, любое линейное пространство содержит столько базисных векторов какова его размерность.

Пример III.14. Рассмотрим три единичных взаимно перпендикулярных вектора $\overline{e_1} = (1,0,0)$, $\overline{e_2} = (0,1,0)$, $\overline{e_3} = (0,0,1)$. С точностью до изоморфизма, возможно разложение в прямую сумму $L^1 + L^2 = L^3$ по базисным векторам для L^1 любой из $\langle \overline{e_i} \rangle$, для L^2 - любая пара $\langle \overline{e_k}, \overline{e_j} \rangle$, $k \neq j \neq i$. Аналогично, можно составить базис бесконечномерного пространства.

§5. Евклидовы пространства

Определяя линейные пространства аксиоматически, то есть абстрактно, мы для наглядности пользовались обозначениями векторных пространств, что позволило нам более отчетливо представлять свойства линейных. Эффективность этого факта проявляется и в Евклидовых пространствах.

До сих пор мы изучали качественною сторону линейных пространств, то есть строение и взаимную зависимость элементов. Перейдем к изучению их другой стороны – количественным отношениям между элементами, их измерениям. По геометрическим изображениям, не более чем для 3-мерных векторных пространств, мы можем количественно сравнивать векторы по длине, углу, определять расстояния между ними и т.д. Однако для пространств большей размерности такой подход неприменим, а метод аналогий ненадежен, поскольку в них уже отсутствует наглядность. Хотелось бы внутри произвольных векторных (линейных) пространств иметь такое понятие, которое было бы неизменяемым (инвариантным) при линейных преобразованиях векторов. Такое понятие, являющееся отображением векторного пространства в свое скалярное поле, называется ***скалярным*** или внутренним ***произведением***.

Будем рассматривать линейные пространства над основным скалярным полем - полем действительных чисел R. Это наиболее важная практическая часть свойств линейных пространств. Именно здесь и проявляется более всего необходимость геометрической интерпретации их векторными.

Определение. В n-мерном линейном (вещественном) пространстве L определено скалярное умножение, если любой паре элементов $\overline{a}, \overline{b} \in L$ поставлено в соответствие действительное число $(\overline{a},\overline{b})$, называемое скалярным произведением элементов $\overline{a}$, $\overline{b}$, определяемое аксиомами

1) $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$;

2) $(\alpha\cdot\overline{a}+\beta\cdot\overline{b},\overline{c})=\alpha\cdot(\overline{a},\overline{c})+\beta\cdot(\overline{b},\overline{c})$, $\overline{c}\in L$, $\alpha,\beta\in R$;

3) $(\overline{a},\overline{a})>0$, если $\overline{a}\neq\overline{0}$ и $(\overline{a},\overline{a})=0$, если $\overline{a}=\overline{0}$.

Из аксиомы 2 следует, что $(\alpha\cdot\overline{a},\overline{b})=\alpha\cdot(\overline{a},\overline{b})$, тогда, если $\alpha=0$, то $(\overline{0},\overline{b})=0$, то есть, скалярное умножение нулевого элемента и любого элемента линейного пространства равно 0.

По определению положим $\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}=|\overline{a}|$.

Пусть $\overline{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\overline{a_i}$, $\overline{b}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\cdot\overline{b_j}$, $\alpha_i,\beta_j\in R$, тогда опираясь на аксиому 2, получим

$$(\overline{a},\overline{b})=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\overline{a_i},\sum_{j=1}^{n}\beta_j\cdot\overline{b_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_j\cdot(\overline{a_i},\overline{b_j})\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_j\cdot(\overline{a_i},\overline{b_j}). \qquad \text{(III.7)}$$

Линейное пространство, в котором определено скалярное умножение называется ***Евклидовым*** [3].

Пример III.15. Пусть в L задан базис из единичных векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, …, $\overline{e_n}$, для которых скалярное произведение $(\overline{e_i},\overline{e_j})=0$, если $i\neq j$ и $(\overline{e_i},\overline{e_i})=1$. Тогда, как следует из (III.7),

$$(\overline{a},\overline{b})=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\overline{e_i},\sum_{j=1}^{n}\beta_j\cdot\overline{e_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_j\cdot(\overline{e_i},\overline{e_j})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_i .$$

Выполнение аксиом 1) – 3) очевидно, то есть правая часть полученной формулы определяет скалярное умножение.

Следовательно, скалярное произведение можно вычислить по формуле

$$(\overline{a},\overline{b})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_i . \qquad \text{(III.8)}$$

Упражнение. Проверить выполнение аксиом 1) – 3) для формулы (III.8).

Формула (III.7) обобщает аксиому 2) скалярного произведения, на случай, когда в качестве базисных векторов выбраны произвольные векторы, однако, если базисные векторы единичны и их попарное скалярное произведение равно 0 (то есть, $\forall i \neq j$, $(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 0$, как в формуле (III.8)), то формулу (III.8) можно принять за определение скалярного произведения, хотя здесь мы привязаны к ортогональному базису.

Видно, что в n-мерном пространстве скалярное умножение можно задать различными способами; все зависит от выбранного базиса. Тем не менее, можно говорить, что в n-мерном векторном пространстве существует, в некотором смысле, о котором будем говорить ниже, единственное n-мерное Евклидово пространство. Подтвердим сказанное определениями, являющимися свойствами аксиом скалярного произведения.

Определение. Ненулевые векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0, т.е. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$.

Нуль-вектор ортогонален любому вектору.

Определение. Система векторов называется ***ортогональной*** системой, если все ее векторы ортогональны между собой.

Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима [3, 11].

Ранее, основываясь на знаниях разделов школьной математики, в примерах мы рассматривали векторы заданные координатами, и это не вызывало сомнений в справедливости такого задания. Далее будет показана непосредственная связь между различными координатными системами и скалярным произведением, здесь же отметим следующие два свойства Евклидова пространства [4, 5].

1. Всякое Евклидово пространство обладает ортогональными базисами, причем любой ненулевой вектор входит в состав некоторого ортогонального базиса.

Важным видом ортогональных базисов, соответствующих прямоугольным декартовым координатам, являются ***ортонормированные*** базисы, $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, …, $\overline{e_n}$.

Определение. Вектор $\overline{a}$ называется нормированным, если его скалярное умножение на себя равно единице, то есть,

$$\left(\overline{a},\overline{a}\right)=1.$$

Если $\overline{a}\neq 0$, то его нормированием называется вектор $\overline{b}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\overline{a},\overline{a}\right)}}\cdot\overline{a}$.

Определение. Базис $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, …, $\overline{e_n}$ n-мерного Евклидового пространства называется ортонормированным, если он

а) ортогонален, т.е. $\left(\overline{e_i},\overline{e_j}\right)=0$, $\forall i\neq j$;

б) нормирован, т.е. $\left(\overline{e_i},\overline{e_i}\right)=1$, $i=1,2,\ldots,n$.

Всякое Евклидово пространство обладает ортонормированным базисом.

Определение. Евклидовы пространства E_1 и E_2 называются изоморфными, если между их векторами можно установить взаимно-однозначное соответствие, такое что выполняются

а) E_1 и E_2 изоморфны, в смысле изоморфизма их как линейных пространств: сохраняются все линейные соотношения;

б) сохраняется скалярное произведение, то есть

$$\forall\,\overline{a_1},\overline{b_1}\in E_1 \text{ и } \overline{a_2},\overline{b_2}\in E_2 \Rightarrow \left(\overline{a_1},\overline{b_1}\right)=\left(\overline{a_2},\overline{b_2}\right),$$

если образами векторов $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$ являются векторы $\overline{a_2}$, $\overline{b_2}$, соответственно.

2. Отсюда следует, что любые Евклидовы пространства одинаковой размерности изоморфны. Обратное тоже справедливо.

Пример III.16. Доказать, что, если скалярное произведение любых двух векторов конечного Евклидова пространства выражается формулой (III.8), то базис, относительного которого взяты координаты, является ортонормированным.

Решение. Пусть $\{\overline{a_i}\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, базис n-мерного Евклидова пространства E_n и $\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{a_i}$, $\overline{b} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \overline{a_j}$. Сначала покажем, что он ортогонален. Имеем по формуле (III.7)

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{a_i}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \overline{a_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_j \cdot (\overline{a_i}, \overline{a_j}) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i \cdot (\overline{a_i}, \overline{a_i}).$$

Отсюда следует, что, если $i \neq j$, то $(\overline{a_i}, \overline{a_j}) = 0$, поэтому базис ортогонален.

Покажем, что он нормирован. Учитывая условие (формула (III.8)), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i \cdot (\overline{a_i}, \overline{a_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i .$$

Отсюда $(\overline{a_i}, \overline{a_i}) = 1$, $\forall i$, то есть базис нормированный.

Выполнение обоих условий ортонормированности базиса доказано ▼.

§6. Координатные системы

Координатные системы или системы координат - от латинских слов coordinatus - совместно, ordinatus – упорядоченный [3] (см стр. 78, [11]).

При решении различных задач, возникающих из потребностей практики, часто требуется знать характеристики положения тела в пространстве, его протяженность, взаимное расположение с другими телами и т.д.

Из соображений практической целесообразности, часто требуется рассматривать тело как точку на прямой, плоскости или в пространстве, а ее движение описывать вектором. Положение такой точки в пространстве можно полностью определить ее координатами относительно любого базиса, то есть упорядоченным набором чисел.

Пусть дана направленная геометрическая прямая линия (рис. III.3).

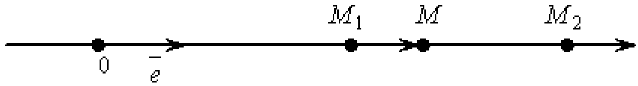


Рис. III.3.

Рассмотрим линейное пространство L векторов $\bar{a}$ на прямой. Зафиксируем на ней начало O и единичный вектор $\bar{e}$, где $|\bar{e}|=1$. Положение любой точки M на прямой, очевидно, однозначно определяется вектором $\overline{OM}$. Все векторы на прямой коллинеарны, следовательно, существует число $\alpha \in R$, такое, что $\bar{a} = \overline{OM} = \alpha \cdot \bar{e}$. Число α называется аффинной координатой. Таким образом, каждая точка M на прямой, в самом деле, однозначно определяется аффинной координатой α. При фиксированной аффинной системе координат существует однозначное соответствие между всеми действительными числами (числовая ось) и точками прямой линии.

В одномерном пространстве мы уже можем вычислять расстояние между двумя точками $\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1 M_2}|$, геометрически интерпретируя его как длину отрезка. В самом деле, из аксиом линейного пространства, имеем $\overline{OM_1} = \alpha_1 \cdot \bar{e}$, $\overline{OM_2} = \alpha_2 \cdot \bar{e}$, тогда $\overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \bar{e}$, отсюда длина $\rho(M_1, M_2) = |\overline{OM_2} - \overline{OM_1}| = |(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \bar{e}| = |\alpha_2 - \alpha_1| \cdot |\bar{e}| =$
$= |\alpha_2 - \alpha_1|$.

Аналогично, рассмотрим плоскость, на которой зафиксируем начало и неколлинеарные единичные векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ с общим началом, тогда получаем аффинную систему координат (рис. III.4), в которой любой вектор $\bar{a} = \overline{OM}$ однозначно определяется двумя координатами $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in R \times R = R^2$.

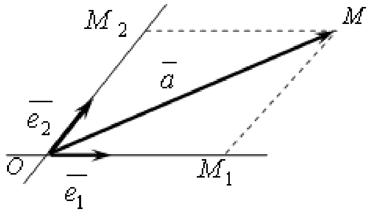


Рис. III.4

Векторы $\overline{OM_1} = \alpha_1 \cdot \overline{e_1}$, $\overline{OM_2} = \alpha_2 \cdot \overline{e_2}$, а $\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$. Тогда M_1 и M_2 называются аффинными проекциями вектора $\overline{a}$ на оси координат $np_{\overline{e_1}} \overline{OM_1} = \alpha_1 \cdot \overline{e_1}$, $np_{\overline{e_2}} \overline{OM_2} = \alpha_2 \cdot \overline{e_2}$. Если $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$, то $\overline{OM_1} = (\alpha_1, 0)$, $\overline{OM_2} = (0, \alpha_2)$. Каждый базисный вектор на своей оси образует собственную одномерную систему координат.

Задание упорядоченной пары чисел (α_1, α_2) однозначно определяет точку плоскости. Следовательно, при заданной системе координат существует взаимно-однозначное соответствие между всеми упорядоченными парами вещественных чисел и точками плоскости.

Аналогично вводится аффинная система координат в пространстве с базисными векторами $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$. Положение любой точки M в пространстве однозначно определяется вектором $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \alpha_3 \cdot \overline{e_3}$, где $\overline{a} = \overline{OM}$, а координаты называются α_1 - абсциссой, α_2 - ординатой, α_3 - аппликатой точки M. Соответствующим образом определяются проекции на оси.

Заметим, что проекцию точки в пространстве можно задать и на координатной плоскости.

Среди аффинных координат наибольшее распространение получили декартовые координаты, характеризующиеся тем, что базисные единичные векторы взаимно ортогональны и обычно обозначаются буквами $\bar{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Их преимущество по сравнению с другими координатными системами только в простоте получаемых формул, отражающих измерения и взаимное расположение объектов в линейных пространствах.

Метод координат – хорошо разработанный аппарат, исследующий геометрические объекты алгебраическими и математического анализа методами. Этот метод лежит в основе ***аналитической геометрии*** - прикладной математической науки, изучающей геометрические объекты аналитическими методами.

Как уже отмечалось, линейная алгебра широко применяется в различных науках и ее связь с аналитической геометрии вполне естественна. Можно сказать, что линейная алгебра является ее теоретической базой. В дальнейшем эта связь будет постоянно подтверждаться.

IV. Векторная алгебра

§1. Векторы

Величина, которая полностью определяется своим числовым значением, называется ***скалярной*** или ***скаляром*** (термин ввел У. Гамильтон в 1843 г.). Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют ***векторными***. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора, который ранее уже использовался в примерах.

Вектор – это направленный отрезок. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overline{AB}$. Вектор противоположный вектору $\bar{a}$ обозначается $(-\bar{a})$.

Длиной вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым*** вектором и обозначается $\bar{0}$ (или 0, когда нет сомнений в понимании обозначения). Нулевой вектор направления не имеет. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется ***ортом*** вектора $\bar{a}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства, то есть векторы определены с точностью до параллельного переноса.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

§2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения векторов и умножение их на число.

Геометрическая интерпретация. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим из нее вектор $\overline{OA}=\bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB}=\bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OB}=\bar{a}+\bar{b}$ (рис. IV.1).

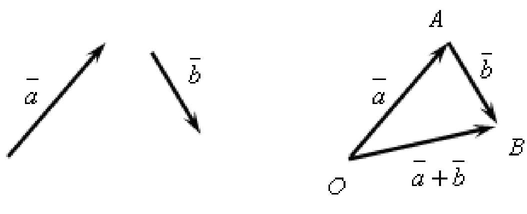


Рис. IV.1

Это правило сложения векторов называется правилом треугольника. Аналогично происходит сложение нескольких векторов (рис IV.2):

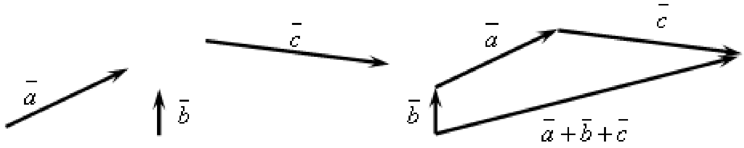


Рис. IV.2

Под разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c}=\bar{a}+(-\bar{b})$. На практике вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ откладывают из одной точки, концы соединяют и вектор имеет направление «к концу вектора $\bar{a}$».

Отметим, что в параллелограмме (рис. IV.3), построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая – разностью.

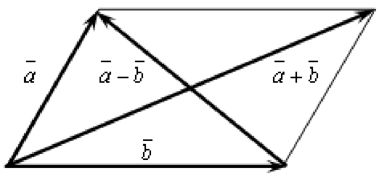


Рис. IV.3

Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр (число) λ, $\lambda \in R$, называется вектор $\lambda \cdot \bar{a}$, который имеет длину вектора $\bar{a}$, умноженную на λ, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$; 3) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \bar{a})=\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{a}$;

2) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$; 4) $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot \bar{a}=\lambda_1 \cdot \bar{a}+\lambda_2 \cdot \bar{a}$;

5) $\lambda \cdot (\bar{a}+\bar{b})=\lambda \cdot \bar{a}+\lambda \cdot \bar{b}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in R$.

Эти свойства позволяют проводить преобразования над векторами так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

§3. Проекция вектора на ось

Прямая, с заданной на ней точкой и единичным базисным вектором $\bar{e}$, называется ***осью.***

Ортогональной проекцией точки A на ось называется точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A.

Пусть в пространстве задана направленная прямая l. Проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на ось. Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M (рис. IV.4).

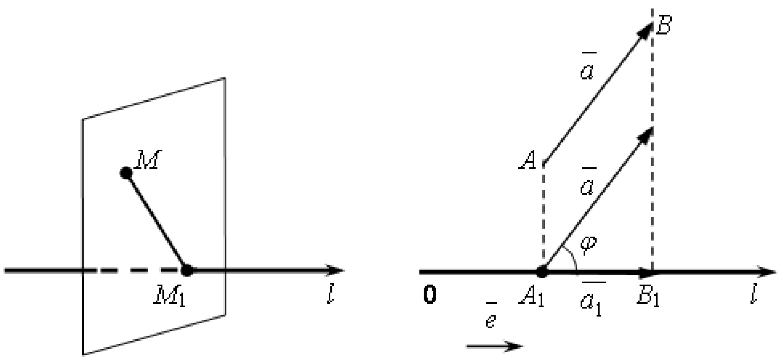


Рис. IV.4

Пусть $\overline{AB} = \bar{a}$ – произвольный вектор. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ на ось l называется координата вектора $\overline{A_1B_1} = \overline{a_1}$ относительно единичного вектора $\bar{e}$ оси, где A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось l, то есть, если $\overline{A_1B_1} = \lambda \cdot \bar{e}$, то число λ называется проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l, в направлении $\bar{e}$. Обозначение для проекции: $\lambda = np_{\bar{e}}\,\overline{AB}$.

Из правил сложения векторов и умножения вектора на число, заданных своими координатами, следует, что:

$\lambda = np_{\bar{e}}(k \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{b}) = k \cdot np_{\bar{e}}\bar{a} + \mu \cdot np_{\bar{e}}\bar{b}$, где $k, \mu \in R$.

