



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

**С.А. Иванова, В.А. Павский**

## **МАТЕМАТИКА**

Учебное пособие

Для студентов вузов

В четырех частях

Часть 1

Кемерово 2010

**УДК 51 (075)**

**ББК 22.1я7**

**И21**

*Рецензенты:*

**Н.Н. Данилов**, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий  
кафедрой математической кибернетики КемГУ;

**Н.К. Смоленцев**, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий  
кафедрой математического анализа КемГУ

*Рекомендовано редакционно-издательским советом  
Кемеровского технологического института пищевой  
промышленности*

**Иванова, С.А.**

**И21** Математика: учебное пособие. В 4-х ч. Ч.1. / С.А. Иванова,  
В.А. Павский; Кемеровский технологический институт пище-  
вой промышленности. – 2-е изд., испр. и допол. – Кемерово,  
2010. – 160 с.

ISBN 978-5-89289-637-5

Учебное пособие составлено в соответствии с програм-  
мой дисциплины «Математика» и предназначено для студен-  
тов всех форм обучения.

**УДК 51 (075)**

**ББК 22.1я7**

ISBN 978-5-89289-637-5

Нач. редакции *А.С. Обвинцева*

Редактор *А.В. Проскурина*

Технический редактор *Е.В. Кадочникова*

Художественный редактор *О.В. Оскорбина*

*Охраняется законом об авторском  
праве, не может быть использовано  
любым незаконным способом  
без письменного договора*

© КемТИПП, 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| Введение .....                                                 | 5  |
| Тема 1. Элементы линейной алгебры .....                        | 6  |
| Матрицы и действия над ними .....                              | 6  |
| Определитель матрицы .....                                     | 10 |
| Обратная матрица .....                                         | 15 |
| Ранг матрицы .....                                             | 16 |
| Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений .....        | 18 |
| Методы решения системы линейных алгебраических уравнений ..... | 19 |
| Однородная система линейных алгебраических уравнений .....     | 25 |
| Системы линейных неравенств .....                              | 27 |
| Тема 3. Линейные пространства .....                            | 30 |
| Базис линейного пространства .....                             | 31 |
| Собственные значения и собственные векторы матрицы .....       | 32 |
| Тема 4. Элементы векторной алгебры .....                       | 36 |
| Векторы .....                                                  | 36 |
| Линейные операции над векторами .....                          | 37 |
| Проекция вектора на ось .....                                  | 38 |
| Разложение вектора по ортам координатных осей .....            | 40 |
| Модуль вектора. Направляющие косинусы .....                    | 41 |
| Базис системы векторов .....                                   | 42 |
| Скалярное произведение векторов .....                          | 46 |
| Векторное и смешанное произведение векторов .....              | 50 |
| Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости .....             | 53 |
| Система координат на плоскости .....                           | 53 |
| Уравнение линии на плоскости .....                             | 55 |
| Уравнение прямой на плоскости .....                            | 56 |
| Тема 6. Кривые второго порядка .....                           | 60 |
| Окружность .....                                               | 60 |
| Эллипс .....                                                   | 61 |
| Гипербола .....                                                | 63 |
| Парабола .....                                                 | 64 |
| Тема 7. Аналитическая геометрия в пространстве .....           | 67 |
| Уравнение поверхности и линии в пространстве .....             | 67 |
| Уравнение плоскости в пространстве .....                       | 68 |

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| Взаимное расположение плоскостей.....                                | 74  |
| Уравнение прямой в пространстве $R^3$ .....                          | 75  |
| Тема 8. Функции. Теория пределов .....                               | 84  |
| Понятие функции .....                                                | 84  |
| Задание функций в полярной системе координат .....                   | 90  |
| Числовые последовательности .....                                    | 93  |
| Предел числовой последовательности .....                             | 94  |
| Предел функции .....                                                 | 100 |
| Вычисление пределов .....                                            | 103 |
| Первый замечательный предел .....                                    | 106 |
| Второй замечательный предел .....                                    | 107 |
| Эквивалентные функции .....                                          | 109 |
| Непрерывность функции .....                                          | 110 |
| Тема 9. Дифференциальное исчисление .....                            | 115 |
| Определение производной .....                                        | 115 |
| Геометрический смысл производной .....                               | 115 |
| Правила дифференцирования, таблица производных .....                 | 119 |
| Производные сложной и обратной функций .....                         | 125 |
| Дифференцирование неявных и<br>параметрически заданных функций ..... | 127 |
| Логарифмическое дифференцирование .....                              | 128 |
| Геометрические приложения производной .....                          | 130 |
| Дифференциал функции .....                                           | 131 |
| Производные высших порядков .....                                    | 133 |
| Теоремы о дифференцируемости функции .....                           | 134 |
| Правило Лопиталья .....                                              | 137 |
| Формула Тейлора .....                                                | 138 |
| Тема 10. Исследование функции.....                                   | 139 |
| Возрастание и убывание функции.....                                  | 139 |
| Экстремумы функции .....                                             | 140 |
| Заключение .....                                                     | 149 |
| Задания для самостоятельной работы .....                             | 150 |
| Список литературы.....                                               | 160 |

## ВВЕДЕНИЕ

Кафедра высшей математики Кемеровского технологического института пищевой промышленности предлагает курс математики, соответствующий программе для вузов, общим объемом 500–700 часов, адаптированный для студентов заочного обучения.

Курс состоит из четырех частей, каждая из которых рассчитана на один семестр и включает разделы математики, соответствующие программе семестра. Каждая часть является методическим комплексом, ориентированным на самостоятельное изучение материала соответствующих разделов математики. Представленный материал содержит информацию, достаточную для изучения и усвоения материала, используемого в инженерных приложениях.

Настоящий методический комплекс предназначен для студентов всех специальностей заочной формы обучения, в том числе с применением дистанционных технологий.

Программа 1-го семестра включает следующие разделы: матрицы и действия над ними; определители матриц и их свойства; системы линейных алгебраических уравнений и способы их решения; линейные пространства; векторы и операции над ними; уравнения плоскости и прямой в пространстве; кривые второго порядка на плоскости; функции, способы их задания; пределы последовательностей и функций; непрерывность функций и классификация точек разрыва; дифференцирование функций; полное исследование функции и построение ее графика.

Итогом изучения семестрового курса математики является выполнение двух контрольных работ и получение зачета. Подготовиться к зачету помогут задания теста, приведенные в конце настоящего методического комплекса.

## ТЕМА 1. Элементы линейной алгебры

### *Матрицы и действия над ними*

**Определение.** Матрицей размера  $m \times n$  называется совокупность  $m \cdot n$  элементов, представленная в виде таблицы, состоящей из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij}$  – элемент матрицы  $A$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $m, n \in N$ .

Матрица размера  $1 \times n$  или  $m \times 1$  называется матрицей-строкой или матрицей-столбцом соответственно (или вектором).

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, а число строк называется ее порядком или размером. Матрица  $A$  порядка  $n$  имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы квадратной матрицы размера  $n$ , стоящие на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами, то есть  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ , ...,  $a_{nn}$ , образуют главную диагональ, а сумма элементов главной диагонали  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  называется следом матрицы. Соответственно элементы  $a_{1n}$ ,  $a_{2, n-1}$ , ...,  $a_{n1}$ , лежащие на прямой, соединяющей правый верхний и левый нижний углы матрицы, образуют побочную диагональ.

Мы будем рассматривать числовые и функциональные матрицы.

**Определение.** Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю, называется единичной и обозначается

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Определение.** Квадратная матрица, у которой элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, называется треугольной.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Определение.** Матрица  $A^T$  называется транспонированной к матрице  $A$ , если у нее каждая строка является столбцом матрицы  $A$  с тем же номером.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

### **Действия над матрицами**

#### **1. Сложение матриц**

Пусть матрицы  $A$  и  $B$  имеют одинаковый размер  $m \times n$ , т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $C$  размера  $m \times n$  называется суммой матриц  $A$  и  $B$ , если

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \quad m, n \in N,$$

то есть, чтобы сложить матрицы одинакового размера, необходимо сложить их соответствующие элементы.

#### **2. Умножение матрицы на число**

Чтобы умножить матрицу на число, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}, \quad m, n \in N, \quad \lambda - const.$$



### 3. Умножение матриц

Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  и матрицы  $B$  размера  $n \times k$  называется матрица  $C$  размера  $m \times k$ , имеющая следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

где  $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Замечание 1.** Отметим, что умножение матриц определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

**Замечание 2.** Из правила умножения матриц следует, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , то есть умножение матриц некоммутативно.