Легко показать, что $\lambda = np_{\bar{e}}\overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\bar{e}$ и $\overline{AB}$, отсчитываемый по правилам тригонометрии: от вектора $\bar{e}$ против часовой стрелки до вектора $\overline{AB}$.

Следует помнить: проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол прямой.

Действия над векторами, заданными проекциями, выполняются аналогично действиям над матрицей-строкой (матрицей-столбцом).

Рассмотрим 3-мерное линейное пространство L и $\bar{a} \in L$ (рис. IV.5). Введем декартову систему координат *Oxyz*. Представим вектор $\bar{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}. \tag{IV.1}$$

Проекцией вектора $\bar{a} = \overline{OD}$ на ось *Ox* называется величина направленного отрезка $\overline{OD''}$ и записывается $np_{Ox}\bar{a} = |\overline{OD''}|$.

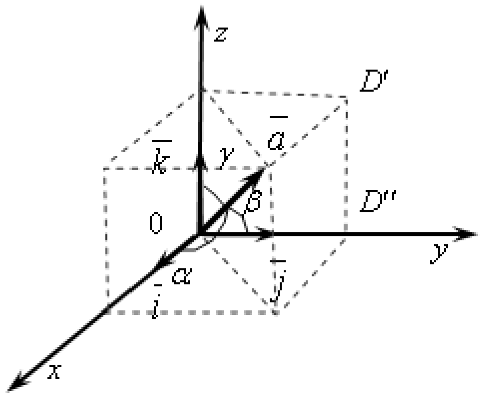


Рис. IV.5.

Так как, по определению, $DD'' \perp Ox$, то если $\angle\alpha$ - угол между осью *Ox* и вектором $\bar{a} = \overline{OD}$, то

$$np_{Ox}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha. \qquad \text{(IV.2)}$$

Аналогично определяются проекции вектора $\overline{a}$ на другие оси.

Сопоставляя (IV.1) и (IV.2) и, учитывая, что проекция есть направленный отрезок (если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$), то

$$x = np_{Ox}\overline{a},\ y = np_{Oy}\overline{a},\ z = np_{Oz}\overline{a}.$$

Заметим, что $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, получаем

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|}. \qquad \text{(IV.3)}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами. Возводя в квадрат и складывая, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|\overline{a}|^2} = 1,$$

то есть сумма квадратов направляемых косинусов равна 1:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad \text{(IV.4)}$$

Пусть углы вектора $\overline{a}$ с осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось имеем:

$$a_1 = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha,\ a_2 = |\overline{a}| \cdot \cos\beta,\ a_3 = |\overline{a}| \cdot \cos\gamma \cdot$$

или что, то же самое:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\overline{a}|}. \qquad \text{(IV.5)}$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$ ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$).

Линейные свойства проекции вектора на ось

Пусть дана ось *Ox* и векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$:

$$\overline{a_1} = x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k},\ \overline{a_2} = x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k}.$$

Тогда, как следует из свойств сложения векторов, имеем

1) $\overline{a_1} + \overline{a_2} = (x_1 + x_2) \cdot \overline{i} + (y_1 + y_2) \cdot \overline{j} + (z_1 + z_2) \cdot \overline{k}$;

2) $\alpha \cdot \overline{a}_1 = \alpha \cdot x_1 \cdot \overline{i} + \alpha \cdot y_1 \cdot \overline{j} + \alpha \cdot z_1 \cdot \overline{k},\ \alpha \in R$.

Отсюда, как следует из (IV.2), получаем

a) $np_{Ox}\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}\right)=np_{Ox}\overline{a_1}+np_{Ox}\overline{a_2}$;

b) $np_{Ox}\left(\alpha\cdot\overline{a_1}\right)=\alpha\cdot np_{Ox}\overline{a_1}$.

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\overline{a}=\overline{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Имеем:

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала*.

Зададим в пространстве декартову систему координат $Oxyz$ и вектор $\overline{M_1M_2}$, где координаты точек $M_1=M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2=M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Проекция вектора $\overline{M_1M_2}$ на ось Ox (рис. IV.6) определяется

$$np_{Ox}\overline{M_1M_2}\overset{\Delta}{=}|\overline{M_1M_2}|\cdot\cos\varphi. \qquad \text{(IV.6)}$$

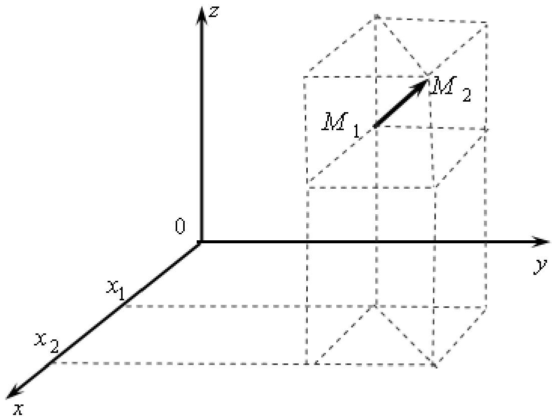


Рис. IV.6.

Тригонометрическая формула (IV.6) устанавливает связь между геометрическим образом отрезка и его проекцией на ось Ox, которая в алгебраической форме имеет вид

$$|\overline{M_1M_2}|\cdot\cos\varphi=x_2-x_1. \qquad \text{(IV.7)}$$

Знак правой части в (IV.7) определяется $\cos\varphi$, для $\varphi \in [0, \pi]$. Таким образом,

$$np_{Ox}\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1, \quad \text{(IV.8 а)}$$

$$np_{Oy}\overline{M_1M_2} = y_2 - y_1, \quad \text{(IV.8 б)}$$

$$np_{Oz}\overline{M_1M_2} = z_2 - z_1. \quad \text{(IV.8 в)}$$

Для нахождения длины отрезка $\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1M_2}|$ воспользуемся теоремой Пифагора, получим

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad \text{(IV.9)}$$

Деление отрезка в данном отношении

Рассмотрим в пространстве вектор $\overline{M_1M_2}$ (рис. IV.7). Пусть M – внутренняя точка направленного отрезка, тогда $M_1M / MM_2 = \lambda$. Число λ называется отношением, в котором точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$.

Вычислим координаты точки $M = M(x, y, z)$, которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ, где $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Учитывая формулы (IV.8 а) – (IV.8 в), получаем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda.$$

Приравнивая последовательно дроби к числу λ, будем иметь

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}. \quad \text{(IV.10)}$$

Формулы (IV.10) называются формулами деления отрезка в отношении λ.

Пример IV.1. Для деления отрезка пополам, полагая $\lambda = 1$, получаем координаты точки $M = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Замечание. Для положительных значений λ, точка M лежит между точками M_1 и M_2, для отрицательных – вне отрезка $\overline{M_1M_2}$. Для $\lambda = -1$ формула (IV.10) не имеет смысла.

Упражнение. Получить формулы (IV.5) используя преобразование подобия.

Пример IV.2. Начало вектора находится в точке $M(3,1,12)$, конец в точке $K(6,5,0)$. Найти координаты вектора $\overline{MK}$, его длину и направление.

*Решение***.** Для того, чтобы найти координаты вектора $\overline{MK}$, нужно от координат конца вычесть координаты начала вектора:

$$\overline{MK} = (6-3, 5-1, 0-12) = (3, 4, -12) = 3 \cdot \bar{i} + 4 \cdot \bar{j} - 12 \cdot \bar{k}.$$

Найдем длину вектора: $|\overline{MK}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$.

Теперь по формулам (IV.10) имеем: $\cos\alpha = 3/13$, $\cos\beta = 4/13$, $\cos\gamma = -12/13$.

§4. Базис системы векторов

Определение. Система векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ называется линейно зависимой, если существуют такие константы α_1, α_2, α_3, не все равные нулю, что имеет место равенство

$$\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \alpha_3 \cdot \overline{a_3} = \bar{0}.$$

Если из этого равенства с необходимостью следует, что если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то система называется линейно независимой.

Определение. Базисом в 3-х мерном пространстве называется любая упорядоченная система из трех линейно независимых векторов пространства (см стр. 77, §2).

Теорема IV.1. Векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3) \in L^3$ образуют базис, тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Доказательство.

1) *Необходимость.* Пусть векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in L^3$ образуют базис, тогда по определению эти векторы линейно независимые, а, следовательно, равенство

$$\alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c} = \overline{0},$$

которое эквивалентно однородной системе

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 = 0, \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 = 0, \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 = 0, \end{cases}$$

выполняется только в случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное нулевое решение только в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

По 1-му свойству определителей (стр. 48) получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Необходимость доказана.

2) *Достаточность.* Пусть для векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ пространства L^3 выполняется

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Проверим линейную независимость векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in L^3$, составим равенство $\alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c} = \overline{0}$, рассмотрим однородную систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 = 0, \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 = 0, \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 = 0, \end{cases}$$

так как определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы, не равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то эта система имеет единственное нулевое решение, по определению, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in L^3$ образуют систему линейно независимых векторов, а, следовательно, и базис в пространстве L^3. Теорема доказана.

Если векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ образуют базис, а вектор $\overline{a}$ представляется в виде $\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \alpha_3 \cdot \overline{a_3}$, тогда числа α_1, α_2, α_3 называются координатами вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, то есть $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Пример IV.3. Даны три векторы $\overline{p} = (3, 2, 4)$, $\overline{q} = (4, 3, 5)$, $\overline{r} = (7, 5, -2)$. Показать, что они образуют базис и найти разложение вектора $\overline{a} = (4, 3, 2)$ в этом базисе.

Решение. Покажем, что вектора $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ образуют базис. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 70 + 80 - 84 - 75 + 16 = -11 \neq 0.$$

Так как Δ≠0, то, по теореме IV.1, векторы $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ образуют базис. Отсюда получаем разложение вектора $\overline{a}$ по базисным векторам $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$:

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{p} + \alpha_2 \cdot \overline{q} + \alpha_3 \cdot \overline{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты α_1, α_2, α_3 вектора $\bar{a}$ в новом базисе, необходимо найти решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -11, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Так как, $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение: $\alpha_1 = -\dfrac{3}{11}$, $\alpha_2 = \dfrac{8}{11}$, $\alpha_3 = \dfrac{3}{11}$. То есть,

$$\bar{a} = -\frac{3}{11} \cdot \bar{p} + \frac{8}{11} \cdot \bar{q} + \frac{3}{11} \cdot \bar{r}.$$

Определение. Совокупность всех 3-х мерных векторов с действительными координатами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, образует 3-х мерное векторное пространство.

§5. Скалярное произведение векторов

До сих пор мы изучали понятие линейности и не касались количественных характеристик: угла и длины, что особенно важно для приложений. Для лучшего понимания дальнейшего, рассмотрим двумерное линейное пространство над полем действительных чисел, с введенной в нем декартовой прямоугольной системой координат [11] (см стр. 88, §5).

Пусть $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{b} = (b_1, b_2) \in L$. Тогда длина отрезка, соединяющего концы векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, находится по очевидной формуле $\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$. Для расстояния до $\overline{a}$ от начала $\overline{0}=(0,0)$ введем обозначения $|\overline{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$. Перейдем к углам между векторами. Если φ - угол между отрезком, соединяющим *O* с $\overline{a}$ и положительной осью *Ox*, а Θ - угол между отрезком, соединяющим *O* с $\overline{b}$ и той же осью, то углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будет $\angle(\varphi-\Theta)$, тогда

$$\cos(\varphi-\Theta)=\cos\varphi\cdot\cos\Theta+\sin\varphi\cdot\sin\Theta=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

Введем обозначение

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2.$$

С помощью полученного выражения можно очень простыми формулами выразить углы между векторами их длины.

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, имеем по определению

$$\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|\cdot\cos\varphi, \tag{IV.11}$$

где φ - угол между векторами $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$.

Пусть $np_{\overline{a}_1}\overline{a_2}$ - проекция вектора $\overline{a}_2$ в направлении вектора $\overline{a}_1$, тогда $OM=np_{\overline{a}_1}\overline{a_2}$ (рис. IV.7).

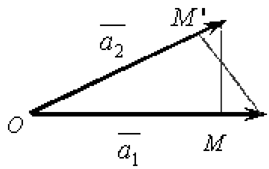


Рис. IV.7.

Отсюда $OM=|\overline{a_2}|\cdot\cos\varphi$, следовательно, $\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=|\overline{a_1}|\cdot np_{\overline{a}_1}\overline{a_2}$, аналогично получаем

$$\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=|\overline{a_2}|\cdot np_{\overline{a}_2}\overline{a_1}\text{, где } np_{\overline{a}_2}\overline{a_1}=MM'.$$

Геометрические свойства скалярного произведения [4]

1) Необходимым и достаточным условием ортогональности двух ненулевых векторов является равенство 0 их скалярного произведения.

Замечание 1. Если хотя бы один из векторов равен нулю, то будем считать, что нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Замечание 2. Под углом между векторами будем считать тот угол, который не превосходит π.

2) Два ненулевых вектора составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

Алгебраические свойства скалярного произведения [4]

1) $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = \overline{a_2} \cdot \overline{a_1}$ (коммутативность);

2) $(\alpha \cdot \overline{a_1}) \cdot \overline{a_2} = \alpha(\overline{a_1} \cdot \overline{a_2})$ (ассоциативность);

3) $(\overline{a_1} + \overline{a_2}) \cdot \overline{a} = \overline{a_1} \cdot \overline{a} + \overline{a_2} \cdot \overline{a}$ (дистрибутивность);

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$, если $\overline{a}$ нулевой, и $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$ в противном случае.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть $\overline{a}_1 \in L$, $\overline{a}_2 \in L$, тогда получаем

$$\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = (x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k}) \cdot (x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k}) =$$
$$= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2,$$

учитывая, что $\overline{i} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k} = 1$, $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{i} \cdot \overline{k} = 0$.

Определение. Если в Евклидовом пространстве задана декартовая система координат, то скалярное произведение векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ называется число, заданное суммой произведений соответствующих координат, то есть

$$\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \qquad \text{(IV.12)}$$

Из свойств скалярного произведения векторов и формулы (IV.12) следует необходимое и достаточное условие ортогональности векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Из первого определения скалярного произведения векторов и формулы (IV.11), следует, что

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad \text{(IV.13)}$$

Пример IV.4. Найти такое число λ, для которого векторы $\overline{a} = (-3, -2, 1-\lambda)$ и $\overline{b} = (4, -2+\lambda, 6)$ ортогональны.

*Решение***.** Скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю, поэтому $(\overline{a},\overline{b}) = -3\cdot 4 + (-2)\cdot(-2+\lambda) + (1-\lambda)\cdot 6 =$ $= -12 + 4 - 2\lambda + 6 - 6\lambda = -8\lambda - 2 = 0$, получили линейное алгебраическое уравнение относительно λ, отсюда $-8\lambda = 2$ или $\lambda = -1/4$, то есть при $\lambda = -1/4$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будут ортогональны. В самом деле, имеем $(\overline{a},\overline{b}) = -3\cdot 4 + (-2)\cdot(-9/4) + (5/4)\cdot 6 = 0$.

Пример IV.5. Найти углы и длины сторон треугольника с вершинами $A(0,3)$, $B(4,7)$, $C(7,4)$.

*Решение***.** Определим координаты векторов: $\overline{AB} = (4-0, 7-3) = (4,4)$, $\overline{AC} = (7-0, 4-3) = (7,1)$, $\overline{BC} = (7-4, 4-7) = (3,-3)$, так как угол A образован векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, то

$$\cos A = \frac{(\overline{AB},\overline{AC})}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{4\cdot 7 + 4\cdot 1}{\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{32}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{50}} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}.$$

По таблицам находим

$$\angle A = \arccos(0{,}8) \approx 37^\circ.$$

Аналогично, $\cos B = \dfrac{(\overline{BA},\overline{BC})}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \dfrac{-12+12}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{18}} = 0$, значит $\angle B$ – прямой. Поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle C \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$. Длины сторон – это длины соответствующих векторов, поэтому:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{32} \approx 5{,}66;\ AC = |\overline{AC}| = \sqrt{50} \approx 7{,}07;$$

$$BC = |\overline{BC}| = \sqrt{18} \approx 4{,}24.$$

Пример IV.6. Найти скалярное произведение векторов $2\cdot\bar{a}+3\cdot\bar{b}$ и $\bar{a}-4\cdot\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=0{,}5$, а угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 60°.

Решение. Имеем, последовательно:

$$(2\cdot\bar{a}+3\cdot\bar{b},\bar{a}-4\cdot\bar{b})=2\cdot(\bar{a},\bar{a})+3\cdot(\bar{b},\bar{a})-8(\bar{a},\bar{b})-12\cdot(\bar{b},\bar{b})=$$

$$=2\cdot|\bar{a}|^2-5\cdot(\bar{a},\bar{b})-12\cdot|\bar{b}|^2=2\cdot 2^2-5\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 60^\circ-$$

$$-12\cdot(0{,}5)^2=8-5\cdot 2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5-12\cdot 0{,}25=8-2{,}5-3=2{,}5\,.$$

§6. Векторное произведение векторов [4]

Векторы называются упорядоченными, если указано место каждого из векторов. Упорядоченная тройка векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется правой, если с конца вектора $\bar{k}$ поворот на меньший угол от вектора $\bar{i}$ к вектору $\bar{j}$ осуществляется против часовой стрелки.

В дальнейшем будем рассматривать только правые тройки базисных векторов.

Определение. Векторным произведением вектора $\bar{a}_1$ на вектор $\bar{a}_2$ называется вектор $\bar{a}=\overline{a_1}\times\overline{a_2}$, удовлетворяющий условиям

1) вектор $\bar{a}$ направлен так, что $\bar{a}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ - правая тройка;

2) $\bar{a}\perp\overline{a_1}$, $\bar{a}\perp\overline{a_2}$;

3) $|\bar{a}|=\left|\overline{a_1}\times\overline{a_2}\right|=|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|\cdot\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$.

Геометрические свойства векторного произведения

1) Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух ненулевых векторов является равенство нулю их векторного произведения.

2) Модуль векторного произведения $\overline{a_1}\times\overline{a_2}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$.

Определение. Ортом ненулевого вектора $\bar{a}$ называется единичный вектор, коллинеарный, одного направления с вектором $\bar{a}$.

3) Если $\bar{e}$ - орт, а S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, то имеет место равенство

$$\overline{a_1} \times \overline{a_2} = S \cdot \bar{e}.$$

Алгебраические свойства векторного произведения

1) $\overline{a_1} \times \overline{a_2} = -\overline{a_2} \times \overline{a_1}$;

2) $(\alpha \cdot \overline{a_1}) \times \overline{a_2} = \alpha(\overline{a_1} \times \overline{a_2})$

3) $(\overline{a_1} + \overline{a_2}) \times \overline{a_3} = \overline{a_1} \times \overline{a_3} + \overline{a_2} \times \overline{a_3}$;

4) $\overline{a_1} \times \overline{a_1} = \bar{0}$.

Докажем свойство 1. Если векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ коллинеарны, тогда $\overline{a_1} \times \overline{a_2} = \overline{a_2} \times \overline{a_1} = \bar{0}$, то есть $\overline{a_1} \times \overline{a_2} = -\overline{a_2} \times \overline{a_1}$. Если векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ не коллинеарные, то при очевидной одинаковой длине $\left|\overline{a_1} \times \overline{a_2}\right| = \left|\overline{a_2} \times \overline{a_1}\right|$ выполняется $\overline{a_1} \times \overline{a_2} = -\overline{a_2} \times \overline{a_1}$, иначе обе тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ и $\bar{a}$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_1$ были бы правыми, что не возможно в силу их противоположной ориентации.

Упражнение. Доказать свойства 2) – 4).

Выразим векторное произведение векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ через их координаты. Имеем

$$\overline{a_1} \times \overline{a_2} = (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) \times (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

При доказательстве достаточно заметить, что $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}$, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$, $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{j} = \bar{0}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$,

$\overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i}$, $\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0}$. Далее раскладывая определитель по элементам 1-ой строки, получаем требуемое.

Если векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Замечание. Допускается иметь в знаменателе 0, если всякую пропорцию $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ понимать как $a\cdot d=b\cdot c$.

Пример IV.7. Найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$.

*Решение***.** Воспользуемся свойством 4) векторного произведения: площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}=(2,-2,-3)$ и $\overline{AC}=(4,0,6)$. Вычислим их векторное произведение, имеем:

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}\cdot(-12-0)-\overline{j}\cdot(12-(-12))+\overline{k}\cdot(0-(-8))=$$

$$=-12\cdot\overline{i}-24\cdot\overline{j}+8\cdot\overline{k}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине величины этого векторного произведения:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\frac{28}{2}=14\,кв.ед.$$

§7. Смешанное произведение векторов [4]

Пусть даны три вектора $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$. Если $\overline{a}_1$ векторно умножить на $\overline{a}_2$, а затем скалярно на вектор $\overline{a}_3$, то получим число $(\overline{a}_1\times\overline{a}_2)\cdot\overline{a}_3$, называемое смешанным произведением.

Геометрически смешанное произведение векторов $(\overline{a}_1\times\overline{a}_2)\cdot\overline{a}_3$ равно объему параллелепипеда, построенному на этих векторах, если они образуют правую тройку, и со знаком «–», в противном случае.

Выразим смешанное произведение векторов $\overline{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ через их координаты, тогда имеем

$$(\overline{a_1} \times \overline{a_2}) \cdot \overline{a_3} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad \text{(IV.14)}$$

Для доказательства достаточно учесть

$$(\overline{a_1} \times \overline{a_2}) \cdot \overline{a_3} = x_3 \cdot (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) + y_3 \cdot (z_1 \cdot x_2 - z_2 \cdot x_1) +$$
$$+ z_3 \cdot (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot x_1),$$

а затем разложить определить по 3-ьей строке и обнаружить совпадение.

Теорема IV.2. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство 0 их смешанного произведения.

Следствие. Смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно 0.

Для доказательства достаточно воспользоваться условием равенства 0 смешанного произведения и воспользоваться формулой (IV.14).

Пример IV.8. Найти объём тетраэдра, вершинами которого являются точки $A(1,1,2)$, $B(2,3,-1)$, $C(2,-2,4)$, $D(-1,1,3)$.

*Решение***.** Объём тетраэдра составляет шестую часть объёма параллелепипеда построенного на векторах $\overline{AB} = (1, 2, -3)$, $\overline{AC} = (1, -3, 2)$ и $\overline{AD} = (-2, 0, 1)$. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 8 - (-18 + 0 + 2) = 5.$$

Таким образом, объем тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{5}{6} \textit{ куб. ед.}$$

V. Аналитическая геометрия [4]

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, изучающий геометрические образы алгебраическими средствами, основывающимися на методе координат.

§1. Системы координат на плоскости

Под ***системой координат на плоскости*** понимают правило, устанавливающее взаимно однозначное соотношение между точками плоскости и упорядоченными парами чисел, которые называют ***координатами*** исходной ***точки***.

Проведем через фиксированную на плоскости точку *O* две несовпадающие прямые с заданными направлениями и единичными отрезками. Если прямые пересекаются под прямым углом, то введенная система координат называется ***декартовой*** или ***прямоугольной***, в противном случае – ***аффинной*** или ***косоугольной***. Первая координата точки в такой системе координат называется ***абсциссой***, вторая – ***ординатой***. Точка пересечения координатных осей называется ***началом координат***.

В декартовой системе координат, обычно, горизонтальную ось *Ox* называют осью абсцисс, *Oy* – осью ординат.

Рассмотрим точку *M* на плоскости *Oxy* (рис. V.1). Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки *M*. Чтобы найти ее координаты неодходимо из этой точки опустить перпендикуляры на каждую из осей. Числа, соответствующие полученным точкам пересечения, и будут координатами точки $M(x_0, y_0)$. Если точка лежит на оси *Ox*, то ее вторая координата равна 0, если на оси *Oy*, то – первая.

Другой практически важной системой координат является ***полярная***. Возьмем на плоскости геометрическую прямую *Ox* и зафиксируем на ней декартову систему координат *Oxy*. Начало назовем полюсом, а координатную ось – полярной осью. Рассмотрим произвольную точку *M* на плоскости. Ее положение будет однозначно определено, если задать расстояние ρ от начала координат до точки *M* и угол φ, на который нужно повернуть ось Ox вокруг точки O против часовой стрелки до совмещения его направления с отрезком $\overline{OM}$ (рис. V.1).

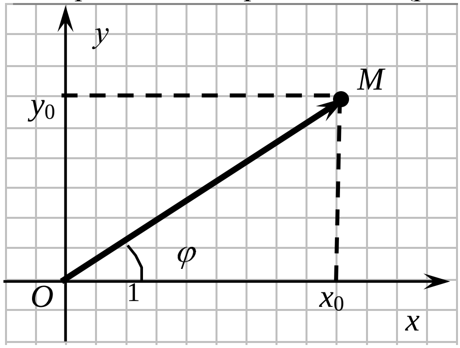


Рис. V.1

Полярными координатами точки M на плоскости называется пара чисел (ρ, φ). Число ρ называется полярным радиусом, а число φ - полярным углом. Обычно считают, что

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Если точка M совпадает с началом, то угол φ считается ***неопределенным***.

С каждой полярной системой координат связана декартовая (рис. V.1). Начало совпадает с полюсом, ось абсцисс – с полярной осью, а ось ординат совпадает с полярной осью, повернутой вокруг полюса на угол $\varphi = \pi / 2$.

Пусть точка M в декартовой системе координат имеет координаты (α, β), тогда прямая связь с полярными запишется в виде

$$\alpha = \rho \cdot \cos\varphi,\ \beta = \rho \cdot \sin\varphi.$$

Для обратной зависимости имеем соотношения

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2,\ \varphi = arctg\,\frac{\beta}{\alpha},$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},\ \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Пример V.1. Кривая в полярной системе координат задана уравнением $\rho = a \cdot \cos 2\varphi$, где $a = const \ge 0$. Требуется построить график в полярной системе координат и записать уравнение этой кривой в декартовой системе координат.

Зафиксируем декартову систему координат *Oxy* и на оси абсцисс зададим полярную ось *Ox* с одинаковым масштабом с декартовой системой (рис. V.2).

Составим табл. 1 с ценой деления $22{,}5^\circ = \frac{\pi}{8}$.

Таблица V.1

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$
ρ	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	-	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0

φ	$\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$
ρ	-	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$

Каждую пару (ρ,φ) на полярной плоскости и соединим плавной кривой, которая называется «двухлепестковой розой». Часто для построения графика достаточно рассмотреть известные значения тригонометрических функций 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и кратные им.

В декартовых координатах двухлепестковая роза с помощью формул перехода записывается уравнением

$$\sqrt{x^2+y^2}=a\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$$

или, после элементарных преобразований, получим

$$\left(x^2+y^2\right)^3=a\left(x^2-y^2\right)^2.$$

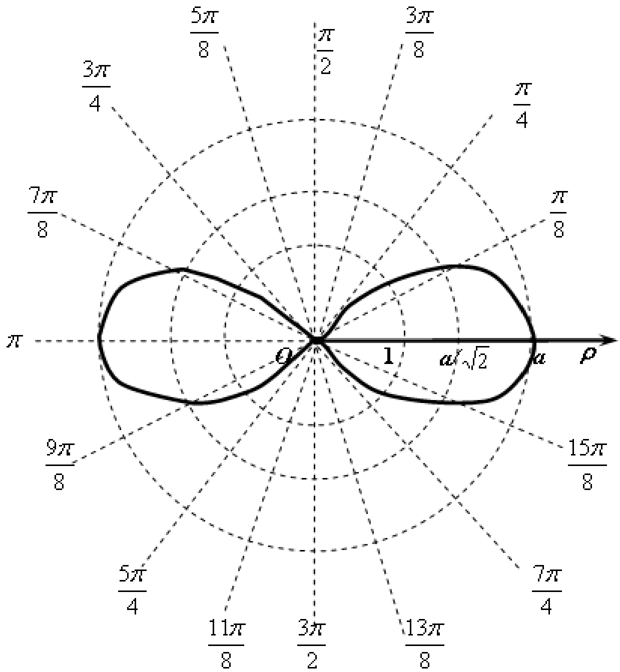


Рис. V.2

Ясно, что в полярной системе координат построение графиков, относящихся к классу подобных кривых, менее трудоемко, чем в декартовой системе координат.

§2. Уравнение линии на плоскости

Уравнение линии на плоскости R^2 задается равенствами: а) в неявном виде $F(x, y) = 0$, б) разрешенном, относительно y: $y = f(x)$, которым удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Пример V.2. Лежат ли точки $M(-2,1)$ и $K(1,1)$ на линии $2x + 3y - 5 = 0$?

*Решение***.** Подставим координаты точки M в уравнение линии: $2\cdot(-2)+3\cdot 1-6=-6\neq 0$ – значит точка M не лежит на заданной линии; теперь подставим координаты точки K: $2\cdot 1+3\cdot 1-5=0$ – координаты этой точки удовлетворяют уравнению линии, и значит точка K лежит на заданной прямой.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, то есть сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных корней, то линии не пересекаются.

Аналогичным образом вводится понятие линии в полярной системе координат. Уравнение $R(\rho,\varphi=0)$ называются уравнением данной линии в полярной системе координат, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

где x, y – координаты произвольной точки $M(x,y)$, лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая параметром линии. Такой способ задания линии называется ***параметрическим***.

Линию на плоскости можно задать и векторным уравнением $\bar{r}=\bar{r}(t)$, где t – скалярный переменный параметр. Каждому значению $t=t_0$ соответствует определенный вектор $\bar{r}(t_0)$ на плоскости. При изменении параметра t конец вектора $\bar{r}=\bar{r}(t)$ опишет некоторую линию.

Векторное и параметрическое уравнения имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются уравнениями движения, а линия – траекторией точки, параметр t, при этом, интерпретируется как время.

В аналитической геометрии на плоскости возникают ***две основные задачи***: *зная геометрические свойства кривой – найти ее уравнение и зная уравнение кривой, изучить ее форму и свойства* [4].

§3. Уравнение поверхности и линии в пространстве

Поверхность в пространстве R^3 можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, сфера радиуса R с центром в точке O есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O на расстоянии R.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z – их координатами: ***абсциссой***, ***ординатой*** и ***аппликатой***. Координатами точки $M(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве (рис. V.3) являются числа, соответствующие точкам пересечения координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz с координатными осями Ox, Oy, Oz.

Свойство общее для всех точек поверхности можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности [4].

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются текущими координатами точек поверхности. Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как геометрическое место точек, принадлежащее обеим поверхностям.

Если $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ – уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ - уравнение линии в пространстве.

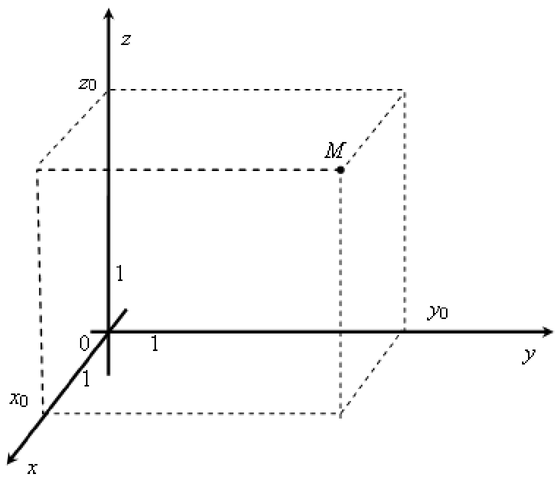


Рис. V.3

Например, $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ есть уравнение оси Oz.

Линию в пространстве можно задать как траекторию движения некоторой точки. В этом случае ее задают векторным уравнением $r=r(t)$ или параметрическими уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

§4. Прямая и плоскость в линейном пространстве

Мы будем рассматривать евклидовое векторное линейное пространство, в котором изучаются прямая линия и плоскость.

При изучении линейного пространства было введено понятие подпространства, определенное как линейное пространство, состоящее, может быть, из меньшего числа базисных векторов. Это означает, что все свойства пространства выполняются и для подпространства. В частности, любое подпространство должно содержать нуль-вектор. Если в линейном пространстве введена система координат, то не всякая прямая линия и плоскость образуют подпространство. Ими будут прямая и плоскость, проходящие через начало. Этот факт говорит о том, что для изучения различных видов прямых и плоскостей необходимо введение координатной системы.

Пусть на плоскости зафиксирована декартова система координат Oxy и задана в ней прямая l (рис. V.4). Пусть дан ненулевой вектор $\bar{n} = (A, B)$ перпендикулярный прямой l, то есть $\bar{n} \perp l$. Вектор $\bar{n}$ назовем нормальным (или нормалью) для прямой l. Все другие нормальные векторы к l будут коллинеарны вектору $\bar{n}$.

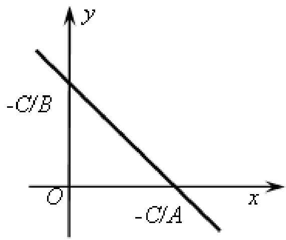


Рис. V.4.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ - точка на прямой. Любая из точек $M(x, y)$ прямой обладает тем свойством, что векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение

$$\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0. \tag{V.1}$$

Так как $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, то из формулы (V.1) получаем

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

или

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0, \tag{V.2}$$

где $C = -(A \cdot x_0 + B \cdot y_0)$.

Уравнение называется общим уравнением прямой, так как всякое уравнение вида (V.2) определяет прямую, и наоборот.

Рассмотрим линейную функцию двух переменных. Пусть ее вид

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0. \qquad \text{(V.3)}$$

Но этой функции «тесно» на плоскости. Пусть дано линейное векторное трехмерное пространство . Введем декартову систему координат *Oxyz* и по аналогии с предыдущим зададим нормальный вектор $\overline{n}=(A,B,C)$. Поскольку областью определения уравнения (V.3) является геометрическая плоскость, то уравнение (V.3) определяет плоскость П в пространстве и $\overline{n}\perp\Pi$.

После задания точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, учитывая условие перпендикулярности векторов, для любой точки $M(x,y,z)$, лежащей на плоскости П, аналогично будем иметь

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0, \qquad \text{(V.4)}$$

обозначая $D=-(A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0)$, получаем уравнение (V.3), которое назовем общим уравнением плоскости. Таким образом, по заданному нормальному вектору и точке M_0 на прямой *l*, мы однозначно можем определить прямую на плоскости и плоскость в пространстве.

Выясним, как связаны между собой два общих уравнения, определяющие одну и ту же плоскость или прямую.

Пусть имеем систему

$$\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0, \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0, \end{cases} \qquad \text{(V.5)}$$

$A_i^2+B_i^2+C_i^2\neq 0$, $i=1,2$, и ненулевые нормальные векторы $\overline{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$, $\overline{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$. Так как все нормальные векторы к заданной точке коллинеарны, то их координаты пропорциональны, то положим, например,

$$\overline{n_1}=t\cdot\overline{n_2}$$

или, что то же самое

$$A_1=t\cdot A_2,\ B_1=t\cdot B_2,\ C_1=t\cdot C_2,\ t\in R.$$

Умножая второе уравнение формулы (V.5) на t и складывая с первым, получим

$$D_1 = t \cdot D_2 .$$

Вывод: коэффициенты общих уравнений одной плоскости пропорциональны.

Определение. Общее линейное уравнение называется полным если все его коэффициенты ненулевые.

Пример V.3. 1) По внешнему виду уравнения (V.5) могут быть полными.

2) Уравнение плоскости (рис. V.5)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

соответствует определению и потому полное.

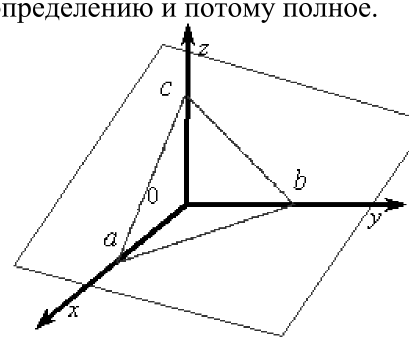


Рис. V.5

Пример V.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;1)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n} = (5;1;-4)$.

Решение. Используя формулу (V.4), имеем $5 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y+3) - 4 \cdot (z-1) = 0$, откуда после преобразований получим $5 \cdot x + y - 4 \cdot z - 3 = 0$.

Это уравнение первой степени и есть искомое уравнение плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$. Если точки не лежат на одной прямой, то через них всегда можно провести единственную плоскость. Обозначим $(x,\ y,\ z)$ координаты произвольной точки M пространства и рассмотрим три вектора:

$\overline{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$. Точка M лежит на плоскости $M_1M_2M_3$ в том, и только в том случае, когда перечисленные три вектора компланарны, а значит $(\overline{M_1M},\overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3})=0$, т.е. определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример V.5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$ и $C(2,0,2)$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости, тогда векторы $\overline{AM}=(x-3,y+1,z-2)$, $\overline{AB}=(1,0,-3)$, $\overline{AC}=(-1,1,0)$ компланарны, поэтому:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Вычисляя определитель по правилу треугольников, получим: $3\cdot(x-3)+3\cdot(y+1)+1\cdot(z-2)=0$ или $3\cdot x+3\cdot y+z=8$.