**Пример 1.1.** Заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти, если это имеет смысл,  $A+B$ ,  $A \cdot B$ ,  $B^T$ .

**Решение.** Так как матрицы квадратные, то для них все эти операции выполняются. Определим сумму матриц  $A$  и  $B$ , для этого вычислим суммы соответствующих элементов:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 & 3+2 \\ 2-2 & 2+1 & 1+2 \\ 3+1 & 2+0 & 1-1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вычислим произведение:

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Для транспонирования матрицы  $B$  необходимо поменять местами соответствующие строки и столбцы:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Упражнение.** Выяснить, какие из предложенных операций примера 1.1 выполнимы, если размерность матрицы  $A - m \times n$ , а матрицы  $B - n \times k$ .

### ***Определитель матрицы***

Если числовая матрица квадратная, ее можно оценить (определить), то есть поставить в соответствие число.

**Определение.** Определителем  $\Delta$  (или  $\det A$ ) матрицы  $A$  порядка  $n$  называется многочлен элементов этой матрицы.

Для матрицы порядка  $n$  определитель записывается в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если матрица числовая, то значение определителя есть число, которое находят по известным правилам.

### ***Свойства определителей***

**1.** Определитель матрицы не меняется при транспонировании матрицы:

$$\det A = \det A^T.$$

**2.** Определитель матрицы равен нулю, если он содержит строку (столбец), все элементы которой равны нулю.

**3.** Определитель матрицы равен нулю, если элементы двух строк (столбцов) одинаковые.

**4.** Определитель матрицы равен нулю, если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны.

**5.** Определитель матрицы меняет свой знак на противоположный при перестановке местами любых двух строк (столбцов).

**6.** Если все элементы некоторой строки (столбца) имеют общий множитель, то он выносится за знак определителя как сомножитель.

**7.** Если к одной строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на число, то значение определителя не изменится.

**8.** Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

### **Вычисление определителей**

**Определитель 2-го порядка** равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

**Пример 1.2.** Вычислить определители:

$$1) \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - (-2) \cdot 1 = 24 + 2 = 26;$$

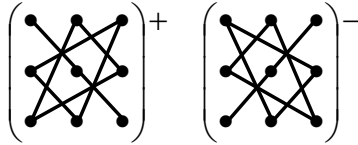
$$2) \quad \begin{vmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{vmatrix} = \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{b} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 + \\ + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} + (\sqrt{b})^2 = a + b;$$

$$3) \quad \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - (-\cos x) \cdot \cos x = \sin^2 x + \\ + \cos^2 x = 1.$$

**Определитель 3-го порядка** вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + \\ + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}).$$

Для ее запоминания используется мнемоническое правило – **правило треугольников**. Оно состоит в изображении (явном или мысленном) элементов матрицы точками. Точки, соответствующие произведениям, которые входят в формулу определителя, соединяются отрезками.



Главной диагонали и двум треугольникам, основания которых ей параллельны, соответствуют произведения со знаком «+», а побочной диагонали и треугольникам, основания которых ей параллельны, соответствуют произведения со знаком «-».

**Определение.** Минором  $k$ -го порядка матрицы порядка  $n$  называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием  $n-k$  строк и  $n-k$  столбцов. Определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении вычеркнутых  $n-k$  строк и столбцов, называется дополнительным минором к минору  $k$ -го порядка,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Определение.** Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы порядка  $n$  называется определитель порядка  $n-1$ , полученный вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца из определителя  $\Delta$  исходной матрицы. Элемент  $a_{ij}$  и его минор  $M_{ij}$  являются взаимно дополнительными минорами,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Определение.** Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы порядка  $n$  называется минор  $M_{ij}$  этого элемента, взятый со знаком «+», если сумма  $i + j$  четная, и со знаком «-», если сумма  $i + j$  нечетная, то есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Определитель  $n$ -го порядка можно вычислить *разложением по  $i$ -й строке* ( $j$ -му столбцу). Например, для определителя 3-го порядка получаются следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

**Пример 1.3****1)** Вычислить определитель по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} - \\ - \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} - \frac{1}{30} - \frac{1}{36} - \frac{1}{8} = \\ = \frac{72 + 15 + 5 - 12 - 10 - 45}{360} = \frac{25}{360} = \frac{5}{72}.$$

**2)** Вычислить определитель разложением по третьему столбцу.

Определим алгебраические дополнения элементов третьего столбца:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/6 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{7}{120},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 \end{vmatrix} = - \left( 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40}.$$

Далее по формуле (1) имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot A_{13} + \frac{1}{6} \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{7}{120} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} +$$

$$+1 \cdot \frac{3}{40} = -\frac{7}{360} + \frac{1}{72} + \frac{3}{40} = \frac{-7 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 9}{360} = \frac{25}{360} = \frac{5}{72}.$$

### ***Обратная матрица***

**Определение.** Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной. В противном случае квадратная матрица называется невырожденной.

**Определение.** Матрица  $A^{-1}$  называется обратной к матрице  $A$  порядка  $n$ , если она удовлетворяет следующему равенству:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

**Теорема 1.1.** Для существования обратной матрицы  $A^{-1}$  необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была невырожденной [4].

Если обратная матрица к матрице  $A$  порядка  $n$  существует, то она находится по формуле:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

**Пример 1.4.** Найти матрицу, обратную к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Вычислим определитель матрицы  $A$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 12 - (18 + 2 + 2) = 17 - 22 = -5 \neq 0.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , матрица  $A$  является невырожденной и для нее существует обратная, найдем ее. Для этого вычислим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы  $A$ :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим найденные значения в формулу (2):

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 1 & -8 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1/5 & 8/5 & -1 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### ***Ранг матрицы***

**Определение.** Рангом матрицы  $A$  называется наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Обозначается  $\text{rang} A = r \geq 0$ .

#### ***Элементарные преобразования матрицы***

- 1) Перестановка двух строк.
- 2) Умножение любой строки на ненулевое число.
- 3) Добавление к одной строке другой, умноженной на любое число.



**Замечание.** При определении ранга матрицы целесообразно при помощи элементарных преобразований привести ее к треугольному виду. Используя свойство 8 определителей, легко найти наибольший порядок отличных от нуля миноров.

**Теорема 1.2.** Ранг матрицы не изменится, если к ней применить элементарные преобразования.

**Пример 1.5.** Вычислить ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Решение.** Приведем матрицу  $A$  к треугольному виду. Переставим 1-ю и 3-ю строки местами. Домножим 1-ю строку на  $(-5)$  и  $(-2)$  и прибавим ко 2-й и 3-й строке соответственно. Полученную 2-ю строку разделим на  $(-2)$  и прибавим к полученной 3-й строке.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-5) & \times(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-2) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, минор 3-го порядка  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ , минор 2-го

порядка  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$ , поэтому  $\text{rang} A = 2$ .



**Определение.** Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решения, то она называется несовместной.

**Теорема 2.1 (Кронекера – Капелли)**

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов  $A$  равен рангу расширенной матрицы коэффициентов  $\bar{A}$ . При этом если ранг матрицы  $A$  равен рангу матрицы  $\bar{A}$  и равен числу неизвестных, то система уравнений имеет единственное решение; если ранги матриц  $A$  и  $\bar{A}$  равны и меньше числа неизвестных системы, то система уравнений имеет множество решений.

***Методы решения системы линейных алгебраических уравнений***

Рассмотрим систему из трех линейных алгебраических уравнений и трех неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3, \end{cases} \quad (3)$$

тогда матрица коэффициентов при неизвестных и расширенная матрица коэффициентов имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

## 1. Метод Крамера

Для системы (3) введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

где  $\Delta_i, i=1, 2, 3$ , – определители, полученные из исходного определителя  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов.

Тогда при решении системы методом Крамера [2] возможны следующие случаи:

1) если  $\Delta \neq 0$ , то система (3) совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

2) если  $\Delta = 0, \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ , то система (3) либо имеет множество решений, либо несовместна;

3) если  $\Delta = 0$  и хотя бы один из  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  не равен нулю, то система (3) несовместна и решения не имеет.