Теорема V.1. В пространстве R^3 всякая плоскость выражается уравнением первой степени $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A,B,C,D\in R$.

Доказательство. В предыдущем пункте было установлено, что всякая плоскость может быть задана уравнением вида (V.4):

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0,\ A,B,C\in R.$$

Раскрыв скобки и обозначив $-A\cdot x_0-B\cdot y_0-C\cdot z_0=D$, получим общее уравнение первой степени относительно x, y, z: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, эквивалентное уравнению (V.4). Поэтому оно определяет ту же плоскость, что и уравнение (V.4), и называется ***общим уравнением плоскости***. Коэффициенты при переменных в этом уравнении сохраняют тот же геометрический смысл, что и в равенстве (V.4), то есть являются координатами нормального вектора $\overline{n}=(A;B;C)$ плоскости. Так как нормальный вектор плоскости является ненулевым, то коэффициенты *A*, *B* и *C* не могут быть одновременно равны нулю. Итак, мы доказали, что всякая плоскость в R^3 определяется уравнением первой степени относительно переменных координат *x*, *y*, *z*.

Теорема V.2 (обратная). Всякое линейное уравнение с тремя переменными $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A,B,C,D\in R$, определяет плоскость в пространстве R^3, если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю.

Доказательство. Пусть x_0, y_0, z_0 – какое-либо решение данного уравнения. Тогда $A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D=0$, откуда $D=-(A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0)$. Подставляя в данное уравнение вместо *D* его значение и группируя члены, получим

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0\,.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\overline{n}=(A;B;C)$. Следовательно, и равносильное ему уравнение $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ определяет плоскость [перпендикулярную вектору $\overline{n}=(A;B;C)$].

Пример V.6. Построить в прямоугольной системе координат плоскость, заданную уравнением $3\cdot x-2\cdot y+z-6=0$.

*Решение***.** Для построения плоскости необходимо и достаточно знать какие-либо три ее точки (не лежащие на одной прямой), например точки пересечения плоскости с осями координат. Полагая в заданном уравнении $x=y=0$, получим $z=6$. Следовательно, заданная плоскость пересекает ось *Oz* в точке $A(0{,}0{,}6)$. Аналогично, при $x=z=0$ получим $y=-3$, то есть точку $B(0,-3{,}0)$; при $y=z=0$ получим $x=2$, то есть точку $C(2{,}0{,}0)$. По трем точкам $A(0{,}0{,}6)$, $B(0,-3{,}0)$, $C(2{,}0{,}0)$ строим заданную плоскость (рис. V.6).

Частные случаи общего уравнения плоскости. Рассмотрим особенности расположения плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты общего уравнения обращаются в нуль.

1. При $D=0$ уравнение $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки $O(0;0;0)$ удовлетворяют этому уравнению.

2. При $A=0$ уравнение $B\cdot y+C\cdot z+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси *Ox*, поскольку нормальный вектор $\bar{n}=(0;B;C)$ этой плоскости перпендикулярен оси *Ox* (его проекция на ось *Ox* равна нулю). Аналогично, при $B=0$ плоскость $A\cdot x+C\cdot z+D=0$ параллельна оси *Oy*, а при $C=0$ плоскость $A\cdot x+B\cdot y+D=0$ параллельна оси *Oz*.

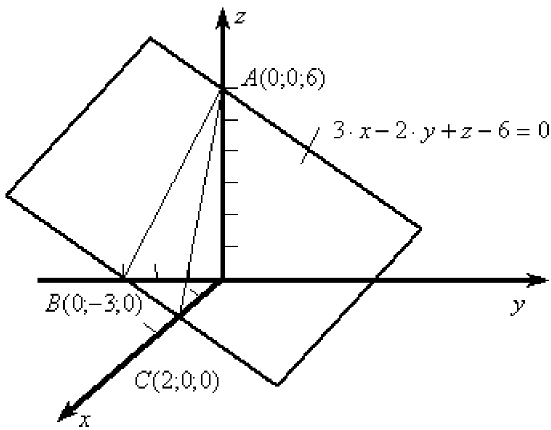


Рис. V.6

3. При $A=D=0$ уравнение $B\cdot y+C\cdot z=0$ определяет плоскость, проходящую через ось *Ox*, поскольку она параллельна оси *Ox* ($A=0$) и проходит через начало координат ($D=0$). Аналогично, плоскость $A\cdot x+C\cdot z=0$ проходит через ось *Oy*, а плоскость $A\cdot x+B\cdot y=0$ - через ось *Oz*.

4. При $A=B=0$ уравнение $C\cdot z+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости *Oxy*, поскольку она параллельна осям *Ox* ($A=0$) и *Oy* ($B=0$).

Аналогично, плоскость $A \cdot x + D = 0$ параллельна плоскости *yOz*, а плоскость $B \cdot y + D = 0$ - плоскости *Oxz*.

5. При $A = B = D = 0$ уравнение $C \cdot z = 0$ (или $z = 0$) определяет координатную плоскость *Oxy*, так как она параллельна плоскости *Oxy* ($A = B = 0$) и проходит через начало координат ($D = 0$). Аналогично, уравнение $y = 0$ в пространстве определяет координатную плоскость *Oxz*, а уравнение $x = 0$ - координатную плоскость *Oyz*.

Пример V.7. Составить уравнение плоскости *P*, проходящей через ось *Oy* и точку $M_0(2;-4;3)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через ось *Oy*, имеет вид $A \cdot x + C \cdot z = 0$. Для определения коэффициентов *A* и *C* воспользуемся тем, что точка $M_0(2;-4;3)$ принадлежит плоскости *P*. Поэтому ее координаты удовлетворяют написанному выше уравнению плоскости: $M_0(2;-4;3) \in P \Leftrightarrow$ $2 \cdot A + 3 \cdot C = 0$, откуда $A = -1{,}5 \cdot C$. Подставив найденное значение *A* в уравнение $A \cdot x + C \cdot z = 0$, получим: $-1{,}5 \cdot Cx + C \cdot z = 0$, или $3 \cdot x - 2 \cdot z = 0$.

Это и есть искомое уравнение.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть две плоскости заданы в R^3 общими уравнениями

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \text{ и } A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0,$$

$$A_i, B_i, C_i, D_i \in R,\ i = 1, 2.$$

Эти плоскости параллельны только в том случае, если коллинеарны их нормальные векторы $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$, то есть выполняются условия: $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2$.

Следовательно, *две плоскости, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при одноименных переменных пропорциональны.*

Если кроме коэффициентов при переменных пропорциональны и свободные члены, то есть выполняются равенства

$$A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2 = D_1 / D_2\,,$$

то плоскости совпадают.

Чтобы две плоскости пересекались, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных *x*, *y*, *z* не были пропорциональны.

Плоскости перпендикулярны в том случае, если перпендикулярны их нормальные векторы, то есть выполняется условие:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0\,.$$

Пример V.8. Установить, перпендикулярны ли плоскости, заданные уравнениями $2 \cdot x - 3 \cdot y + z - 2 = 0$ и $4 \cdot x + 3 \cdot y + z + 5 = 0$.

***Решение*.** Плоскости перпендикулярны в том случае, если их нормальные векторы $\overline{n_1} = (2;-3;1)$ и $\overline{n_2} = (4;3;1)$ удовлетворяют условию $(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = 0$. Так как $(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$, то указанное условие выполнено и, значит, данные плоскости перпендикулярны.

Уравнение прямой в пространстве $\boldsymbol{R}^3$

Каноническое уравнение прямой. Положение прямой вполне определено, если заданы, лежащая на ней, точка и направление. Направление прямой может быть задано любым вектором коллинеарным данной прямой, который называется *направляющим вектором*.

Выведем уравнение прямой *a*, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{a} = (l; m; n)$.

Произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой *a* только в том случае, если векторы $\overline{MM_1} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ и $\overline{a} = (l; m; n)$ коллинеарны, то есть для них выполняется условие:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}\,.$$

Эти равенства (а этими равенствами фактически заданы два независимых уравнения) определяют прямую (рис. V.7), проходящую через заданную точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ коллинеарно вектору $\overline{a} = (l; m; n)$, и называются ***каноническим уравнением прямой в пространстве***.

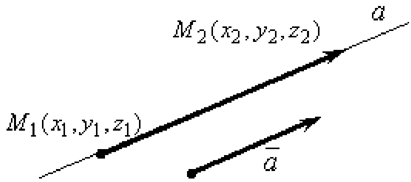


Рис. V.7

Числа *l, m* и *n* являются проекциями направляющего вектора $\overline{a}$ на координатные оси. Так как вектор $\overline{a}$ - ненулевой, то все три *l, m* и *n* числа не могут одновременно равняться нулю. Но одно или два из них могут оказаться равными нулю, например,

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{0},$$

которая означает, что проекции вектора $\overline{a}$ на оси *Oy* и *Oz* равны нулю. Поэтому и вектор $\overline{a} = (l;0;0)$, и прямая, заданная указанным образом, перпендикулярны осям *Oy* и *Oz*, то есть плоскости *Oyz*.

Пример V.9. Составить уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 \cdot z - 8 = 0$ и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью *Oz*.

Решение. Найдем точку пересечения данной плоскости с осью *Oz*. Так как любая точка, лежащая на оси *Oz*, имеет координаты (0; 0; *z*), то, полагая в заданном уравнении плоскости $x = y = 0$, получим $4 \cdot z - 8 = 0$ или $z = 2$. Следовательно, точка пересечения данной плоскости с осью *Oz* имеет координаты (0; 0; 2). Поскольку искомая прямая перпендикулярна плоскости, то, тем самым, она параллельна ее нормальному вектору $\overline{n} = (2;-3;4)$. Поэтому направляющим вектором прямой может служить вектор нормали $\overline{a} = \overline{n} = (2;-3;4)$ заданной плоскости.

Теперь запишем искомые уравнения прямой, проходящей через точку $A(0,0,2)$ в направлении вектора $\bar{a}=(2;-3;4)$:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-2}{4} \text{ или } \frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Прямая может быть задана двумя лежащими на ней точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. В этом случае направляющим вектором прямой может служить вектор $\overline{M_1M_2}$, то есть $\bar{a}=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Тогда каноническое уравнение прямой в пространстве примет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Эти равенства определяют прямую, проходящую через две данные точки.

Пример V.10. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;3;-5)$ и $M_2(-4;3;2)$.

*Решение***.** Запишем искомое уравнение прямой в виде:

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-3}{3-3}=\frac{z+5}{2+5}$$

или $(x-2)/(-6)=(y-3)/0=(z+5)/7$. Так как $\bar{a}=(-6;0;7)$, то искомая прямая перпендикулярна оси Oy.

Пример V.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2;-3;5)$ параллельно прямой $(x-1)/2=(y-2)/(-1)=(z-3)/4$.

*Решение***.** Направляющим вектором искомой прямой может служить направляющий вектор $\bar{a}=(2;-1;4)$ данной прямой, поскольку по условию эти прямые параллельны. Зная точку $M_1(2;-3;5)$ и направляющий вектор $\bar{a}=(2;-1;4)$ искомой прямой, запишем ее уравнение в виде: $(x-2)/2=(y+3)/(-1)=(z-5)/4$.

Прямая как линия пересечения плоскостей

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух непараллельных плоскостей $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$, то есть как множество точек, удовлетворяющих системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{V.5}$$

Справедливо и обратное утверждение: система двух независимых линейных уравнений вида (V.5) определяет прямую как линию пересечения плоскостей (если они не параллельны). Уравнения системы (V.5) называются *общим уравнением* прямой в пространстве R^3.

Пример V.12. Составить каноническое уравнение прямой заданной общими уравнениями плоскостей

$$\begin{cases} 2 \cdot x - 5 \cdot y + z + 4 = 0, \\ x + 2 \cdot y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

*Решение***.** Чтобы написать каноническое уравнение прямой или, что тоже самое, уравнение прямой, проходящей через две данные точки, нужно найти координаты каких-либо двух точек прямой. Ими могут служить точки пересечения прямой с какими-нибудь двумя координатными плоскостями, например *Oyz* и *Oxz*.

Точка пересечения прямой с плоскостью *Oyz* имеет абсциссу $x = 0$. Поэтому, полагая в данной системе уравнений $x = 0$, получим систему с двумя переменными:

$$\begin{cases} -5 \cdot y + z + 4 = 0, \\ 2 \cdot y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Ее решение $y = 2$, $z = 6$ вместе с $x = 0$ определяет точку $A(0,2,6)$ искомой прямой. Полагая в данной системе уравнений $y = 0$, получим систему

$$\begin{cases} 2 \cdot x + z + 4 = 0, \\ x - z + 2 = 0, \end{cases}$$

решение которой $x=-2$, $z=0$ вместе с $y=0$ определяет точку $B(-2{,}0{,}0)$ пересечения прямой с плоскостью Oxz.

Теперь запишем уравнения прямой, проходящей через точки $A(0{,}2{,}6)$ и $B(-2{,}0{,}0)$: $\dfrac{x-0}{-2-0}=\dfrac{y-2}{0-2}=\dfrac{z-6}{0-6}$ или $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-6}{3}$, где $\bar{a}=(1;1;3)$ – будет направляющим вектором этой прямой.

Пример V.13. Прямая задана каноническим уравнением $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$. Составить общее уравнение этой прямой.

Решение. Каноническое уравнение прямой можно записать в виде системы двух независимых уравнений:

$$\begin{cases}(x-2)/3=(y+1)/5,\\ (x-2)/3=(z-3)/(-1),\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\cdot x-3\cdot y-13=0,\\ x+3\cdot z-11=0.\end{cases}$$

Получили общее уравнение прямой, которая теперь задана пересечением двух плоскостей, одна из которых $5\cdot x-3\cdot y-13=0$ параллельна оси Oz ($C=0$), а другая $x+3\cdot z-11=0$ – оси Oy ($B=0$).

Данную прямую можно представить в виде линии пересечения двух других плоскостей, записав ее каноническое уравнение в виде другой пары независимых уравнений:

$$\begin{cases}(x-2)/3=(y+1)/5,\\ (y+1)/5=(z-3)/(-1),\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\cdot x-3\cdot y-13=0,\\ y+5\cdot z-14=0.\end{cases}$$

Замечание. Одна и та же прямая может быть задана различными системами двух линейных уравнений (то есть пересечением различных плоскостей, так как через одну прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей), а также различными каноническими уравнениями (в зависимости от выбора точки на прямой и ее направляющего вектора).

Ненулевой вектор, параллельный прямой линии, будем называть ее ***направляющим вектором***.

Пусть в трехмерном пространстве R^3 задана прямая l, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и ее направляющий вектор $\overline{a}=(l,m,n)$.

Любой вектор $\overline{M_0M}$, где $M(x,y,z)$, лежащий на прямой, коллинеарен с вектором $\overline{a}$, поэтому их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (V.6)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой. В частном случае, когда есть плоскость, получаем уравнение прямой на плоскости

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (V.7)$$

Пример V.14. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Будем считать вектор $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ направляющим, тогда уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

где $l=x_2-x_1$, $m=y_2-y_1$, $n=z_2-z_1$.

Удобно уравнение (V.6) записать в параметрической форме. Так как координаты направляющих векторов параллельных прямых пропорциональны, то полагая

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

получим

$$\begin{cases} x=l\cdot t+x_0, \\ y=m\cdot t+y_0, \\ z=n\cdot t+z_0, \end{cases}$$

где t – параметр, $t\in R$.

Расстояние от точки до прямой

Рассмотри двухмерное евклидово пространство с декартовой системой координат. Пусть точка $M_0\in$ и $l\subset$. Найдем расстояние от этой точки до прямой. Положим

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямая l задается уравнением $A\cdot x + B\cdot y + C = 0$ (рис. V.8).

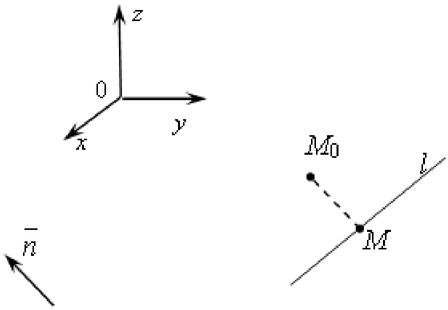


Рис. V.8

Расстояние $d = |\overline{M_0M}|$, вектор $\overline{M_0M} \parallel \overline{n}$, где $\overline{n} = (A, B)$ - нормальный вектор прямой l, $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\overline{n}$ - коллинеарны, поэтому их координаты пропорциональны, то есть $\overline{M_0M} = t\cdot\overline{n}$, следовательно,

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = t\,,\ t \in R\,.$$

Отсюда $\begin{cases} x = A\cdot t + x_0, \\ y = B\cdot t + y_0, \end{cases}$ или умножая эти уравнения на A и B, соответственно, и складывая их находим $t = \dfrac{A(x - x_0) + B(y - y_0)}{A^2 + B^2}$, отсюда

$$d = |\overline{M_0M}| = |t\cdot\overline{n}| = |t|\cdot|\overline{n}| = \left|\frac{A(x - x_0) + B(y - y_0)}{A^2 + B^2}\right|\cdot\sqrt{A^2 + B^2}$$

или

$$d = \left|\frac{A\cdot x - A\cdot x_0 + B\cdot y - B\cdot y_0 + C - C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = [A\cdot x + B\cdot y + C = 0] =$$

$$= \left|\frac{-(A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Формула

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{(V.8)}$$

определяет расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$.

Пример V.15. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно прямой *l*: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ и найти расстояние от M_0 до прямой *l*.

Из рис. V.8 имеем $\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0)$, а нормальный вектор прямой l $\bar{n} = (A, B)$. Из условия перпендикулярности имеем

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

или

$$A \cdot x + B \cdot y - (Ax \cdot_0 + B \cdot y_0) = 0 .$$

Так как $\overline{M_0 M} \parallel \bar{n}$, то

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} . \qquad \text{(V.9)}$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точку M_0, перпендикулярно прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$.

Пусть имеем уравнение прямой (V.9), проходящей через точку M_0, перпендикулярна прямой *l*: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$. Найдем расстояние от точки M_0 до прямой *l*, используя формулу (V.8).

Для нахождения искомого расстояния достаточно найти уравнение прямой, проходящей через две точки M_0 и точку M_1, лежащую на прямой в основании перпендикуляра. Пусть $M_1(x_1, y_1)$, тогда

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} . \qquad \text{(V.10)}$$

Так как $\overline{M_0 M_1} \parallel \bar{n}$, а вектор $\bar{n} = (A, B)$, то

$$\frac{x_1 - x_0}{A} = \frac{y_1 - y_0}{B} . \qquad \text{(V.11)}$$

Поскольку точка M_1 лежит на прямой *l*, то имеем еще одно равенство $A\cdot x_1 + B\cdot y_1 = -C$ или

$$\begin{cases} B\cdot x_1 - B\cdot x_0 = A\cdot y_1 - A\cdot y_{0,} \\ A\cdot x_1 + B\cdot y_1 = -C. \end{cases}$$

Приведем систему к виду, удобному для применения метода Крамера

$$\begin{cases} B\cdot x_1 - A\cdot y_1 = B\cdot x_0 - A\cdot y_{0,} \\ A\cdot x_1 + B\cdot y_1 = -C. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} Bx_0 - Ay_0 & -A \\ -C & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & -A \\ A & B \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} Bx_0 - Ay_0 & -A \\ -C & B \end{vmatrix}}{A^2 + B^2},$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} B & Bx_0 - Ay_0 \\ A & -C \end{vmatrix}}{A^2 + B^2}. \qquad \text{(V.12)}$$

Подставляя (V.12) в (V.10), получаем исходное расстояние.

Пример V.16. В двухмерном пространстве задана точка $M_0(1,2)$ и прямая $2x + y - 3 = 0$. Найти расстояние от точки M_0 до прямой; записать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно заданной прямой и найти расстояние от точки M_0 до основания перпендикуляра к исходной прямой.

По формуле (V.8) имеем

$$d = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Уравнение прямой, содержащей перпендикуляр, найдем как прямую проходящую через две точки M_0 и $M_1(x_1, y_1)$, воспользовавшись формулой (V.11). Так как $\overline{M_0M_1} \parallel \overline{n}$, то, с учетом того, что $\overline{n} = (2,1)$, а $\overline{M_0M_1} = (x_1 - 1, y_1 - 2)$, имеем

$$\frac{x_1-1}{2}=\frac{y_1-2}{1}.$$

Для нахождения координат (x_1, y_1) имеем систему с учетом того, что точка M_1 лежит на исходной прямой

$$\begin{cases} x_1-2y_1=-3, \\ 2x_1+y_1=3. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1=\dfrac{-3\cdot 1+3\cdot 2}{1^2+2^2}=\dfrac{3}{5}$, $y_1=\dfrac{1\cdot 3-3\cdot(-2)}{1^2+2^2}=\dfrac{9}{5}$, отсюда $d=\sqrt{(1-3/5)^2+(2-9/5)^2}=1/\sqrt{5}$.

Рассмотрим трехмерное евклидовое пространство . Пусть точка $M_0\in$ и плоскость $\Pi\subset$. Найдем расстояние от этой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости П, заданной уравнением $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ (рис. V.9).

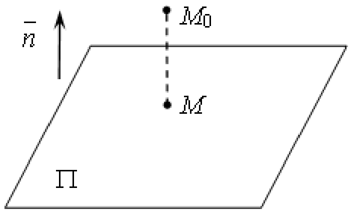


Рис. V.9

Аналогично двухмерному пространству имеем $\overline{M_0M}\parallel\overline{n}$ и вектор $\overline{n}=(A,B,C)$, а $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, отсюда

$$d=|\overline{M_0M}|=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad \text{(V.13)}$$

Уравнение прямой, содержащей перпендикуляр к плоскости П, запишем как уравнение прямой проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащую в плоскости П:

$$\frac{x_1-x_0}{A}=\frac{y_1-y_0}{B}=\frac{z_1-z_0}{C}. \qquad \text{(V.14)}$$

Для нахождения координат точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ к двум любым равенствам формулы (V.14) добавим уравнение

$$A\cdot x_1 + B\cdot y_1 + C\cdot z_1 + D = 0\,. \qquad \text{(V.15)}$$

Решая систему трех уравнений (V.14), (V.15) найдем x_1, y_1, z_1 - координаты точки M_1. Тогда уравнение перпендикуляра запишется в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\,.$$

Для нахождения расстояния от точки M_0 до плоскости П вместо формулой (V.13) воспользуемся

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\,.$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть заданы плоскость П $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$ и прямая l $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$. Найдем угол между ними. Угол между прямой и плоскостью совпадает со смежным углом к углу образованным направляющим вектором $\bar{a} = (l, m, n)$ прямой и нормальным вектором плоскости $\bar{n} = (A, B, C)$ (рис. V.10). Так как $\bar{n}\cdot\bar{a} = |\bar{n}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$, то

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\,. \qquad \text{(V.16)}$$

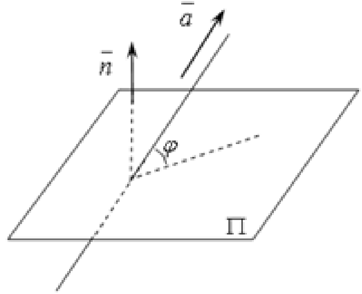


Рис. V.10

Угол между плоскостями

Пусть даны две плоскости Π_1: $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ и Π_2: $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$. Найдем угол между этими плоскостями, который совпадает с углом между их нормальными векторами $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

Учитывая, что

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = |\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}| \cdot \cos\varphi = A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2,$$

получим

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad \text{(V.17)}$$

Пример V.17. Даны координаты вершин пирамиды $A(0,1,1)$, $B(1,8,3)$, $C(3;7;-2)$, $D(-1;2;5)$. Найти: 1) длины ребер *AB* и *AC*; 2) угол между ребрами *AB* и *AC*; 3) площадь грани *ABC*; 4) объем пирамиды *ABCD*; 5) уравнение прямой *AB*; 6) уравнение плоскости *ABC*; 7) уравнение высоты пирамиды, опущенной на грань *ABC*. Сделать чертеж.

Решение.

1). Длина ребра *AB* совпадает с длиной вектора $\overline{AB}$, поэтому определим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (1-0;8-1;3-1) = (1;7;2), \ \overline{AC} = (3-0;7-1;-2-1) = (3;6;-3).$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, то есть,

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{1+49+4} = \sqrt{54},$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54}.$$

2). Угол между ребрами *AB* и *AC* совпадает с углом между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, который можно определить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{1 \cdot 3 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{54}} = \frac{3+42-6}{54} = \frac{39}{54} = \frac{13}{18},$$

$$\angle\varphi \approx 43^\circ.$$

3). Грань *ABC* представляет собой треугольник, его площадь найдем через векторное произведение:

$$S=\frac{1}{2}\cdot|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-33)^2+9^2+(-15)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1395}\approx 18{,}67,$$

так как

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 7 & 2\\ 3 & 6 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 2\\ 6 & -3\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & 7\\ 3 & 6\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=$$

$$=(-21-12)\cdot\bar{i}-(-3-6)\cdot\bar{j}+(6-21)\cdot\bar{k}=-33\cdot\bar{i}+9\cdot\bar{j}-15\cdot\bar{k}.$$

4). Объем пирамиды вычислим по формуле:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{mod}(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{mod}\begin{vmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 6 & -3\\ -1 & 1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{mod}(24+21+6+12+3-84)=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{mod}(-18)=\frac{18}{6}=3.$$

Здесь $\operatorname{mod}x=|x|$.

5). Уравнение прямой, проходящей через точки *A*, *B*, имеет вид:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{8-1}=\frac{z-1}{3-1},\text{ то есть, }\frac{x}{1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{2}.$$

6). Уравнение плоскости *ABC* определим из равенства

$$\begin{vmatrix}x-0 & y-1 & z-1\\ 1-0 & 8-1 & 3-1\\ 3-0 & 7-0 & -2-1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}x & y-1 & z-1\\ 1 & 7 & 2\\ 3 & 6 & -3\end{vmatrix}=0\ \text{или}$$

$$-11\cdot x+3\cdot y-5\cdot z+2=0.$$

7). Так как высота – это прямая перпендикулярная плоскости *ABC*, ее направляющим вектором будет вектор-нормаль $\bar{n}=(-11;3;-5)$ плоскости *ABC*, тогда уравнение высоты имеет вид:

$$\frac{x+1}{-11}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{-5}.$$

Выполним чертеж (рис. V.11).

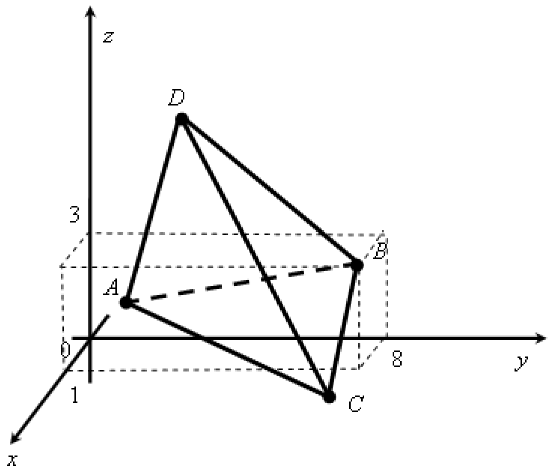


Рис. V.11

VI. Линейные операторы

§1. Линейный оператор

В линейной алгебре, помимо векторных пространств, фундаментальное значение имеют ***линейные операторы*** (или ***линейные преобразования***) [1, 7, 11].

Как общее понятие, оператор – отображение одного множества на другое, каждое из которых наделено некоторой структурой (системой аксиом, отношением порядка, алгебраической операцией и т.д.). Аналогом оператора в математическом анализе является функция.

Современное определение линейного оператора A принадлежит Дж. Пеано для векторных пространств с основным полем R действительных чисел, с областью определения и областью значений в L.

Отметим, что при использовании современной вычислительной техники (кластеров, вычислительных систем, нейронных систем), эффективность параллельных программ существенно повышается, если представленные для решения задачи записаны в векторной (операторной) форме.

Поскольку линейный оператор рассматривается как отображение $\mathrm{A}: L \to T$, $T \subseteq L$ или как функция $T = \mathrm{A}x$, то, в дальнейшем, векторы будем обозначать малыми буквами *x*, *y*, …, возможно с индексами, $x_1, x_2, \ldots$.

Определение. Линейным оператором А на векторном пространстве *L* называется линейное преобразование одного вектора в другой из того же пространства, так что выполняются свойства линейности

$$\mathrm{A}(x+y) = \mathrm{A}x + \mathrm{A}y,$$

$$\mathrm{A}(\alpha x) = \alpha \mathrm{A}x, \tag{VI.1}$$

что эквивалентно линейной комбинации,

$$\mathrm{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathrm{A}x + \beta \mathrm{A}y,\ \alpha, \beta \in R. \tag{VI.2}$$

Из (VI.1) следует, что среди линейных операторов существуют

а) нулевой, $\mathrm{A} = O$, то есть такой, что $\forall x \in L$, $\mathrm{O}x = 0$, где 0 – нулевой вектор;

б) единичный (тождественный) $\mathrm{A} = \mathrm{E}$, то есть такой, что $\mathrm{E}x = x$;

в) подобия П, то есть такой, что $\forall \alpha \in R$ $\Pi x = \alpha x$,

отсюда следует, что при $\alpha = 0$, получаем нулевой оператор, а при $\alpha = 1$, тождественный.

Из (VI.2) следует, что $\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{A}x_i$, где $\alpha_i \in R$, $x_i \in L$. Область значений $T = \mathrm{A}x$ оператора А является подпространством, в частности, множество векторов $\{x\} \subset L$, таких что $\mathrm{A}x = 0$ - подпространство.

Множество $T = 0$ называется ***ядром*** оператора А, а размерность ядра называется ***дефектом*** оператора А.

Пример VI.1. Пусть в векторном пространстве *L* задан базис. Оператор А ставит в соответствие каждому вектору *x* его координату с фиксированным номером. Доказать, что А – линейный оператор.

Доказательство. Пусть $x_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{in})$, $y_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, ..., \beta_{in})$, тогда, например, $\mathrm{A}x_i = \alpha_{i1}$, $\mathrm{A}y_i = \beta_{i1}$, покажем, что

$$A(ax_i + by_i) = a \cdot \alpha_{i1} + b \cdot \beta_{i1},\ \forall i .$$

В самом деле, имеем из (VI.2),

$$\mathrm{A}(ax_i + by_i) = \mathrm{A}(ax_i) + \mathrm{A}(by_i) = a \cdot \alpha_{i1} + b \cdot \beta_{i1} .\ \blacktriangledown$$

Векторные свойства линейных операторов

Пусть A, B – линейные операторы и $x \in L$ - произвольный вектор, тогда их сумма есть оператор *C*, определяемый как

$$\mathrm{C}x = \mathrm{A}x + \mathrm{B}x,$$

кроме того, $\mathrm{A} + \mathrm{O} = \mathrm{A}$.

Обозначим для каждого A через (–A) оператор, определенный как $(-\mathrm{A})x = -(\mathrm{A}x)$, тогда $\mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = 0$. Добавив свойство коммутативности и ассоциативности сложения, получим, что линейный оператор образует коммутативную группу по сложению (выполняются аксиомы 1 – 4 линейных пространств).

Для любого A и $\alpha \in R$ определим произведение $\alpha\mathrm{A}$ как $\alpha\mathrm{A}x = \alpha(\mathrm{A}x)$. Легко показать выполнение других аксиом линейного пространства. Тем самым справедливо: множество всех линейных операторов образует линейное (векторное) пространство.

Умножение операторов

Оператор C называется произведением оператора A на оператор B и определяется как

$$\mathrm{C}x = \mathrm{A}(\mathrm{B}x).$$

Произведение линейных операторов – линейный оператор. В самом деле, $\forall x, y \in L$ и $\alpha, \beta \in R$, имеем

$$\mathrm{C}(\alpha x + \beta y) = \mathrm{A}(\mathrm{B}(\alpha x + \beta y)) = \mathrm{A}(\alpha(\mathrm{B}x) + \beta(\mathrm{B}y)) =$$
$$= \alpha\mathrm{A}(\mathrm{B}x) + \beta\mathrm{A}(\mathrm{B}y) = \alpha\mathrm{C}x + \beta\mathrm{C}y .\ \blacktriangledown$$

Далее, аналогично, показывается, что для любых операторов A, B, C и $\alpha \in R$, выполняется

1) $(\mathrm{AB}) \cdot \mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$;

2) $\alpha(\mathrm{AB}) = (\alpha\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\alpha\mathrm{B})$;

3) $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \cdot \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{C} + \mathrm{B} \cdot \mathrm{C}$;

4) $\mathrm{A}(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{C}$

Покажем, например, выполнение 4). Имеем $\forall x \in L$,

$$\mathrm{A}(\mathrm{B} + \mathrm{C})x = \mathrm{A}(\mathrm{B}x + \mathrm{C}x) = (\mathrm{AB})x + (\mathrm{AC})x = (\mathrm{AB} + \mathrm{AC})x\ . \ \blacktriangledown$$

Таким образом, множество линейных операторов образует некоммутативное кольцо.

Замечание. У линейных операторов имеется два «нехороших» свойства. Первое из них, это некоммутативность произведения, второе состоит в том, что может оказаться равным нулю произведение двух операторов, даже тогда, когда ни один из них не равен нулю (ненулевой оператор, произведение которого с некоторым ненулевым оператором равно нулю, называется ***делителем нуля***). Необходимость учитывать эти свойства часто приводит к путаницам, в частности, в обозначениях (например, $\mathrm{A}^2\mathrm{B}$ - это AAB или ABA, и т.д.).

К счастью, у линейного оператора есть и «хорошие» свойства, например, если оператор А обладает хотя бы одним из свойств:

1) если $x_1 \neq x_2$, то $\mathrm{A}x_1 \neq \mathrm{A}x_2$;

2) $\forall\, y \ \ \exists\, x \ \Rightarrow \ \mathrm{A}x = y$.

Если А обладает обоими этими свойствами, то говорят, что А – обратим. Обратный к А оператор обозначается символом A^{-1}.

Теорема. Если А, В, С – линейные операторы, такие, что $\mathrm{AB} = \mathrm{CA} = \mathrm{E}$, то *A* обратим и $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$, то есть

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}\ .$$

Перейдем к количественной характеристике линейных операторов.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ базис в *L* и А линейный оператор в нем. В результате действия оператора на базисные векторы получаются новые векторы y_i, которые также образуют базис:

$$y_i = \mathrm{A}x_i,\ \forall i\ .$$

Предположим, что векторы y_i нового базиса выражаются через векторы x_i старого базиса как

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \ , \ i = 1,2,\ldots,n . \qquad \text{(VI.3)}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений (VI.3) очевидно удовлетворяет условиям линейности (VI.1).

Особенностью этих преобразований является линейность функций, связывающих старые и новые базисные векторы. Коэффициенты α_{ik} определяют матрицу $[\alpha_{ik}]$, называемую матрицей линейного оператора.

Таким образом, в базисе $\{x_i\}$ каждому линейному оператору соответствует определенная матрица и обратно, каждой матрице отвечает некоторый линейный оператор, определяемый формулой (VI.3). Матричное исчисление для изучения линейных операторов в конечномерных векторных пространствах является наиболее удобным алгебраическим аппаратом, конечно, если матрицы согласованы.

Умение находить сумму и произведение операторов, позволяет получать результат возведения оператора в любую степень, найти любой полином от оператора А, как

$$P(\mathrm{A}) = \alpha_0 \mathrm{A}^m + \alpha_1 \mathrm{A}^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}\mathrm{A} + \alpha_m .$$

Оператором обратным к А, называется оператор A^{-1}, такой, что выполняется

$$\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E} .$$

Вырожденным операторам, не имеющих обратного, соответствуют особые (вырожденные) матрицы, определители которых равны 0.

Пример VI.2. Определить для каких матриц существуют обратные:

$$[\Delta_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ [\Delta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ [\Delta_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение 1. Вычислим ранги r_i, $i = 1,2,3$, матриц. Получим, по порядку $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$.

Решение 2. Вычислим определители матриц: $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

Таким образом, невырожденной матрицей является первая матрица $[\Delta_1]$.

Тот факт, что множество всех линейных операторов образует векторное пространство, далеко не единственное достоинство операторов. Например, из последнего следует, что для них вполне удовлетворительно определено умножение (см алгебру матриц).

Матрицы операторов

Пусть в некоторой фиксированной координатной системе $\{x_i\}$, $i = 1,2,...,n$, известны матрицы $[\alpha_{ij}]$, $[\beta_{ij}]$ операторов A, B, соответственно.

Определим матрицу оператора $[\mathrm{C}] = [\gamma_{ij}]$, где $\mathrm{C} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}$ покажем, что $\gamma_{ij} = \alpha \cdot \alpha_{ij} + \beta \cdot \beta_{ij}$.