## 2. Матричный метод

Пусть для системы (3) определитель  $\Delta \neq 0$ . Запишем ее в матричной форме. Имеем:  $A$  – матрица коэффициентов при неизвестных,  $X$  – столбец неизвестных,  $B$  – столбец свободных членов системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A \cdot X = B.$$

Так как умножение матриц некоммутативно (неперестановочно), то, чтобы получить в левой части равенства  $X$ , умножим это уравнение на  $A^{-1}$  слева

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как  $A^{-1} \cdot A = E$ , то имеем

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

или

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (4)$$

### 3. Метод Гаусса

Метод Гаусса основан на алгоритме последовательного исключения неизвестных.

Выпишем расширенную матрицу коэффициентов системы (3):

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

Задача состоит в том, чтобы привести ее к «треугольному» виду при помощи эквивалентных преобразований, причем получить единицы на главной диагонали и нули под ними.

Алгоритм состоит в том, что на каждом шаге выполняются следующие действия (количество шагов определяется количеством уравнений). Выбирается одна из ненулевых, не рассмотренных ранее строк, ее номер считаем равным  $i$ . Все элементы этой строки делятся на элемент, стоящий на  $i$ -м месте (номер столбца этого элемента равен  $j$ ). Если на  $i$ -м шаге какая-то из строк содержит уже на  $i$ -м месте единицу, то именно она переставляется и считается  $i$ -й строкой. Далее, добавляя к остальным, ранее не рассмотренным строкам  $i$ -ю строку, умноженную на подходящее число, добиваемся того, чтобы все элементы  $j$ -го столбца, расположенные ниже  $i$ -й строки, были равны нулю.

При решении системы уравнений (3) методом Гаусса возможны следующие случаи.

1) Если матрица  $\bar{A}$  приведена к треугольному виду, то система (3) совместна и имеет единственное решение.

2) Если матрица  $\bar{A}$  содержит хотя бы одну строку, все элементы которой равны нулю, то система (3) совместна и имеет множество решений.

3) Если матрица  $\bar{A}$  содержит строку, все элементы которой кроме свободного члена равны нулю, то система (3) несовместна, то есть решения не имеет.

**Пример 2.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

**Решение**

1) Решим систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 36.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то система совместна и имеет единственное решение:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1$ ,  $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0$ ,  $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{36}{18} = 2$ .

2) Решим систему матричным методом.

Так как  $\Delta \neq 0$ , то обратная матрица к матрице  $A$  существует. Вычислим алгебраические дополнения, имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

тогда обратная матрица  $A^{-1}$  имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы. Для этого запишем уравнение (4) в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 7 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \\ -3 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

следовательно,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 2$ .

3) Решим систему методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу коэффициентов  $\overline{A}$  к «треугольному виду». Для этого переставим 1-ю и 2-ю строки местами. Затем домножим 1-ю строку на  $(-2)$  и прибавим ко 2-й и 3-й строкам. Полученную 2-ю строку домножим на  $(3)$  и прибавим к полученной 3-й строке. В итоге последнюю строку разделим на 18.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-18) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к треугольному виду, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Найдем его, выписав систему уравнений, соответствующую последней матрице.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_2 - 5x_3 = -10, \\ x_3 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2 \cdot 2 - 0 = 1, \\ x_2 = -10 + 5 \cdot 2 = 0, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2$ .

**Пример 2.2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + 11x_3 = 3. \end{cases}$$

**Решение**

1) Решим систему методом Крамера, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -5 & 11 \end{vmatrix} = -140 \neq 0.$$

Так как  $\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0$ , то система несовместна, решения не имеет.

2) Решим систему матричным методом. Так как  $\Delta = 0$ , то обратная матрица к матрице  $A$  не существует, матричный метод не применим.

3) Решим систему методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу коэффициентов  $\bar{A}$  к треугольному виду. Для этого домножим 1-ю строку на  $(-3)$  и  $(-2)$  и прибавим ко 2-й и 3-й строкам соответственно. Полученную 2-ю строку прибавим к полученной 3-й строке:



$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 5 \\ 3 & -5 & 4 & | & 2 \\ 2 & -5 & 11 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times (-3) \times (-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 1 & -5 & | & -13 \\ 0 & -1 & 5 & | & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow +} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 1 & -5 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & -20 \end{pmatrix}.$$

Так как у полученной матрицы в последней строке коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член не равен нулю, то решения нет, то есть система несовместна.

Ответ: система несовместна.

## *Однородная система линейных алгебраических уравнений*

**Определение.** Система линейных алгебраических уравнений называется однородной (ОСЛАУ), если все свободные члены системы равны нулю:

[illegible]

Очевидно, что однородная система линейных алгебраических уравнений совместна, так как одно ее решение всегда известно: все неизвестные равны нулю.

**Теорема 2.2.** Однородная система (5) имеет единственное нулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов при неизвестных не равен нулю. В противном случае у системы (5) окажется множество решений.

### Пример 2.3. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Вычислим определитель матрицы  $A$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 12 - 22 + 20 - 11 + 6 = 0.$$

Так как  $\det A = 0$ , то хотя бы одна из строк является линейной комбинацией других, следовательно, система имеет множество решений, которые найдем, например, методом Крамера.

Решим систему из двух уравнений (оставшееся уравнение является комбинацией этих двух):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть  $x_3 = t$ , тогда

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = t, \\ 2x_1 + 5x_2 = -t. \end{cases}$$

Вычислим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} t & 3 \\ -t & 5 \end{vmatrix} = 5t + 3t = 8t,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & -t \end{vmatrix} = -t - 2t = -3t.$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8t}{-1} = -8t, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3t}{-1} = 3t, \quad x_3 = t.$$

Ответ:  $x_1 = -8t$ ,  $x_2 = 3t$ ,  $x_3 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

## ***Системы линейных неравенств***

**Определение.** Два алгебраических выражения, соединенные одним из знаков  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ , образуют неравенства. Неравенства называются линейными, если переменные  $x$ ,  $y$  входят в него в первых степенях, не перемножаясь между собой, то есть имеют вид:

$$\begin{aligned} ax + by + c > 0, \quad ax + by + c < 0; \\ ax + by + c \geq 0, \quad ax + by + c \leq 0. \end{aligned}$$

Решением линейного неравенства называется всякая пара значений переменных  $x$ ,  $y$ , при которых оно выполнимо. Решить неравенство – значит найти множество всех его решений.

Известно, что пара действительных чисел  $(x, y)$  однозначно определяет точку координатной плоскости, поэтому множество решений линейного неравенства можно изобразить графически на координатной плоскости. В зависимости от знака неравенства графическим изображением решения линейного неравенства является одна из полуплоскостей, на которые разделяется плоскость соответствующей прямой.

Пусть задана система линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \geq c_1, \\ a_2x + b_2y \geq c_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny \geq c_n, \end{cases}$$

тогда решением этой системы называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому из неравенств этой системы, поэтому множество решений системы есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств. Если это пересечение пусто, то решения системы неравенств не существует.

**Пример 2.4.** Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства  $x + y - 1 > 0$ .

**Решение.** Преобразуем данное неравенство к виду  $y > 1 - x$ . Построим на координатной плоскости прямую  $y = 1 - x$  (рис. 2.1).

Так как ордината любой точки, лежащей выше прямой  $y = 1 - x$ , больше, чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на прямой, то множество точек плоскости, расположенных выше этой прямой, и будет геометрическим изображением решений заданного неравенства.

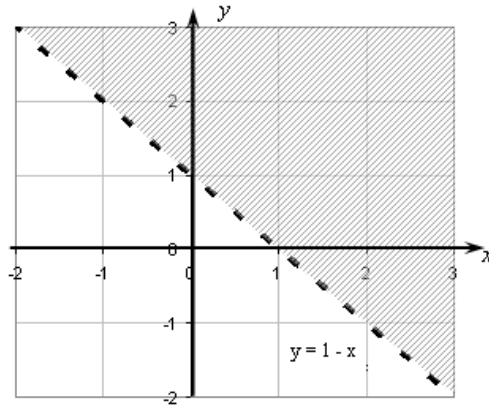


Рис. 2.1

**Пример 2.5.** Изобразить множество решений системы неравенств на координатной плоскости и определить координаты «угловых» точек этого множества:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \geq 0, \\ x_2 - x_1 + 4 \geq 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 20 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Решение.** Построим на координатной плоскости прямые  $x_2 = 1 - x_1$  (1),  $x_2 = x_1 - 4$  (2),  $x_2 = (20 - 4x_1)/5$  (3),  $x_1 = 0$  (4),  $x_2 = 0$  (5) (рис. 2.2).

Все неравенства, входящие в систему, нестрогие, поэтому сами прямые будут входить в множество решений системы. Если неравенство имеет вид  $x_2 \leq f(x_1)$ , то геометрическим изображением его решения является нижняя полуплоскость, если  $x_2 \geq f(x_1)$ , то – верхняя полуплоскость.

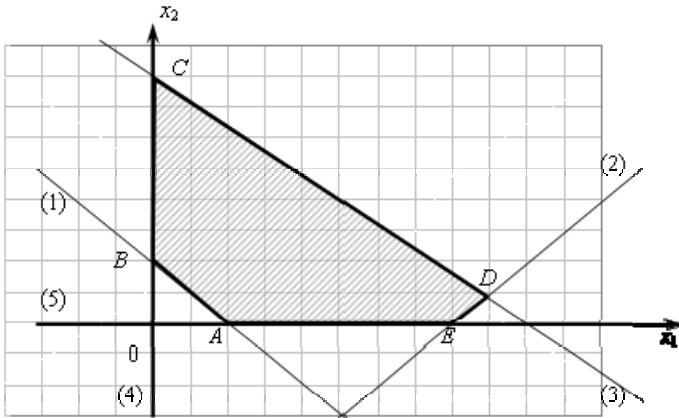


Рис. 2.2

Угловые точки полученного множества лежат на пересечении двух прямых, поэтому, чтобы найти их координаты, необходимо решить системы уравнений, их задающих.

$$A: \begin{cases} x_2 = 1 - x_1, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow A(1; 0).$$

$$B: \begin{cases} x_2 = 1 - x_1, \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow B(0; 1).$$

$$C: \begin{cases} x_2 = \frac{4}{5}(5 - x_1), \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \Rightarrow C(0; 4).$$

$$D: \begin{cases} x_1 = x_2 + 4, \\ 4x_1 + 5x_2 = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4\frac{4}{9}, \\ x_2 = \frac{4}{9}, \end{cases} \Rightarrow D\left(4\frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right).$$

$$E: \begin{cases} x_2 = x_1 - 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow E(4; 0).$$

### ТЕМА 3. Линейные пространства

**Определение.** Непустое множество  $L$  называется линейным (векторным) пространством над полем действительных чисел  $R$ , если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на число, то есть для любых элементов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in L$  и  $\alpha, \beta \in R$  выполняется:

I.  $\bar{a} + \bar{b} \in L$ , причем

1) *сложение коммутативно*,  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ ;

2) *сложение ассоциативно*,  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ ;

3) существует нулевой элемент  $\bar{0} \in L$  такой, что  $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$ ;

4) для любого  $\bar{a} \in L$  существует такой противоположный элемент  $-\bar{a} \in L$ , что  $-\bar{a} + \bar{a} = \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$ .

II.  $\alpha \cdot \bar{a} \in L$ , причем

1) *умножение на число ассоциативно*,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{a});$$

2)  $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$ .

III. Связь между I и II, причем

1) *умножение на число дистрибутивно относительно сложения векторов*,  $\alpha \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \cdot \bar{a} + \alpha \cdot \bar{b}$ ;

2) *умножение на векторы дистрибутивно относительно чисел*,  $(\alpha + \beta) \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{a}$ .

Элементы линейного пространства называются точками или векторами. Операции над элементами: сложение (I) и умножение на число (II) – называются линейными.

### **Пример 3.1**

1) Рассмотрим множество матриц. Будем считать строки матрицы векторами, соответственно матрицу-строку будем называть вектор-строкой, а матрицу-столбец – вектор-столбцом. Пусть  $L$  – множество матриц одной размерности,  $A, B \in L, \lambda \in R$ , тогда

$$\text{I. } \lambda \cdot A \in L.$$

$$\text{II. } A + B \in L.$$

Для введенных линейных операций выполняются все дополнительные требования при условии, что нулевым элементом является нулевая матрица. Таким образом, множество квадратных матриц образует линейное пространство над полем действительных чисел.

2) Векторы на плоскости как направленные отрезки с операциями сложения и умножения на действительное число образуют двумерное линейное пространство над множеством действительных чисел.

### ***Базис линейного пространства***

**Определение.** Выражение вида  $\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{a_n}$ , где  $\overline{a_i} \in L$  и  $\alpha_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$ , называется линейной комбинацией векторов  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$  над полем действительных чисел.

**Определение.** Совокупность (система) векторов  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n} \in L$  называется линейно зависимой, если существуют такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ , одновременно не равные нулю, для которых выполняется соотношение

$$\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{a_n} = \overline{0}.$$

Если это равенство выполняется только в том случае, когда все коэффициенты  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то система векторов называется линейно независимой.

**Определение.** Линейное пространство называется  $n$ -мерным (размерности  $n$ ), если в нем существует  $n$  линейно независимых элементов, а любые его  $(n+1)$  элементов – линейно зависимы.

**Определение.** Базисом системы векторов  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}, \dots \in L$  –  $n$ -мерного линейного пространства называется такая ее часть  $\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{i_2}}, \dots, \overline{a_{i_n}}$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{i_2}}, \dots, \overline{a_{i_n}}$  – линейно независимая система векторов;
- 2) любой вектор системы  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}, \dots \in L$  является линейной комбинацией линейно независимых векторов  $\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{i_2}}, \dots, \overline{a_{i_n}}$ .

**Теорема 3.1.** Каждый вектор системы  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}, \dots \in L$  единственным образом раскладывается по векторам ее базиса.

### *Собственные значения и собственные векторы матрицы*

**Определение.** Пусть задано линейное пространство  $L$ . Преобразованием  $A$  этого пространства называется закон, по которому каждому вектору  $\overline{a} \in L$  соответствует вектор  $\overline{b} \in L$ , то есть  $\overline{b} = A \cdot \overline{a}$ .

Преобразование  $A$  называется линейным, если для любых элементов  $\overline{a}, \overline{b} \in L$  и любого числа  $\lambda$  справедливы равенства:

- 1)  $A \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = A \cdot \overline{a} + A \cdot \overline{b}$ ;
- 2)  $A \cdot (\lambda \cdot \overline{a}) = (\lambda \cdot A) \cdot \overline{a}$ .

Если  $L$  – 3-мерное пространство  $(L^3)$ , в котором выбран некоторый базис, то связь между координатами вектора  $\overline{x}$  (прообраза) и координатами вектора  $\overline{y}$  (образа) определяется системой:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = y_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = y_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = y_3 \end{cases}$$



или в матричной форме:

$$Y = A \cdot X,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  называется матрицей линейного преобразования.

**Определение.** Всякий ненулевой вектор  $\bar{u}$  называется **собственным вектором линейного преобразования**  $A$ , если найдется число  $\lambda$  такое, что выполняется равенство

$$A \cdot \bar{u} = \lambda \cdot \bar{u}. \quad (6)$$

Число  $\lambda$  называется **собственным значением линейного преобразования**  $A$ , соответствующим собственному вектору  $\bar{u}$ ,  $\lambda \in R$ .

Если в пространстве  $L^3$  задан некоторый базис, то равенство (6) может быть записано в матричной форме:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X. \quad (7)$$

Всякий ненулевой столбец, для которого выполняется равенство (7), называется **собственным вектором матрицы**  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$ .

Так как  $A \cdot X = \lambda \cdot E \cdot X$ , где  $E$  – единичная матрица, то уравнение (7) можно записать в виде:

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot X = \bar{0}.$$

Перейдя к координатной форме записи, будем иметь:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot \xi_1 + a_{12} \cdot \xi_2 + a_{13} \cdot \xi_3 = 0, \\ a_{21} \cdot \xi_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot \xi_2 + a_{23} \cdot \xi_3 = 0, \\ a_{31} \cdot \xi_1 + a_{32} \cdot \xi_2 + (a_{33} - \lambda) \cdot \xi_3 = 0, \end{cases}$$

где  $\xi_i$  – координаты собственного вектора  $X$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Для отыскания собственных векторов необходимо найти ненулевые решения системы, которые существуют тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, то есть

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \quad (8)$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение (8) называется **характеристическим уравнением** матрицы  $A$ , его корни  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  – **характеристическими числами** или **собственными значениями** матрицы  $A$ .