Имеем

$$[\mathrm{C}]x_j = [\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}]x_j = [\alpha\mathrm{A}]x_j + [\beta\mathrm{B}]x_j = \alpha[\mathrm{A}x_j] + \beta[\mathrm{B}x_j] =$$
$$= \alpha[\alpha_{ij}] + \beta[\beta_{ij}]\,x_j = [\gamma_{ij}]x_j \,. \ ▼$$

Пусть $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$, тогда

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj} \,.$$

$$\mathrm{C}x_j = \mathrm{A}(\mathrm{B}x_j) = \mathrm{A}(\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} x_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \cdot (\mathrm{A}x_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj} \right) x_i \,.$$

Отсюда $\gamma_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj}$.

Итак, имея базис $\{x_i\}$, мы поставили в соответствие каждому линейному оператору A матрицу $[\mathrm{A}]$, тогда

$$\mathrm{A}x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i \ .$$

Соответствие взаимнооднозначное и матрица $[\alpha_{ij}]$ является матрицей некоторого оператора, то есть, если $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot x_j$, то

$$\mathrm{A}x = \mathrm{A}(\sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot (\mathrm{A}x_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \right) x_i \, .$$

Таким образом, если $y = \mathrm{A}x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot x_i$, то

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \xi_j \ .$$

Подведем итоги, пусть $\{[\alpha_{ij}]\}$, $\{[\beta_{ij}]\}$ и т.д. множество всех матриц. Определим сумму, умножение на число, произведение, $[0_{ij}]$ - матрицу нулевого оператора, $[e_{ij}]$ - матрицу тождественного оператора формулами

$$[\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}] \, , \ \alpha[\alpha_{ij}] = [\alpha\alpha_{ij}] \, ,$$

$$[\alpha_{ij}][\beta_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj} \right], \ [0_{ij}] = 0 \, , \ [e_{ij}] = \begin{cases} \mathrm{E}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда соответствие между всеми линейными операторами А на L и всеми матрицами $[\alpha_{ij}]$, задаваемыми как $\mathrm{A}x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i$, является изоморфизмом.

Пример VI.3. Пусть А линейный оператор на множестве многочленов степени не большей, чем n–1, $M = \{\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot t + \ldots + \alpha_j \cdot t^j + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot t^{n-1} / \alpha_j \in R\}$, $n \in N$, определенный формулой $(\mathrm{A}x)(t)=x(t+1)$ и $x=\{x_j\}$ - базис в *M*, определенный формулой $x(t)=t^j$, $j=0,1,\ldots,n-1$. Найти матрицу оператора А, где $[\mathrm{A}]=[\alpha_{ij}]$ в базисе $x(t+1)$.

Решение. Если $x=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j x_j$, $\xi_j\in R$, то

$$(\mathrm{A}x)(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j(\mathrm{A}x_j)(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{ij}x_i(t)\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{ij}\xi_j\right)x_i(t).$$

Отсюда $\forall j$, $(\mathrm{A}x_j)(t)=x_j(t+1)=(t+1)^j=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{ij}t^i$.

Применяя формулу бинома Ньютона, $(1+t)^j=\sum_{i=0}^{j}C_j^{j-i}\cdot t^i$, для каждого фиксированного *j*, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t^i, получим

$$x_j(t+1)=\sum_{i=0}^{j}C_j^i\cdot t^i+\sum_{i=j+1}^{n-1}0\cdot t^i.$$

Учитывая, что $\forall\, i,j$ $C_j^i=C_j^{j-i}$, причем $C_j^i=0$ для $i>j$, где $C_m^k=\dfrac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!}$, получим матрицу оператора А

$$[\alpha_{ij}]=[C_j^{j-i}],\ i,j=0,1,\ldots,n-1.$$

В частности, для случая $n=4$,

$$[\alpha_{ij}]=\begin{pmatrix} C_0^{0-0} & C_1^{1-0} & C_2^{2-0} & C_3^{3-0}\\ C_0^{0-1} & C_1^{1-1} & C_2^{2-1} & C_3^{3-1}\\ C_0^{0-2} & C_1^{1-2} & C_2^{2-2} & C_3^{3-2}\\ C_0^{0-3} & C_1^{1-3} & C_2^{2-3} & C_3^{3-3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.\ ▼$$

Покажем, как, зная матрицу $[\alpha_{ij}]$ линейного оператора А по координатам вектора *x*, найти координаты образа А*x* в этом базисе.

Пусть $x=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j x_j$, тогда, в обозначениях примера, $\mathrm{A}x=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j(\mathrm{A}x_j)$, что равносильно матричному равенству

$$\mathrm{A}x=\left[(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\cdot[\mathrm{A}]\right]\cdot x, \qquad \text{(VI.4)}$$

где в квадратных скобках стоит произведение вектора (можно матрицы-строки) на матрицу оператора A.

Отсюда следует, что ***строка координат вектора*** Ax ***равна строке координат вектора*** x, ***умноженной справа на матрицу*** [A], все в базе $\{x_j\}$.

Пример VI.4. В условиях предыдущего примера, найти координаты образа $\mathrm{A}x$, при известной $[\mathrm{A}]=[\alpha_{ij}]$, где $x=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j x_j$.

Решение. Имеем $x=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j x_j$, тогда $\mathrm{A}x=\left[(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\cdot[\alpha_{ij}]\right]\cdot x$.

По-прежнему, ограничимся случаем $n=4$, где базис $x=(1,\ t,\ t^2,t^3)$, тогда

$$\mathrm{A}x=(\xi_0\quad\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3)\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot x=$$

$$=(\xi_0\quad \xi_0+\xi_1\quad \xi_0+2\xi_1+\xi_2\quad \xi_0+3\xi_1+3\xi_2+\xi_3)\cdot$$
$$\cdot(1\quad t\quad t^2\quad t^3)^T.$$

Окончательно,

$$\mathrm{A}x=\xi_0\cdot 1+(\xi_0+\xi_1)\cdot t+(\xi_0+2\xi_1+\xi_2)\cdot t^2+$$
$$+(\xi_0+3\xi_1+3\xi_2+\xi_3)\cdot t^3.\ \blacktriangledown$$

Изменение базиса [3, 11]

Дадим ответ на решение задач, часто возникающих при изменении базиса.

Пусть $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $i = 1,2,...,n$, - два базиса в n-мерном линейном пространстве L.

I (a). Если вектор $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, то какова связь между его координатами в базисе $\{x_i\}$ и его координатами $x = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ в базисе $\{y_i\}$?

I (b). Если $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ - упорядоченное множество скаляров, то какова связь между векторами x и y?

Пусть A - линейный оператор, определяемый равенствами

$$\mathrm{A}x_i = y_i,$$

положим $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i y_i$, тогда $\mathrm{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i y_i$.

Ответы:

(a). Пусть $[\alpha_{ij}]$ - матрица оператора A в базисе $\{x_i\}$, то есть $y_j = \mathrm{A}x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i$, $j = 1,2,...,n$. Оператор A обратим, поскольку из $\sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i = 0$, следует, что $\xi_i = 0$, $\forall i$. Так как

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathrm{A}x_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \eta_j\right) x_i,$$

то

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \eta_j.$$

(b). Очевидно, что $y = \mathrm{A}x$. Это означает следующее: если матрица $[\mathrm{A}]$оператора A известна, то ее строки можно рекомендовать рассматривать как преобразование координат, а можно как преобразование векторов.

Подобие [11]

II (a). Пусть B – линейный оператор на *L*. Какова связь между его матрицами $[\beta_{ij}]$ и $[\gamma_{ij}]$ в базисах $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, соответственно?

II (b). Дана матрица $[\beta_{ij}]$. Какова связь между линейными операторами B и C, определенными равенствами $\mathrm{B}x_j = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} x_i$ и $\mathrm{B}y_j = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{ij} y_i$, соответственно?

Ответы:

a) Имеем $\mathrm{B}x_j = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} x_i$, $\mathrm{B}y_j = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{ij} y_i$. С использованием оператора A можем записать

$$\mathrm{B}y_j = \mathrm{B}(\mathrm{A}x_j) = \mathrm{B}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \mathrm{B}x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \sum_{i=0}^{n} \beta_{ik} x_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \alpha_{kj}\right) x_i \ .$$

А также,

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} y_k = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \mathrm{A}x_k = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ik} x_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \gamma_{kj}\right) x_i \ .$$

Учитывая предыдущее выражения, стоящие в правых частях, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \gamma_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \alpha_{kj} \ .$$

Или, переходя к матрицам, имеем равенство

$$[\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{C}] = [\mathrm{B}] \cdot [\mathrm{A}] .$$

Матрица [C] соответствует оператору B в базисе $\{y_i\}$ и для ее вычисления, учитывая, что оператор *A* обратим, умножим слева матричное уравнение на матрицу $[A]^{-1} \neq 0$. Учитывая, что

$$[\mathbf{A}^{-1}] = [A]^{-1} \text{ и } [A^{-1}]\cdot[A] = [E],$$

получаем

$$[C] = [A^{-1}][B][A] . ▼$$

В этом случае говорят, что ***матрицы*** [C] и [B] ***подобны***.

б). Заметим, что $Cy_j = CAx_j$ и

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} y_i = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} Ax_j = A\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} x_i\right) = ABx_j ,$$

то есть оператор C таков, что

$$CAx_j = ABx_j$$

или

$$CA = AB \text{ , тогда } C = ABA^{-1} .$$

Линейные операторы C и B называются ***подобными***, если существует обратимый оператор A, удовлетворяющий этому равенству.

Пример VI.5. Доказать, что a) если A подобен скаляру α, то $A = \alpha$; b) если A и B подобны, то это же верно и для A^2 и B^2, а если A и B обратимы, то подобны и A^{-1} и B^{-1}.

Решение. a) Пусть E – тождественный оператор, тогда, по определению, $E\alpha = \alpha$. Далее существует оператор C, что $\mathbf{A} = C^{-1}(E\alpha)C$, тогда $CA = E\alpha C$ и, по теореме об обратимости оператора, $A = E\alpha = \alpha$, то есть $A = \alpha$. ▼

b) имеем $A = CBC^{-1}$, тогда $A^2 = \left(CBC^{-1}\right)^2 = (CBC^{-1}) \cdot (CBC^{-1}) = \{\text{в силу ассоциатив ности}\} =$
$= (CB)(C^{-1} \cdot C)(BC^{-1}) = C(BEB)C^{-1} = CB^2C^{-1}$. ▼

Пусть A и B обратимы, тогда имеем $A = CBC^{-1}$. Заметим, что для любых обратимых матриц, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, тогда

$A^{-1} = (CBC^{-1})^{-1} = ((C \cdot B) \cdot C^{-1})^{-1} = (C^{-1})^{-1} \cdot (C \cdot B)^{-1} =$
$= C \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$. ▼

§2. Характеристический многочлен

Продолжим изучение линейных операторов. Нам уже известно, что с каждым оператором A связана квадратная матрица $[A]$, с которой, в свою очередь, связан ее определитель $\det[A]$. Значение определителя есть скаляр (число). Следовательно, $\det[A]$ является функцией, ставящей в соответствие оператору A скаляр. Поэтому изучение свойств определителя может упростить исследование свойств оператора.

Определение. Скаляр λ называется собственным числом (собственным значением), а ненулевой вектор x – собственным вектором линейного оператора A, действующего в n-мерном векторном пространстве L, если

$$Ax = \lambda x . \qquad \text{(VI.5)}$$

Рассматривая Ax как вектор $y \in L$, то любой вектор βy, $\beta \neq 0$, коллинеарный x будет собственным вектором с собственным числом λ. Если собственному значению λ соответствует два вектора, x и y, то собственным вектором будет и любой ненулевой вектор вида $\alpha x + \beta y$. Поскольку 0-вектор не является собственным, то множество M всех собственных векторов оператора A не является подпространством. Если же M дополнить 0-вектором, то M станет подпространством. ***Кратностью*** собственного значения λ называется размерность подпространства M; собственное значение λ называется ***простым***, если его кратность равна 1.

Упражнение. Найти все собственные числа и векторы операторов нулевого – O и тождественного – E. Определить их кратность, если линейный оператор действует в n-мерном линейном пространстве.

Теорема VI.1. Семейство собственных векторов $\{x_i\}$ оператора A, соответствующих аналогичному семейству собственных значений $\{\lambda_i\}$, $i=1,2,...,n$, линейно независимо.

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n=1$ теорема верна по определению собственного вектора, как отличного от нулевого.

Пусть при любом $k<n$, например, при $k=n-1$, теорема верна, но неверна при $k=n$. Тогда, если система векторов x_1, x_2, …, x_{n-1}, x_n будет линейно зависимой, то есть существуют числа α_i, $i=1,2,...,n$, не все равные 0, например, $\alpha_1 \neq 0$, что выполняется

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0. \qquad \text{(VI.6)}$$

Применяя к ней линейный оператор A, с учетом (VI.5), получим,

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + ... + \alpha_n \lambda_n x_n = 0. \qquad \text{(VI.7)}$$

Умножая (VI.6) на λ_n и вычитая из (VI.7), будем иметь

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_n)x_2 + ... + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = 0.$$

Полученная линейная комбинация в силу индуктивного предположения линейно независима, то есть все коэффициенты при x_i равны 0, в том числе и $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n) \equiv 0$,но, по предположению, $\alpha_1 \neq 0$, тогда $\lambda_1 - \lambda_n = 0$, но тогда $\lambda_1 = \lambda_n$, что невозможно, по условию теоремы. ▼

Следствие. Линейный оператор, действующий в *n*-мерном линейном пространстве, не может иметь более чем *n* попарно различных собственных значений.

Из определения собственного вектора линейного оператора следует, что образ Ax и прообраз x – коллинеарны. Это означает, что не каждый линейный оператор, действующий в линейном пространстве над полем действительных чисел, имеет хотя бы один собственный вектор. Например, при любом повороте осей на угол не кратный π, мы не получим коллинеарных векторов.

Перейдем к выводу уравнения, которому удовлетворяют все собственные векторы.

Пусть линейный оператор действует в n-мерном действительном линейном пространстве L и пусть $\{x_i\}$, $i=1,2,\dots,n$, некоторый базис, наконец $[\mathrm{A}]$ - матрица оператора А в этом базисе. Линейный оператор $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}$ является вырожденным, тогда и только тогда, когда будет вырождена его матрица $[\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}]$, то есть $\det[\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}]=0$. Отсюда заключаем, что кратность λ совпадает с дефектом линейного оператора $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}$.

Заметим, что, если В любой обратимый оператор, то можно показать [11], что

$$\mathrm{BAB}^{-1}-\lambda\mathrm{E}=\mathrm{B}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})\mathrm{B}^{-1},$$

то есть $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}=0$, тогда и только тогда, когда $(\mathrm{BAB}^{-1}-\lambda\mathrm{E})x=0$, где $x\in L$. Это означает, что все спектральные понятия (спектр, собственные значения, кратность, размерность и т.д.) инвариантны относительно замены А на подобный оператор BAB^{-1}. Учитывая что, по определению, определитель – это многочлен своих элементов, получаем

$$\det[\mathrm{A}x-\lambda\mathrm{E}]=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\lambda^i\ ,$$

где коэффициенты α_i являются функциями элементов определителя (или матрицы) и не зависят от λ. Максимальная степень λ входит лишь в один член определителя, составленного из произведения его элементов, стоящих на главной диагонали, поэтому $\lambda_n=1$. Таким образом, получаем многочлен

$$f(\lambda)=\det[\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}]=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{(n-1)1} & \alpha_{(n-1)2} & \dots & \alpha_{(n-1)(n-1)}-\lambda & \alpha_{(n\text{-}1)n}\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n(n-1)} & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, имеем

$$f(\lambda)=\lambda^n+\alpha_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+\dots+\alpha_1\cdot\lambda+\alpha_0\,,$$

который называется ***характеристическим многочленом*** оператора A в вещественном линейном пространстве L.

Для того, чтобы число $\lambda_0 \in R$ было собственным значением оператора A необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло уравнению $f(\lambda_0)=0$, то есть, было бы корнем характеристического многочлена.

Пример VI.6. Является ли совпадение характеристических многочленов признаком равенства операторов?

Решение. Нет, не является, поскольку характеристический многочлен один и тот же для семейства подобных матриц. В самом деле, линейные операторы совпадают, если совпадают их матрицы. Рассмотрим два базиса $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$. Пусть оператор A имеет в базисе $\{x_i\}$ матрицу $[\mathrm{A}x]$, а в базисе $\{y_i\}$ - $[\mathrm{A}y]$. Тогда эти матрицы подобны, то есть, $[\mathrm{A}y]=[Q\cdot \mathrm{A}x\cdot Q^{-1}]$, где Q – некоторая невырожденная матрица. Для любого $\lambda \in R$, учитывая, что $\lambda\mathrm{E}=Q\lambda\mathrm{E}Q^{-1}$, имеем

$$[\mathrm{A}x-\lambda\mathrm{E}]=[Q\mathrm{A}xQ^{-1}-Q\lambda\mathrm{E}Q^{-1}]=[Q(\mathrm{A}x-\lambda\mathrm{E})Q^{-1}]=$$
$$=[Q]\cdot[\mathrm{A}x-\lambda\mathrm{E}]\cdot[Q^{-1}].$$

Переходя к определителям матриц, получаем характеристический многочлен. То есть, линейный оператор определяется характеристическим многочленом с точностью до подобия матриц.

Благодаря определителям, задача нахождения собственных значений свелась к задаче алгебраической. В области действительных чисел не всякий многочлен степени $n \geq 2$ имеет хотя бы один действительный корень. В тоже время, в области комплексных чисел, как следует из основной теоремы алгебры, любой многочлен имеет хотя бы один комплексный корень, и, тем самым, n корней, пусть даже кратных. Этим объясняется большое значение комплексных линейных пространств.

Задача. Показать, что множество многочленов образует коммутативное кольцо (достаточно выполнения аксиом кольца).

VII. Билинейные и квадратичные формы

§1. Билинейные формы

Исходя из определения, под прямой суммой двух вещественных линейных пространств, образно говоря, можно понимать, например, построение плоскости $R^2 = R \times R$, по двум координатным осям. Следовательно, плоскость можно рассматривать как множество значений скалярной (вещественной) функции $\varphi(x, y)$ двух аргументов, $(x, y) \in R \times R$.

Пусть *M* и *N* линейные пространства и *L* их прямая сумма $L = M + N$ (напомним, что $M \bigcap N = 0$) над одним и тем же скалярным полем (полем *R*) [11].

Определение. Действительная функция φ, заданная на линейном пространстве *L* называется ***билинейной формой*** (***билинейным функционалом***), если равенства

$$\begin{cases} \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \varphi(x_1, y) + \alpha_2 \varphi(x_2, y), \\ \varphi(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \varphi(x, y_1) + \alpha_2 \varphi(x, y_2), \end{cases} \qquad \text{(VII.1)}$$

тождественно выполняются для всех ее аргументов и скаляров.