**Пример 3.2.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ .

**Решение.** Найдем собственные значения матрицы  $A$ , для этого составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 6 \\ 8 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \text{ После вычисления определителя}$$

и приведения подобных получаем квадратное уравнение  $\lambda^2 + 2\lambda - 63 = 0$ . Найдем его корни.

Если задано квадратное уравнение  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  и его дискриминант  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$ , то корни уравнения определяются по формуле  $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a$ . В нашем случае

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-63) = 256 = (16)^2 > 0, \lambda_1 = \frac{-2 + 16}{2} = 7,$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 - 16}{2} = -9.$$

Определим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям. При  $\lambda = 7$  получим систему, решение которой определяет собственный вектор  $\overline{u_1}$ :

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 = 0, \\ 8x_1 - 12x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ x_2 = c_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \cdot c_1, \\ x_2 = c_1, \end{cases}$$

тогда  $\overline{u_1} = c_1 \cdot (3/2, 1)$ .

При  $\lambda = -9$  получим систему, решение которой определяет собственный вектор  $\overline{u_2}$ .

$$\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 = 0, \\ 8x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 = c_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \cdot c_2, \\ x_2 = c_2, \end{cases}$$

тогда  $\overline{u_2} = c_2 \cdot (-1/2, 1)$ .

Ответ:  $\lambda_1 = 7$ ,  $\overline{u_1} = c_1 \cdot (3/2, 1)$ ,  $\lambda_2 = -9$ ,  $\overline{u_2} = c_2 \cdot (-1/2, 1)$ .

## ТЕМА 4. Элементы векторной алгебры

### ***Векторы***

Величина, которая полностью определяется своим числовым значением, называется ***скалярной***, или ***скаляром*** (термин ввел

У. Гамильтон в 1843 г.). Примерами скалярных величин являются площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют **векторными**. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

**Вектор** – это направленный отрезок. Если  $A$  – начало вектора, а  $B$  – его конец, то вектор обозначается символом  $\overline{AB}$  или  $\vec{a}$ . Вектор  $\overline{BA}$  называется *противоположным* вектору  $\overline{AB}$ . Вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , обозначается  $(-\vec{a})$ .

**Длиной вектора**  $\overline{AB}$  называется длина отрезка  $AB$  и обозначается  $|\overline{AB}|$ . Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым** вектором и обозначается  $\vec{0}$  (или  $0$ , когда нет сомнений в понимании обозначения). Нулевой вектор направления не имеет. Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** и обозначается через  $\vec{e}$ . Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , называется **ортом** вектора  $\vec{a}$ . Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку  $O$  пространства, то есть векторы определены с точностью до параллельного переноса.

Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

### **Линейные операции над векторами**

Под линейными операциями над векторами, как обычно, понимают операции сложения и умножения вектора на число.

**Геометрическая интерпретация.** Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку  $O$  и построим из нее вектор  $\vec{OA} = \vec{a}$ . От точки  $A$  отложим вектор  $\vec{AB} = \vec{b}$ . Вектор  $\vec{OB}$ , соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$  (рис. 4.1).

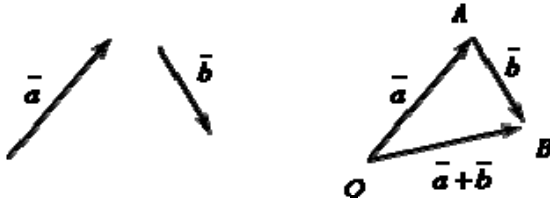


Рис. 4.1

Это правило сложения векторов называется правилом треугольника. Аналогично происходит сложение нескольких векторов (рис 4.2).

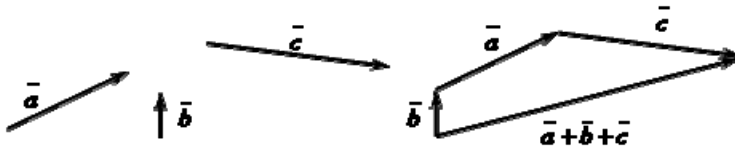


Рис. 4.2

Под разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  понимается вектор  $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . На практике векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  откладывают из одной точки, концы соединяют, и вектор имеет направление «к концу вектора  $\vec{a}$ ».

Отметим, что в параллелограмме (рис. 4.3), построенном на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , одна направленная диагональ является суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а другая – разностью.

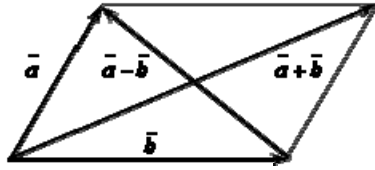


Рис. 4.3

Произведением вектора  $\vec{a}$  на скаляр (число)  $\lambda$ ,  $\lambda \in R$ , называется вектор  $\lambda \cdot \vec{a}$ , который имеет длину вектора  $\vec{a}$ , умноженную на  $\lambda$ , а направление совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположно направлению вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ .

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- 3)  $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{a}$ ;
- 4)  $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a}$ ;
- 5)  $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in R$ ,

которые вполне аналогичны свойствам элементов линейного пространства.

Эти свойства позволяют проводить преобразования над векторами так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

### ***Проекция вектора на ось***

Прямая с заданной на ней точкой и единичным базисным вектором  $\vec{e}$  называется **осью**.

**Ортогональной проекцией** точки  $A$  на ось называется точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку  $A$ .

Пусть в пространстве задана направленная прямая  $l$ . Проекцией точки  $M$  на ось  $l$  называется основание  $M_1$  перпендикуляра  $MM_1$ ,

опущенного из точки  $M$  на ось. Если точка  $M$  лежит на оси  $l$ , то проекция точки  $M$  на ось совпадает с  $M$  (рис. 4.4).

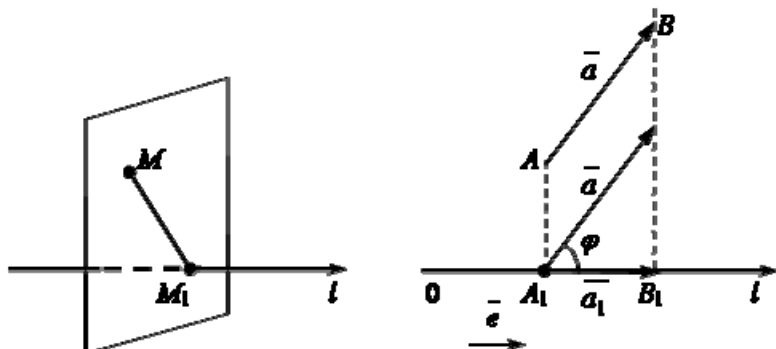


Рис. 4.4

Пусть  $\overline{AB} = \overline{a}$  – произвольный вектор. **Проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$**  называется координата вектора  $\overline{A_1B_1} = \overline{a_1}$  относительно единичного вектора  $\overline{e}$  оси, где  $A_1$  и  $B_1$  – проекции точек  $A$  и  $B$  на ось  $l$ , то есть если  $\overline{A_1B_1} = \lambda \cdot \overline{e}$ , то число  $\lambda$  называется проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  в направлении  $\overline{e}$ . Обозначение для проекции:  $\lambda = np_{\overline{e}} \overline{AB}$ .

Из правил сложения векторов и умножения векторов на число, заданных своими координатами, следует, что:

$$\lambda = np_{\overline{e}}(k \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{b}) = k \cdot np_{\overline{e}} \overline{a} + \mu \cdot np_{\overline{e}} \overline{b}, \text{ где } k, \mu \in R.$$

Легко показать, что  $\lambda = np_{\overline{e}} \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\overline{e}$  и  $\overline{AB}$ , отсчитываемый по правилам тригонометрии: от вектора  $\overline{e}$  против часовой стрелки до вектора  $\overline{AB}$ .

**Следует помнить:** проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол прямой.

### **Разложение вектора по ортам координатных осей**

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат  $Oxyz$  (рис. 4.5). Выделим на координатных осях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  единичные векторы (орты), обозначаемые  $\overline{i}$ ,  $\overline{j}$ ,  $\overline{k}$

соответственно. Выберем произвольный вектор  $\vec{a}$  пространства и совместим его начало с началом координат:  $\vec{a} = \overline{OM}$ .