Формула (VII.1) представляет множество функций двух аргументов, у которых фиксированное значение одного из аргументов линейно зависит от другого.

Линейность билинейной формы легко проверяется, поэтому множество билинейных форм образует линейное пространство; нулем будет форма $O(x, y) = 0$, называемая ***нулевой формой***.

Отметим два свойства билинейных форм:

1) если *n*-мерное линейное пространство $L = M + N$ - прямая сумма линейных пространств *M* и *N* с размерностями *k* и *m*, то для любого множества действительных чисел вида $\{\alpha_{ij}\}$, $i = 1,2,\ldots,k$, $j = 1,2,\ldots,m$, существует, и при том единственная, билинейная форма, такая, что $\varphi(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$;

2) размерность *r* пространства всех билинейных форм равна произведению размерностей *M* и *N*, то есть $r = k \cdot m$.

Пример VII.1. В Евклидовом пространстве скалярное произведение является билинейной формой. ▼

Пусть L – n-мерное линейное пространство и $L = M + N$ с размерностью k и m, соответственно. Если $x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$, где $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ - базисы линейных пространств M и N, соответственно, то из формулы (VII.1) и свойства 1, имеем

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \sum_{j=1}^{m} b_j y_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i y_j \ . \qquad \text{(VII.2)}$$

В дальнейшем нас будет интересовать билинейная форма, аргументы которой совпадают, то есть $\varphi(x, x)$.

§2. Квадратичные формы

Определение. Билинейная форма $\varphi(x, x)$ одного векторного аргумента x называется ***квадратичной***.

Пусть L – n-мерное линейное вещественное пространство и $\varphi(x, y)$ - билинейная форма, тогда квадратичная форма $\varphi(x, x)$, как следует из (VII.2), имеет вид

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \ , \qquad \text{(VII.3)}$$

где коэффициенты при α_{ij} как-то выражены через a_i, b_j.

Если в (VII.3) привести подобные члены, то при x_i^2 получим коэффициент α_{ii}, а коэффициенты при $x_i x_j$ обозначим через $2\alpha_{ij}$, тогда можно составить матрицу $[A] = [\alpha_{ij}]$, которая называется ***матрицей квадратичной формы***, а ее ранг r называется ***рангом квадратичной формы***.

Матрица [A] симметрическая. Ее характеристикой является совпадение со своей транспонированной матрицей.

Так как L вещественное, то в нем можно ввести скалярное произведение, как сумму парных произведений координат. Тогда формулу (VII.3) можно упростить. В самом деле, составим матрицу $[\mathrm{A}]=[\alpha_{ij}]$ и введем пространство R^n, элементами которого являются вектор-столбцы, то есть $x=(x_1, x_2,..., x_n)^T$. Учитывая, введенное скалярное произведение, положим

$$([\mathrm{A}]x, x) = x^T \cdot ([\mathrm{A}]\cdot x). \qquad \text{(VII.4)}$$

В силу симметричности матрицы $[\mathrm{A}]$

$$([\mathrm{A}]x, x) = (x, [\mathrm{A}]x).$$

Пример VII.2. Пусть $n=2$, тогда в R^2 имеем $x=(x_1, x_2)^T$, $[\mathrm{A}]=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$, $x^T=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$. Учитывая (VII.4), получаем

$$(\mathrm{A}x, x) = (x_1\ x_2)\cdot\left(\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right) = (x_1\ x_2)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2\\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2\end{pmatrix} = x_1\cdot(\alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2)+x_2\cdot(\alpha_{21}\cdot x_1+$$

$$+\alpha_{22}\cdot x_2) = \alpha_{11}\cdot x_1{}^2+\alpha_{22}\cdot x_2{}^2+\alpha_{12}\cdot x_1\cdot x_2+\alpha_{21}\cdot x_2\cdot x_1.$$

Приведение к каноническому виду

Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования может быть приведена к ***каноническому виду***, определенному формулой

$$f \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{r} c_i y_i{}^2, \qquad \text{(VII.5)}$$

где форма f ранга $r \le n$ от n неизвестных; числа, $c_i \in R$, считаются положительными, но часть слагаемых формулы (VII.5) могут быть отрицательными.

При таком условии, заменой $z_i = \sqrt{c_i} \cdot y_i$, $i = 1,2,\ldots,r$; и $z_j = y_j$, $j = r+1,\ldots,n$, невырожденное линейное преобразование приводит квадратичную форму к ***нормальному*** виду, то есть

$$\tilde{f} = z_1^{\ 2} + \ldots + z_k^{\ 2} - z_{k+1}^{\ 2} - \ldots - z_r^{\ 2}. \qquad \text{(VII.6)}$$

Общее число квадратов равно рангу квадратичной формы.

Существует много линейных преобразований, приводящих квадратичную форму к нормальному виду (VII.6), но с точностью до расположения знаков такое приведение единственное [3, 7].

Для квадратичных действительных форм выполняется ***закон инерции***. Число положительных и отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная квадратичная форма с действительными коэффициентами действительным линейным преобразованием, не зависит от выбора этого преобразования.

Число положительных (отрицательных) квадратов в нормальной форме формы f называется ***положительным (отрицательным) индексом инерции*** (в формуле (VII.6) это k), разница между положительными и отрицательными индексами инерции называется ***сигнатурой*** формы f (в формуле (VII.6) она равна $r-k$).

Пусть дана квадратная матрица $[\mathrm{A}] = [\alpha_{ij}]$ размерности n квадратичной формы f. Миноры, расположенные по главной диагонали этой матрицы, порядков 1, 2, …, n, последний из них совпадает с определителем матрицы $[\mathrm{A}]$, $\det[\mathrm{A}]$, то есть

$$\Delta_1 = |\alpha_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \det[A],$$

называются ***главными*** минорами формы f.

Теорема VII.1. Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами, тогда и только тогда, будет состоять из положительных членов, когда все главные миноры положительны.

Пример VII.3. Квадратичная форма

$$f = 5x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + 5x_3^{\ 2} + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

положительно определена, так как все главные миноры матрицы [А] положительны:

$$\Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Приводить квадратичную форму к каноническому виду можно, как уже отмечалось, многими способами, но нормальный вид один. Покажем это на примере.

Пример VII.4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ [7].

Решение. Зададим линейное преобразование:

1) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 + 3y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$ тогда получим $f = \dfrac{1}{2}y_1^2 - \dfrac{1}{2}y_2^2 + 6y_3^2$.

Для другого преобразования имеем

2) $\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_2, \end{cases}$ тогда получим $f = 2y_1^{\ 2} + 6y_2^{\ 2} - 8y_3^{\ 2}$.

Нормальный вид квадратичной формы, которому соответствуют оба канонических вида, $g = z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} - z_3^{\ 2}$.

Упражнение. Проверить справедливость полученных формул непосредственной подстановкой преобразований 1) и 2) в исходную квадратичную форму.

Вполне естественно возникает вопрос: «Как найти матрицу линейного преобразования (оператора)?»

Прежде чем перейти к рассмотрению следующего примера, дадим некоторые пояснения. Не нарушая сущности общего подхода, ограничимся уравнением

$$H = a_{11}x^2 + 2a_{12}x \cdot y + a_{22}y^2,$$

где правая часть есть квадратичная форма, заданная в декартовой системе координат Oxy. С другой стороны, это выражение определяет линию второго порядка. Ясно что, если правая часть последнего равенства представлена суммой квадратов переменных

$$h = \tilde{a}_{11} x_1^{\ 2} + \tilde{a}_{22} x_2^{\ 2},$$

то имеем канонический вид квадратичной формы.

Оба уравнения будут описывать одну и ту же линию второго порядка, если в форме h сохранен прежний масштаб. Для получения канонического вида H обычно используют характеристическое уравнение. Недостаток такого подхода состоит в том, что неизвестна связь между системами координат Oxy и Ox_1y_1. Образно говоря, мы не знаем расположение линии L в системе координат Oxy, если она записана в каноническом виде h. Такой переход можно осуществить поворотом осей системы координат на угол φ (рис. VII.1), то есть перейти от координат x, y к x_1, y_1 по формулам

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi. \end{cases}$$

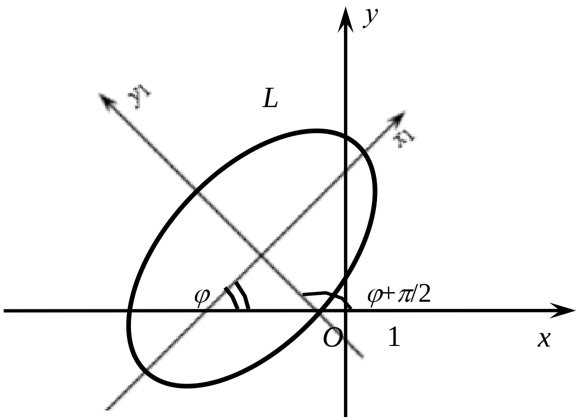


Рис. VII.1

Для обратного преобразования необходимо заменить угол φ на $-\varphi$.

Чтобы узнать расположение линии, мы должны найти преобразование координат, приводящее равенство *H* к виду *h*. Заметим, что для сохранения масштаба следует перейти к ортонормированной системе координат.

Пример VII.5. Задана квадратичная форма в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \qquad \text{(VII.7)}$$

Требуется привести ее к каноническому виду, то есть записать ее вид в системе $Oy_1y_2y_3$ и найти линейное преобразование. Получить нормальный вид квадратичной формы.

Решение. Составим симметричную матрицу линейного преобразования (оператора) A

$$[\mathrm{A}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Построим характеристический многочлен и найдем собственные числа и собственные векторы. Затем будем последовательно выполнять задания примера. Имеем

$$[\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}] = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение представляется равенством

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель матрицы, получим многочлен $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 7 = 0$, корни которого $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 3 \mp \sqrt{2}$ являются собственными числами. Запишем канонический вид формы (VII.7):

$$f = -y_1{}^2 + (3-\sqrt{2})y_2{}^2 + (3+\sqrt{2})y_3{}^2.$$

Найдем линейное преобразование, то есть установим связь между системами $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$. Так как корни действительные и различные, и нет нулей, то преобразование невырожденное. Найдем собственные векторы $b = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T$ в базисе $Oy_1y_2y_3$ (векторы будем представлять столбцами). Для этого решим систему уравнений

$$[\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}] \cdot b = 0, \qquad \text{(VII.8)}$$

определенную для каждого из собственных чисел.

При $\lambda = -1$, из (VII.8) имеем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 .$$

Полагая, с необходимостью, $\gamma = 0$, получим

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

при $\beta = -1$, имеем $\alpha = 1$. Первый собственный вектор найден $b_1 = (1 \quad -1 \quad 0)^T$, его длина $|b_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

При $\lambda = 3 - \sqrt{2}$ имеем

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} (-2+\sqrt{2})\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha + (-2+\sqrt{2})\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + \sqrt{2}\gamma = 0. \end{cases}$$

Прибавляя к первому уравнению второе и, замечая, что, если полученное уравнение решать как систему с третьим, то с необходимостью перейдем к первому собственному вектору. Остается составить систему уравнений из суммы двух первых и второго уравнения, тогда получим

$$\begin{cases} \sqrt{2}\alpha + \sqrt{2}\beta + 2\gamma = 0, \\ 2\alpha + (-2+\sqrt{2})\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Полагая $\gamma = -1$, после упрощений получим систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \sqrt{2}, \\ 2\alpha + (-2 + \sqrt{2})\beta = 1, \end{cases}$$

из которой определяем $\alpha = \dfrac{1 - 2\sqrt{2}}{-4 + \sqrt{2}} = \dfrac{1 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1 - 2\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Второй собственный вектор найден:

$$b_2 = \left(1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad -1\right)^T, \ |b_2| = \sqrt{2}.$$

При $\lambda = 3 + \sqrt{2}$, выполняя аналогичные действия, при $\gamma = -1$ получим третий собственный вектор

$$b_3 = \left(1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 1\right)^T, \ |b_3| = \sqrt{2}.$$

Для составления ортонормированной матрицы преобразования, нормируем векторы b_1, b_2, b_3. Получаем ортонормированную матрицу оператора A, которая состоит из вектор–столбцов, с нормирующим множителем $1/\sqrt{2}$. Таким образом, матрица невырожденного линейного преобразования имеет вид

$$[\tilde{\mathrm{A}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Для записи линейного преобразования воспользуемся формулой $(x_1 \quad x_2 \quad x_3) = [\tilde{\mathrm{A}}] \cdot (b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T$, из которой имеем

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} b_1 + \dfrac{1}{2} b_2 - \dfrac{1}{2} b_3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} b_1 + \dfrac{1}{2} b_2 - \dfrac{1}{2} b_3, \\ x_3 = 0 \cdot b_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} b_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} b_3. \end{cases}$$

Подставляя вместо x_1, x_2, x_3 их правые части в перноначальную квадратичную форму f получим ее канонический вид.

Можно также применить скалярное произведение для получения канонического вида квадратичной формы, если воспользоваться формулой

$$f=(b_1\quad b_2\quad b_3)\cdot\left([A]\cdot(b_1\quad b_2\quad b_3)^T\right)=(b_1\quad b_2\quad b_3)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} b_1/\sqrt{2} & b_2/2 & b_3/2 \\ -b_1/\sqrt{2} & b_2/2 & b_3/2 \\ 0\cdot b_1 & -b_2/\sqrt{2} & b_3/\sqrt{2} \end{pmatrix}=-b_1^{\,2}+(3-\sqrt{2})b_2^{\,2}+(3+\sqrt{2})b_3^{\,2}.$$

Все остальные слагаемые являются произведениями ортогоналных векторов и потому их скалярное произведение равно 0.

Нормальный вид квадратичной формы получим из канонического вида заменой $z_3=\sqrt{3+\sqrt{2}}b_3$, $z_2=\sqrt{3-\sqrt{2}}b_2$, $z_1=b_1$, тогда $g=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

VIII. Гиперповерхности и поверхности второго порядка

Понятия поверхности и линии (кривой) относятся к фундаментальным понятиям геометрии (топологии); используются практически во всех математических и естественных науках. Поэтому их общее определение довольно затруднительно. В геометрии, аналитической и алгебраической, поверхность и линия определяются как геометрическое место точек, координаты которых записаны в декартовых координатах и удовлетворят уравнению $\Phi(x,y,z)=0$ или $\Phi(x,y)=0$, соответственно.

В n-мерных линейных пространствах плоскость размерности (n–1) называется ***гиперплоскостью***, а плоскость размерности 1 – прямой линией. Аналогичную терминологию будем применять и к поверхностям. Учитывая геометричность многих свойств поверхности и гиперповерхности, в дальнейшем будем называть векторы точками пространства действительных чисел R^n. Это подтверждается и эквивалентностью понятий *n*-мерного векторного пространства и пространства R^n [4].

Зададим в пространстве R^n декартовую систему координат и превратим его в Евклидово, то есть, определим в R^n скалярное произведение.

Определение. Гиперповерхностью f второго порядка в R^n называется множество точек $\{x\}$, координаты $(x_1, x_2, ..., x_n)$ которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i - 2\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k + c = 0, \qquad \text{(VIII.1)}$$

$a_{ji}, b_k, c \in R$, $i, j, k = 1,2,...,n$.

Формулу (VIII.1) можно упростить, если определить скалярное произведение в R^n как сумму попарных произведений координат, тогда получим

$$(Ax, x) - 2(b, x) + c = 0. \qquad \text{(VIII.2)}$$

Учитывая симметричность матрицы А линейного оператора имеем также для (VIII.1)

$$(x, Ax) - 2(b, x) + c = 0.$$

Для исследования гиперповерхности (VIII.1) удобно преобразовать ее к каноническому виду. Воспользуемся уравнением (VIII.2). Процесс приведения к каноническому виду происходит в полном соответствии с алгоритмом приведения к каноническому виду квадратичных форм [7], которые нами уже изучены.

Классификация линий второго порядка

I. Рассмотрим в R^2 гиперповерхность 2-го порядка, которая по определению имеет размерность $n-1=1$, то есть является линией 2-го порядка.

Определение. Линией 2-го порядка в декартовой системе координат *Oxy* пространства R^2 называется множество точек, удовлетворяющих уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \qquad \text{(VIII.3)}$$

Применяя линейный оператор (преобразование) к уравнению (VIII.3), приводим его к одному из трех линейно независимых уравнений канонического вида:

1) $a_1x^2 + a_2y^2 + a_0 = 0$,

2) $b_1y^2 + b_0x = 0$, (VIII.4)

3) $a_1x^2 + a_0 = 0$,

где коэффициенты во всех уравнениях не равны нулю.

В зависимости от знака коэффициентов, выделим два класса линий [4]

- нераспадающиеся линии:

  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *эллипс*;

  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *гипербола*;

  $y^2 = 2px$ – *парабола*;

- распадающиеся линии:

  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара мнимых пересекающихся прямых;

  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – *пара действительных пересекающихся прямых*;

  $x^2 - a^2 = 0$ – *пара действительных параллельных прямых*;

  $x^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных прямых;

  $x^2 = 0$ – *пара совпадающих действительных прямых*.

Более подробно рассмотрим класс нераспадающихся линий.

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки $C(x_0, y_0)$, называемой ее центром.

Пусть точка $M(x, y)$ произвольна и лежит на данной окружности, тогда расстояние CM равно некоторому числу R, называемому радиусом этой окружности. В фиксированной системе координат уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ определяет *окружность* с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R.

Пример VIII.1. Найти центр и радиус окружности $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

*Решение***.** Выделим полный квадрат по каждой переменной, тогда уравнение можно записать в виде: $(x^2+2\cdot x\cdot 1+1)-1+(y^2-2\cdot y\cdot 2+4)-4-4=0$, или $(x+1)^2+(y-2)^2=9$. Значит это окружность с центром в точке $(-1, 2)$ и радиусом $R=3$.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Выведем уравнение эллипса. Пусть F_1 и F_2 – фокусы (рис. VIII.1). Положим $|F_1F_2|=2c$. Декартову систему координат зададим следующим образом: ось Ox направим по прямой F_1F_2, а начало поместим в середину отрезка F_1F_2. Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда $|F_1M|+|F_2M|=2a$, где величина a дана, причем $a>c$. Имеем:

$$|F_1M|=r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ,\ |F_2M|=r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

И, следовательно, уравнение эллипса имеет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2\cdot a\ .$$

Упростим последнее равенство: перенесем второе слагаемое последнего равенства в правую часть и возведем обе части в квадрат, получим $(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$, выполним преобразования и приведем подобные: $4xc-4a^2=4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

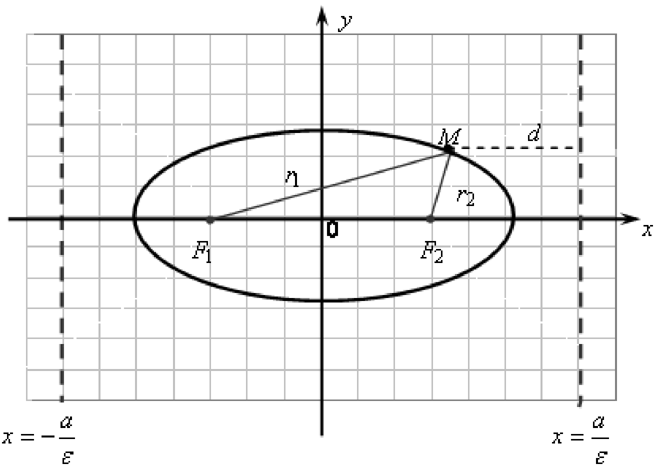


Рис. VIII.1

Разделим полученное равенство на четыре и возведем обе части еще раз в квадрат: $x^2\cdot c^2-2x\cdot c\cdot a^2+a^4=a^2\cdot(x-c)^2+a^2\cdot y^2$, и преобразуем $x^2\cdot c^2-2x\cdot c\cdot a^2+a^4=a^2\cdot(x^2-2x\cdot c+c^2)+a^2\cdot y^2$,

окончательно получим: $x^2\cdot c^2+a^4-a^2\cdot x^2-a^2\cdot c^2-a^2\cdot y^2=0$, $x^2\cdot(c^2-a^2)-a^2\cdot y^2=a^2\cdot(c^2-a^2)$.

Так как $a>c$, то обозначим $b^2=c^2-a^2>0$ и разделим обе части последнего равенства на эту величину: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - ***каноническое уравнение эллипса*** с полуосями $x=a$, $y=b$ и центром симметрии в точке $(0,0)$. Число a в уравнении эллипса называется большой, а b – малой полуосью эллипса. Прямую, на которой расположены фокусы эллипса, называют *фокальной осью*.

Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса, а прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса.

Пример VIII.2. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + 4x - 16y - 4 = 0$ определяет эллипс.

***Решение*.** Преобразуем данное уравнение выделив полные квадраты $(x+2)^2 + 4\cdot(y-2)^2 - 4 - 16 - 4 = 0$. Введем новые переменные $x_1 = x+2$, $y_1 = y-2$. Тогда $x_1^2 + y_1^2 = 24$ или $\dfrac{x_1^2}{24} + \dfrac{y_1^2}{6} = 1$. Последнее уравнение определяет эллипс с центром в точке $(-2, 2)$, причем $a = \sqrt{24}$, $b = \sqrt{6}$.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое множество точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Выведем уравнение гиперболы. Положим $|F_1F_2| = 2c$. Систему координат (рис. VIII.2) выберем так же, как и в случае эллипса. Тогда $F_1(-c, 0)$, а $F_2(c, 0)$. Если $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы, то $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2\cdot a$, a - постоянная, $c > a$. Это уравнение соответствует определению гиперболы. Преобразуя его, как и в случае эллипса, и положив $b^2 = c^2 - a^2$, получим ***каноническое уравнение гиперболы***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

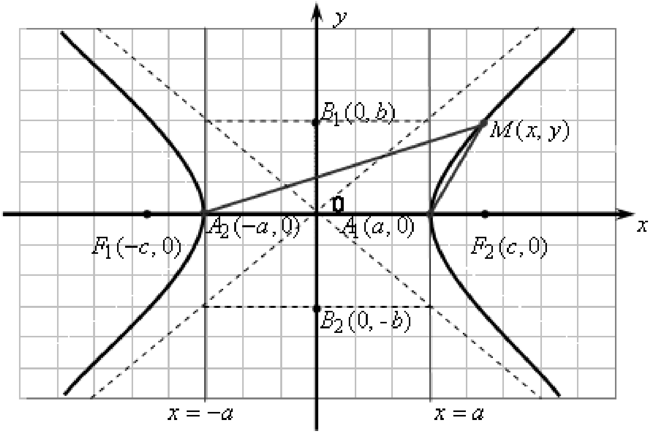


Рис. VIII.2

Гипербола – кривая, симметричная относительно осей и начала координат. Прямые $y=\pm\dfrac{b}{a}\cdot x$ являются *асимптотами* гиперболы, величина $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы, $\varepsilon>1$, а прямые $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ - ее *директрисами*.

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки *F* и данной прямой (рис. VIII.3). Точка *F* называется *фокусом* параболы, а данная прямая – *директрисой* параболы. Для получения уравнения параболы, выберем систему координат следующим образом: ось *Ox* проведем через фокус *F* перпендикулярно директрисе. Начало координат поместим в точку, равноудаленную от фокуса и директрисы. Обозначим расстояние между фокусом и директрисой через ***p***. Величина ***p*** называется параметром параболы. В выбранной системе координат фокус *F* имеет координаты $(p/2,0)$, а уравнение директрисы имеет вид $x=-p/2$ или $x+p/2=0$, по определению $|M'M|=|FM|$

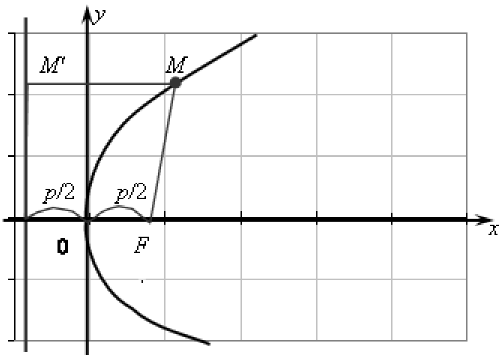


Рис. VIII.3

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка параболы. Соединим точку M с точкой F. Проведем отрезок MM' перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы $MF=MM'$. По формуле расстояния между двумя точками находим: $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, а $MM'=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$.

Следовательно, $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}$. После элементарных преобразований получим ***каноническое уравнение параболы***:

$$y^2=2\cdot p\cdot x.$$

Пример VIII.3. Классифицировать линию 2-го порядка $4x^2-9y^2-40x-36y+28=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Выделим полный квадрат по каждой переменной, для этого сгруппируем отдельно слагаемые, содержащие переменную x и y: $(4x^2-40x)-(9y^2+36y)=-28$. Коэффициенты при переменных в старшей степени вынесем общими множителями

$4\cdot(x^2-10x)-9\cdot(y^2+4y)=-28$. Полученные выражения в скобках дополним до полного квадрата, в первом случае прибавим и отнимем 25, во втором – 4: $4\cdot\left((x-5)^2-25\right)-9\cdot\left((y+2)^2-4\right)=-28$. После раскрытия скобок постоянные перенесем в правую часть равенства $4\cdot(x-5)^2-9\cdot(y+2)^2=-28-36+100$. Приведем подобные $4\cdot(x-5)^2-9\cdot(y+2)^2=36$. Запишем уравнение линии 2-го порядка в общем виде. Разделим последнее равенство на 36, чтобы получит единицу в правой части

$$\frac{(x-5)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1 \text{ или } \frac{(x-5)^2}{3^2}-\frac{(y+2)^2}{2^2}=1.$$

Данная линия (рис. VIII.4) является гиперболой с центром в точке $(5,-2)$ и полуосями $a=3$, $b=2$.

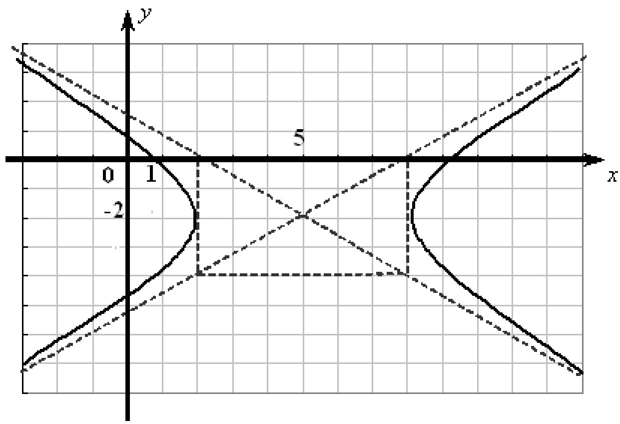


Рис. VIII.4

Классификация поверхностей второго порядка

II. Рассмотрим в R^3 поверхность 2-го порядка, которая имеет размерность $n=3$ [9, 10].

Определение. Поверхностью 2-го порядка в декартовой системе координат $Oxyz$ пространства R^3, называется множество точек, удовлетворяющих уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^3 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1 x +$$
$$+ 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0 . \qquad \text{(VIII.5)}$$

Линейным преобразованием (матрицей линейного оператора) уравнение (VIII.5) приводится к одному из пяти линейно независимых уравнения канонического вида

1) $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_0 = 0$,

2) $a_1 x^2 + a_2 y^2 + b_0 z = 0$,

3) $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_0 = 0$, (VIII.6)

4) $a_1 x^2 + b_0 y = 0$,

5) $a_1 x^2 + a_0 = 0$,

где коэффициенты во всех уравнениях не равны 0.

Как и ранее, выделим классы поверхностей:

- невырожденные и нераспадающиеся поверхности:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – *эллипсоид* (рис. VIII.5);

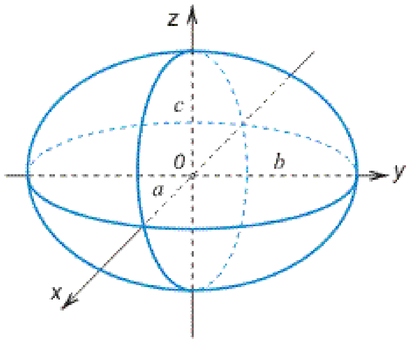


Рис. VIII.5

Если $a = b = c = R$, то эллипсоид становится сферой (рис. VIII.6);

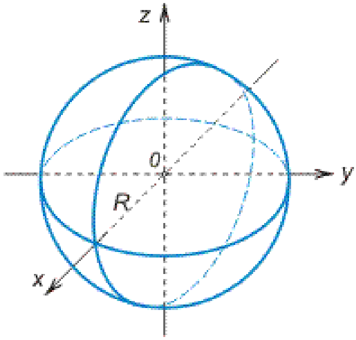


Рис. VIII.6

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ – мнимый эллипсоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – *однополостной гиперболоид* (рис. VIII.7);

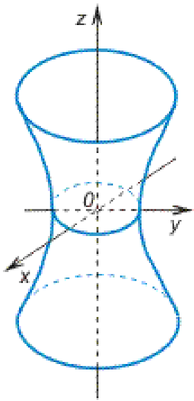


Рис. VIII.7

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – *двуполостной гиперболоид* (рис. VIII.8);

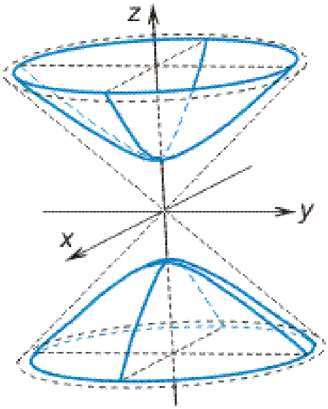


Рис. VIII.8

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, $a,b>0$ – *эллиптический параболоид* (рис. VIII.9);

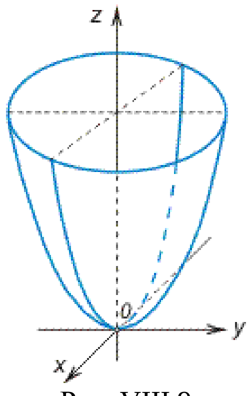


Рис. VIII.9

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, $a,b>0$ – *гиперболический параболоид* (рис. VIII.10);

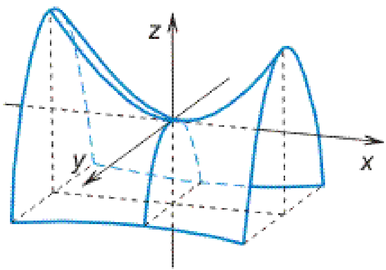


Рис. VIII.10

- вырождающиеся нераспадающиеся поверхности:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – мнимый эллиптический цилиндр;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – *эллиптический цилиндр* (рис. VIII.11);

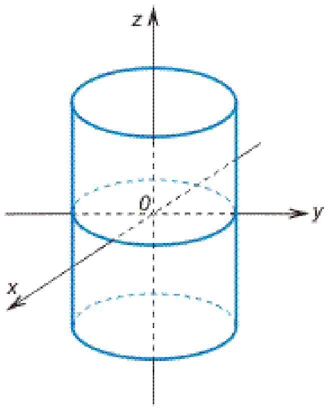


Рис. VIII.11

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – *гиперболический цилиндр* (рис. VIII.12);

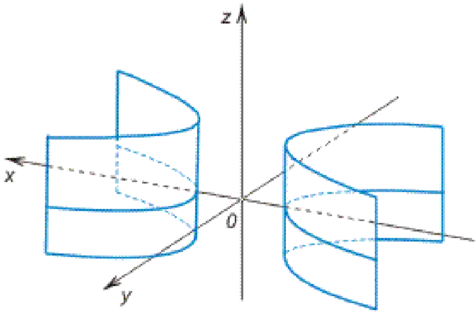


Рис. VIII.12

$y^2 = 2px$ – *параболический цилиндр* (рис. VIII.13);

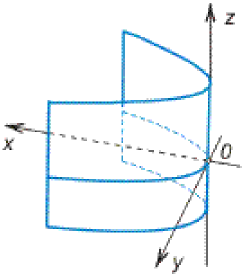


Рис. VIII.13

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – *коническая поверхность* (рис. VIII.14);

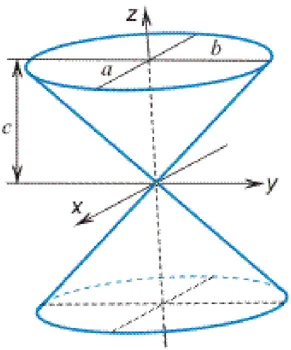


Рис. VIII.14

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – мнимая коническая поверхность;

- вырождающиеся распадающиеся поверхности:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара мнимых пересекающихся плоскостей;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – *пара пересекающихся прямых*;

$x^2+a^2=0$ – пара мнимых параллельных плоскостей;

$x^2-a^2=0$ – *пара параллельных плоскостей*;

$x^2=0$ – *пара совпадающих плоскостей*.

Пример VIII.4. Преобразовать к каноническому виду поверхность 2-го порядка

$$4xy+y^2+4yz+2z^2-4x-2y-5=0.$$

Решение. Прежде чем переходить к повороту осей координат $Ox_1y_1z_1$, осуществим линейный перенос так, чтобы можно было применить методику квадратичных форм. Положим

$$x_1=x-1,\ y_1=y-1,\ z_1=z+1,$$

тогда поверхность запишется в виде

$$y_1{}^2+2z_1{}^2+4x_1y_1+4y_1z_1-8=0.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$f=y_1{}^2+2z_1{}^2+4x_1y_1+4y_1z_1.$$

Составим матрицу квадратичной формы

$$[\mathrm{A}]=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа и собственные векторы. Имеем характеристический многочлен:

$$\det([\mathrm{A}]-\lambda\mathrm{E})=-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=0,$$

корни которого $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$.

Запишем канонический вид поверхности с точностью до коэффициентов (сначала запишем их положительные значения):

$$y_1{}^2 + 4z_1{}^2 - x_1{}^2 - 8 = 0.$$

По классификации это однополостной гиперболоид. Явный вид линейного преобразования находим аналогично примерам предыдущего раздела:

$$(x \quad y \quad z)^T = (1 \quad 1 \quad -1)^T + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T,$$

где первое слагаемое определяет параллельный сдвиг, а второе поворот вокруг оси симметрии. Окончательно

$$\begin{cases} x = 1 - x_1/3 - 2y_1/3 - 2z_1/3, \\ y = 1 - 2x_1/3 - y_1/3 + 2z_1/3, \\ z = -1 - 2x_1/3 + 2y_1/3 - z_1/3. \end{cases}$$

Заключение

Если вы читаете эту страницу, то будем считать, что знакомство с линейной алгеброй и с сопутствующими ей разделами математики состоялось. Конечно, для систематического применения на практике полученных знаний недостаточно. Существует много книг, способных расширить ваш кругозор. Однако, особенностью развития современного научного общества является использование быстродействующих вычислительных средств, в основе которых лежит принцип параллельной обработки информации. Именно поэтому, для углубленного изучения и применения методов, и не только, линейной алгебры, в теории и практике, необходимо хорошее знание теории линейных операторов (преобразований) и алгоритмов (*algorithm*).

Одной из лучших книг для самообразования является фундаментальный труд:

Кормен, Т.Х. Алгоритмы: построение и анализ / Т.Х. Кормен, Ч.И. Лейзерсон, Р.Л. Ривест, К. Штайн. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. – 1296 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, П.С. Курс аналитической гиометрии и линейной алгебры / П.С. Александров. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. - 512 с.
2. Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра. Определения, теоремы, формулы / Б.Л. ванн дер Варден.- СПб.: Лань, 2004. - 624 с.
3. Воеводин, В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2008. - 416 с.
4. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - М.: Физматлит, 2008. – 280 с.
5. Кантор, И.Л.Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. – М.: Наука, 1973. – 145 с.
6. Куратовкий, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовсктй. – М.: Мир, 1970, 416 с.
7. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2011. - 432 с.
8. Павский, В.А. Лекции по теории вероятностей и элементам математической статистики / В.А. Павский. – Кемерово: КемТИПП, 2005. – 184 с.
9. Постников, М.М. Теория Галуа / М.М. Постников.- М.: Факториал Пресс, 2003. - 304 с.
10. Френкель, А. Основания теории множеств / А.Френкель, И. Бар-Хиллел. – М.: Мир, 1966. – С. 556.
11. Халмош, П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош. – М., Ижевск: РХД, 2002. – 264 с.
12. Хайкин, С. Нейронные сети / С. Хайкин. – М.; СПб.; Киев: 2008. – 1003 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Павский Валерий Аексеевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Для студентов вузов

Нач. редакции
Редактор
Технический редактор
Художественный редактор

ЛР №020524 от 02.06.97
Подписано в печать . . . Формат $60\times84^{1/16}$
Бумага типографская. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 150 экз.
Заказ №

ПЛД №44-09 от 10.10.99.
Отпечатано в лаборатории множительной техники
Кемеровского технологического института пищевой промышленности
650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52