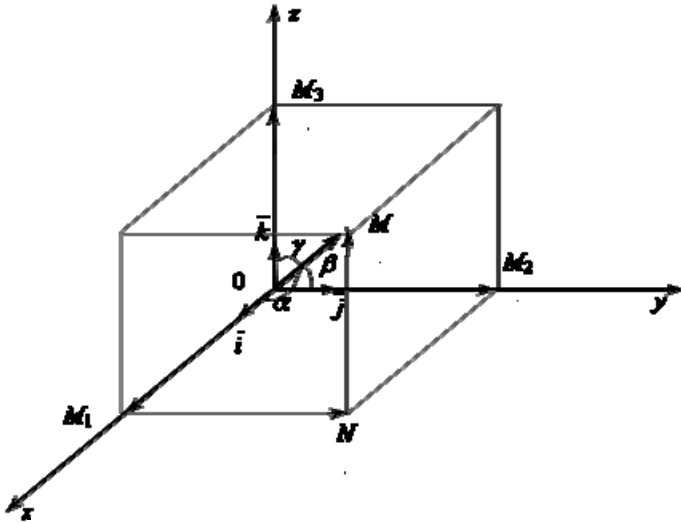


Рис. 4.5

Найдем проекции вектора  $\vec{a}$  на координатные оси. Проведем через конец вектора  $\overline{OM}$  плоскости, параллельные координатным. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через  $M_1, M_2, M_3$ . Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор  $\overline{OM}$ . Тогда  $np_x \vec{a} = |\overline{OM_1}|$ ,  $np_y \vec{a} = |\overline{OM_2}|$ ,  $np_z \vec{a} = |\overline{OM_3}|$ . По определению суммы нескольких векторов находим  $\vec{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM}$ . Так как  $\overline{M_1N} = \overline{OM_2}$ ,  $\overline{NM} = \overline{OM_3}$ , то  $\vec{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}$ .

Обозначим проекции вектора  $\vec{a}$  на оси соответственно  $a_1, a_2, a_3$ , тогда

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}. \quad (9)$$



Эта формула является основной в векторном исчислении и называется разложением вектора по ортам координатных осей. Числа  $a_1, a_2, a_3$  называются координатами вектора  $\vec{a}$ , то есть координаты вектора есть его проекции на координатные оси.

Векторное равенство (9) часто записывают в координатном виде  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ .

### ***Модуль вектора. Направляющие косинусы***

Пусть углы вектора  $\vec{a}$  с осями  $Ox, Oy, Oz$  соответственно равны  $\alpha, \beta, \gamma$ . По свойству проекции вектора на ось имеем:

$$a_1 = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, \quad a_2 = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, \quad a_3 = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma$$

или, что то же самое:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}. \quad (10)$$

Числа  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  называются направляющими косинусами вектора  $\vec{a}$  ( $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ).

Действия над векторами, заданными проекциями, выполняются аналогично действиям над матрицей-строкой (матрицей-столбцом).

***Координаты вектора.*** Найдем координаты вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , если известны координаты точек  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ . Имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Следовательно, координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

**Длина вектора.** Далее будет доказано, что если известны координаты точек  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ , то длина вектора  $\overline{a} = \overline{AB}$  находится по формуле:

$$|\overline{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Пример 4.1.** Начало вектора находится в точке  $M(3, 1, 12)$ , конец – в точке  $K(6, 5, 0)$ . Найти координаты вектора  $\overline{MK}$ , его длину и направление.

**Решение.** Для того чтобы найти координаты вектора  $\overline{MK}$ , нужно от координат конца вычесть координаты начала вектора:

$$\overline{MK} = (6 - 3, 5 - 1, 0 - 12) = (3, 4, -12) = 3 \cdot \bar{i} + 4 \cdot \bar{j} - 12 \cdot \bar{k}.$$

Найдем длину вектора:

$$|\overline{MK}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13. \text{ Теперь по формулам (10)}$$

$$\text{имеем: } \cos \alpha = \frac{3}{13}, \cos \beta = \frac{4}{13}, \cos \gamma = -\frac{12}{13}.$$

### **Базис системы векторов**

**Определение.** Система векторов  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$  называется линейно зависимой, если существуют такие константы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , не все равные нулю, поэтому имеет место равенство

$$\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \alpha_3 \cdot \overline{a_3} = \vec{0}.$$

Если из этого равенства с необходимостью следует, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , то система называется линейно независимой.

**Определение.** Базисом в трехмерном пространстве называется любая упорядоченная система из трех линейно независимых векторов пространства.

**Теорема 4.1.** Векторы  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3) \in L^3$  образуют базис тогда и только тогда, когда  $\Delta \neq 0$ ,

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

### Доказательство

1) *Необходимость.* Пусть векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in L^3$  образуют базис, тогда по определению эти векторы линейно независимые, а следовательно, равенство

$$\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} = \bar{0},$$

которое эквивалентно однородной системе

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 = 0, \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 = 0, \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 = 0, \end{cases}$$

выполняется только в случае  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное нулевое решение только в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

По 1-му свойству определителей (С. 13) получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Необходимость доказана.

2) *Достаточность.* Пусть для векторов  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$  пространства  $L^3$  выполняется

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Проверим линейную независимость векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in L^3$ , составим равенство  $\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} = \bar{0}$ , рассмотрим однородную систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 = 0, \\ \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 = 0, \\ \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы, не равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то эта система имеет единственное нулевое решение, по определению векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in L^3$  образуют систему линейно независимых векторов, а следовательно, и базис в пространстве  $L^3$ . Теорема доказана.

Если векторы  $\overline{a_1}$ ,  $\overline{a_2}$ ,  $\overline{a_3}$  образуют базис, а вектор  $\overline{a}$  представляется в виде  $\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \alpha_3 \cdot \overline{a_3}$ , тогда числа  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  называются координатами вектора  $\overline{a}$  в базисе  $\overline{a_1}$ ,  $\overline{a_2}$ ,  $\overline{a_3}$ , то есть  $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

**Пример 4.2.** Даны три вектора  $\overline{p} = (3, 2, 4)$ ,  $\overline{q} = (4, 3, 5)$ ,  $\overline{r} = (7, 5, -2)$ . Показать, что они образуют базис и найти разложение вектора  $\overline{a} = (4, 3, 2)$  в этом базисе.

**Решение.** Покажем, что векторы  $\overline{p}$ ,  $\overline{q}$ ,  $\overline{r}$  образуют базис. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -18 + 70 + 80 - 84 - 75 + 16 = -11 \neq 0.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то по теореме 4.1 векторы  $\overline{p}$ ,  $\overline{q}$ ,  $\overline{r}$  образуют базис. Отсюда получаем разложение вектора  $\overline{a}$  по базисным векторам  $\overline{p}$ ,  $\overline{q}$ ,  $\overline{r}$ :

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{p} + \alpha_2 \cdot \overline{q} + \alpha_3 \cdot \overline{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  вектора  $\overline{a}$  в новом базисе, необходимо найти решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то система совместна и имеет единственное решение:  $\alpha_1 = -\frac{3}{11}$ ,  $\alpha_2 = \frac{8}{11}$ ,  $\alpha_3 = \frac{3}{11}$ . То есть

$$\bar{a} = -\frac{3}{11} \cdot \bar{p} + \frac{8}{11} \cdot \bar{q} + \frac{3}{11} \cdot \bar{r}.$$

**Определение.** Совокупность всех трехмерных векторов с действительными координатами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, образует трехмерное векторное пространство.

### *Скалярное произведение векторов*

До сих пор мы изучали понятие линейности и не касались количественных характеристик: угла и длины, что особенно важно для приложений. Для лучшего усвоения дальнейшего материала рассмотрим двумерное линейное пространство над полем действительных чисел с введенной в нем декартовой прямоугольной системой координат.

Пусть  $\bar{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2) \in L^2$ . Тогда длина отрезка, соединяющего концы векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ , находится по очевидной формуле  $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ . Для расстояния до  $\bar{a}$  от начала  $\bar{0} = (0, 0)$  введем обозначения  $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ . Перейдем к углам между векторами. Если  $\varphi$  – угол между отрезком, соеди-

няющим  $O$  с  $\vec{a}$  и положительной осью  $Ox$ , а  $\Theta$  – угол между отрезком, соединяющим  $O$  с  $\vec{b}$  и той же осью, то углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будет  $\angle(\varphi - \Theta)$ , тогда

$$\cos(\varphi - \Theta) = \cos \varphi \cdot \cos \Theta + \sin \varphi \cdot \sin \Theta = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Введем обозначение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

С помощью полученного выражения можно очень простыми формулами выразить углы между векторами их длины.

**Определение.** Скалярным произведением  $(\vec{a}, \vec{b})$  ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, то есть

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Если хотя бы один из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  нулевой, то скалярное произведение равно нулю.

Для обозначения скалярного произведения часто используется запись  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Из определения следует, что скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы ортогональны (угол между ними  $90^\circ$ , а  $\cos 90^\circ = 0$ ).

### **Свойства скалярного произведения**

- 1)  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ ;
- 2)  $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ ;
- 3)  $(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a}, \vec{b})$ ;
- 4)  $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 > 0$  при  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ;

5) скалярное произведение двух векторов, заданных декартовыми прямоугольными координатами, равно сумме про-

изведений одноименных декартовых координат, то есть если  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , то

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Действительно, так как  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — единичные и ортогональные между собой векторы, тогда  $(\bar{i}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{j}) = (\bar{k}, \bar{k}) = 1$ ,  $(\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{i}, \bar{k}) = (\bar{j}, \bar{k}) = 0$  и по свойствам 1–4 скалярного произведения получаем:

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= (a_1 \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k}, b_1 \cdot \bar{i} + b_2 \cdot \bar{j} + b_3 \cdot \bar{k}) = (a_1 \cdot \bar{i}, b_1 \cdot \bar{i}) + \\ &+ (a_1 \cdot \bar{i}, b_2 \cdot \bar{j}) + (a_1 \cdot \bar{i}, b_3 \cdot \bar{k}) + (a_2 \cdot \bar{j}, b_1 \cdot \bar{i}) + (a_2 \cdot \bar{j}, b_2 \cdot \bar{j}) + \\ &+ (a_2 \cdot \bar{j}, b_3 \cdot \bar{k}) + (a_3 \cdot \bar{k}, b_1 \cdot \bar{i}) + (a_3 \cdot \bar{k}, b_2 \cdot \bar{j}) + (a_3 \cdot \bar{k}, b_3 \cdot \bar{k}) = \\ &= a_1 \cdot b_1 \cdot (\bar{i}, \bar{i}) + a_1 \cdot b_2 \cdot (\bar{i}, \bar{j}) + a_1 \cdot b_3 \cdot (\bar{i}, \bar{k}) + a_2 \cdot b_1 \cdot (\bar{j}, \bar{i}) + \\ &+ a_2 \cdot b_2 \cdot (\bar{j}, \bar{j}) + a_2 \cdot b_3 \cdot (\bar{j}, \bar{k}) + a_3 \cdot b_1 \cdot (\bar{k}, \bar{i}) + a_3 \cdot b_2 \cdot (\bar{k}, \bar{j}) + \\ &+ a_3 \cdot b_3 \cdot (\bar{k}, \bar{k}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3. \end{aligned}$$

**Замечание.** Свойство 5 в прямоугольной системе координат можно принять за определение скалярного произведения.

**С помощью скалярного произведения находят**

- 1) длину вектора  $\bar{a} = a_1 \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k}$ :  $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ;
- 2) расстояние  $d$  между точками  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ :  

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
;
- 3) проекцию одного вектора  $\bar{b}$  на направление другого вектора  $\bar{a}$ :

$$np_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|};$$



4) косинус угла между векторами:  $\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$ , где  $\varphi$

– угол между векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ ;

5) координаты орта вектора  $\bar{a}$  совпадают с его направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

**Пример 4.3.** Найти такое число  $\lambda$ , для которого векторы  $\bar{a} = (-3, -2, 1 - \lambda)$  и  $\bar{b} = (4, -2 + \lambda, 6)$  ортогональны.

**Решение.** Скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю, поэтому  $(\bar{a}, \bar{b}) = -3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2 + \lambda) + (1 - \lambda) \cdot 6 =$   
 $= -12 + 4 - 2\lambda + 6 - 6\lambda = -8\lambda - 2 = 0$ , получили линейное алгебраическое уравнение относительно  $\lambda$ , отсюда  $-8\lambda = 2$  или  $\lambda = -1/4$ , то есть при  $\lambda = -1/4$  векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  будут ортогональны. В самом деле, имеем  $(\bar{a}, \bar{b}) = -3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-9/4) + (5/4) \cdot 6 = 0$ .

**Пример 4.4.** Найти углы и длины сторон треугольника с вершинами  $A(0, 3)$ ,  $B(4, 7)$ ,  $C(7, 4)$ .

**Решение.** Определим координаты векторов:

$$\overline{AB} = (4 - 0, 7 - 3) = (4, 4), \quad \overline{AC} = (7 - 0, 4 - 3) = (7, 1),$$

$\overline{BC} = (7 - 4, 4 - 7) = (3, -3)$ , так как угол  $A$  образован векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , то

$$\cos A = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{4 \cdot 7 + 4 \cdot 1}{\sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{32}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{50}} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}.$$

По таблицам находим

$$\angle A = \arccos(0,8) \approx 37^\circ.$$

$$\text{Аналогично } \cos B = \frac{(\overline{BA}, \overline{BC})}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{-12 + 12}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{18}} = 0, \text{ значит, } \angle B -$$

прямой. Поскольку сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то  $\angle C \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ . Длины сторон – это длины соответствующих векторов, поэтому:

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{32} \approx 5,66; \quad AC = |\overline{AC}| = \sqrt{50} \approx 7,07; \quad BC = |\overline{BC}| = \sqrt{18} \approx 4,24.$$

**Пример 4.5.** Найти скалярное произведение векторов  $2 \cdot \overline{a} + 3 \cdot \overline{b}$  и  $\overline{a} - 4 \cdot \overline{b}$ , если  $|\overline{a}| = 2$ ,  $|\overline{b}| = 0,5$ , а угол между векторами  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  равен  $60^\circ$ .

**Решение.** Выполним последовательные действия:

$$\begin{aligned} (2 \cdot \overline{a} + 3 \cdot \overline{b}, \overline{a} - 4 \cdot \overline{b}) &= 2 \cdot (\overline{a}, \overline{a}) + 3 \cdot (\overline{b}, \overline{a}) - 8(\overline{a}, \overline{b}) - 12 \cdot (\overline{b}, \overline{b}) = \\ &= 2 \cdot |\overline{a}|^2 - 5 \cdot (\overline{a}, \overline{b}) - 12 \cdot |\overline{b}|^2 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 60^\circ - \\ &- 12 \cdot (0,5)^2 = 8 - 5 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 12 \cdot 0,25 = 8 - 2,5 - 3 = 2,5. \end{aligned}$$

### ***Векторное и смешанное произведение векторов***

**Определение.** Векторным произведением двух неколлинеарных векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  называется третий вектор  $\overline{c}$ , обозначаемый  $[\overline{a}, \overline{b}]$  или  $\overline{a} \times \overline{b}$  и удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор  $\overline{c}$  ортогонален каждому из векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$ , то есть перпендикулярен плоскости, в которой лежат эти векторы;

2) если векторы  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$ ,  $\overline{c}$  отложены от одной точки  $O$ , то с конца вектора  $\overline{c}$  поворот от вектора  $\overline{a}$  к вектору  $\overline{b}$  на меньший угол осуществляется против часовой стрелки (в этом случае *тройка*  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$ ,  $\overline{c}$  называется *правой*);

3)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, то полагают  $|\vec{a}, \vec{b}| = 0$ .

### **Свойства векторного произведения**

1)  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}];$

2)  $[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}];$

3)  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}];$

4) величина модуля векторного произведения  $|\vec{a}, \vec{b}|$  двух неколлинеарных векторов равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;

5) координаты векторного произведения векторов  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , заданных координатами, можно найти следующим образом:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

**Определение.** Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  называется скалярное произведение первого из них и векторного произведения второго и третьего. Обозначается смешанное произведение  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$  или просто  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ .

### **Свойства смешанного произведения**

1)  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = \dots$  – то есть перестановка двух соседних векторов местами ведет к смене знака смешанного произведения;

2) модуль смешанного произведения  $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$  трех некопланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на век-

торах  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  (при этом  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$ , если тройка  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  – правая и  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) < 0$ , если тройка векторов – левая);

3) если векторы  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$

заданы координатами, то  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ;

4) три вектора  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  лежат в одной плоскости (компланарны) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

**Пример 4.6.** Найти площадь треугольника  $ABC$  с вершинами  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(3, 0, -3)$ ,  $C(5, 2, 6)$ .

**Решение.** Воспользуемся свойством 4 векторного произведения: площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overline{AB} = (2, -2, -3)$  и  $\overline{AC} = (4, 0, 6)$ . Вычислим их векторное произведение, имеем:

$$\begin{aligned} [\overline{AB}, \overline{AC}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \cdot (-12 - 0) - \bar{j} \cdot (12 - (-12)) + \bar{k} \cdot (0 - (-8)) = \\ &= -12 \cdot \bar{i} - 24 \cdot \bar{j} + 8 \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

Площадь треугольника  $ABC$  равна половине величины этого векторного произведения:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \frac{28}{2} = 14_{\text{кв. ед.}}$$

**Пример 4.7.** Найти объем тетраэдра, вершинами которого являются точки  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(2, 3, -1)$ ,  $C(2, -2, 4)$ ,  $D(-1, 1, 3)$ .

**Решение.** Объем тетраэдра составляет шестую часть объема параллелепипеда, построенного на векторах  $\overline{AB}=(1, 2, -3)$ ,  $\overline{AC}=(1, -3, 2)$  и  $\overline{AD}=(-2, 0, 1)$ . Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 8 - (-18 + 0 + 2) = 5.$$

Таким образом, объем тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{5}{6} \text{ куб. ед.}$$

## ТЕМА 5. Аналитическая геометрия на плоскости

### *Система координат на плоскости*

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, изучающий геометрические образы алгебраическими средствами, основывающимися на методе координат.

Под *системой координат на плоскости* понимают правило, устанавливающее взаимно однозначное соотношение между точками плоскости и упорядоченными парами чисел, которые называют *координатами* исходной *точки*.

Проведем через фиксированную на плоскости точку  $O$  две несовпадающие прямые с заданными направлениями и единичными отрезками. Если прямые пересекаются под прямым углом, то введенная система координат называется *декартовой*, или *прямоугольной*, в противном случае – *аффинной*, или *косоугольной*. Первая координата точки в такой системе координат называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*. Точка пересечения координатных осей называется *началом координат*.

В декартовой системе координат обычно горизонтальную ось  $Ox$  называют осью абсцисс,  $Oy$  – осью ординат.

Рассмотрим точку  $M$  на плоскости  $Oxy$  (рис. 5.1). Вектор  $\overline{OM}$  называется *радиус-вектором* точки  $M$ . Чтобы найти ее коор-

динаты, необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на каждую из осей. Числа, соответствующие полученным точкам пересечения, и будут координатами точки  $M(x_0, y_0)$ . Если точка лежит на оси  $Ox$ , то ее вторая координата равна 0, если на оси  $Oy$ , то – первая.

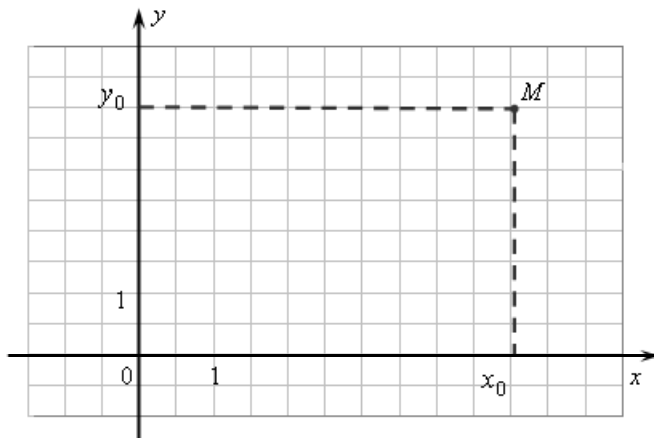


Рис. 5.1

Другой практически важной системой координат является **полярная**. Полярная система координат задается точкой, называемой **полюсом**, лучом  $Or$ , называемым **полярной осью**, и единичным вектором того же направления, что и луч  $Or$ . Положение произвольной точки  $M$  на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием  $\rho$  от полюса и углом  $\varphi$ , образованным отрезком  $OM$  с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки). Числа  $\rho$  и  $\varphi$  называются полярными координатами точки  $M$ , пишут  $M(\rho, \varphi)$ , при этом  $\rho$  называют **полярным радиусом**,  $\varphi$  – **полярным углом**. Более подробно полярную систему координат рассмотрим в теме 8.

## ***Уравнение линии на плоскости***

Уравнение линии на плоскости  $R^2$  задается равенствами:  
 а) в неявном виде  $F(x, y) = 0$ , б) в разрешенном, относительно  $y$ :  
 $y = f(x)$ , которым удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные  $x$  и  $y$  в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

**Пример 5.1.** Лежат ли точки  $M(-2, 1)$  и  $K(1, 1)$  на линии  $2x + 3y - 5 = 0$ ?

**Решение.** Подставим координаты точки  $M$  в уравнение линии:  
 $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 5 = -6 \neq 0$  – значит точка  $M$  не лежит на заданной линии; теперь подставим координаты точки  $K$  в уравнение линии:  
 $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 5 = 0$  – координаты этой точки удовлетворяют уравнению линии, поэтому точка  $K$  лежит на заданной прямой.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$ , сводится к поиску точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, то есть сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных корней, то линии не пересекаются.

Аналогичным образом вводится понятие линии в полярной системе координат. Уравнение  $R(\rho, \varphi) = 0$  называется уравнением данной линии в полярной системе координат, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где  $x, y$  – координаты произвольной точки  $M(x, y)$ , лежащей на данной линии, а  $t$  – переменная, называемая параметром линии. Такой способ задания линии называется **параметрическим**. Более подробно задание функции параметрически и в полярной системе координат рассматривается в теме 8.

Линию на плоскости можно задать и векторным уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , где  $t$  – скалярный переменный параметр. Каждому значению  $t = t_0$  соответствует определенный вектор  $\vec{r}(t_0)$  на плоскости. При изменении параметра  $t$  конец вектора  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  опишет некоторую линию.

Векторное и параметрическое уравнения имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются уравнениями движения, а линия – траекторией точки, параметр  $t$  при этом интерпретируется как время.

В аналитической геометрии на плоскости возникают **две основные задачи**: зная геометрические свойства кривой, найти ее уравнение и, зная уравнение кривой, изучить ее форму и свойства [2].

### **Уравнение прямой на плоскости**

**Общее уравнение прямой** на плоскости  $R^2$  имеет вид  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ , где  $A, B, C$  – произвольные числа, причем  $A$  и  $B$  одновременно не равны нулю. Рассмотрим некоторые частные случаи прямой.

1)  $C = 0$ ,  $A$  и  $B$  отличны от нуля, то прямая, определяемая уравнением  $A \cdot x + B \cdot y = 0$ , проходит через начало координат.

2)  $A = 0$ ,  $B$  и  $C$  отличны от нуля, то прямая, определяемая уравнением  $B \cdot y + C = 0$  или  $y = b$ , параллельна оси  $Ox$ .



3)  $B = 0$ ,  $A$  и  $C$  отличны от нуля, то прямая, определяемая уравнением  $A \cdot x + C = 0$  или  $x = a$ , параллельна оси  $Oy$ .

4)  $B = C = 0$ ,  $A \neq 0$ , то прямая, определяемая уравнением  $A \cdot x = 0$ , совпадает с осью  $Oy$ .

5)  $A = C = 0$ ,  $B \neq 0$ , то прямая, определяемая уравнением  $B \cdot y = 0$ , совпадает с осью  $Ox$ .

**Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно вектору.** Произвольная точка  $M(x, y)$  лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$  перпендикулярен вектору  $\vec{n} = (A, B)$ , и, значит, скалярное произведение этих векторов будет равно нулю:

$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$  – координатная форма уравнения прямой, проходящей через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (A, B)$ . Подчеркнем, что в общем уравнении прямой вектор, составленный из коэффициентов  $(A, B)$ , определяет перпендикулярный вектор к данной прямой.

Если  $B \neq 0$ , то при  $k = -A/B$ ,  $b = -C/B$  общее уравнение прямой переписывается в виде, разрешенном относительно  $y$ :  $y = k \cdot x + b$ . Получили *уравнение прямой с угловым коэффициентом*. Величина  $k$  равна тангенсу угла наклона прямой к оси  $Ox$ , а величина  $b$  по модулю равна длине отрезка, отсекаемого прямой на оси  $Oy$ .

**Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору.** Вектор  $\vec{l} = (l_1, l_2)$ , лежащий на исходной или параллельной ей прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Произвольная точка  $M(x, y)$  лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$  параллелен вектору  $\vec{l}$ , и, значит, их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2}. \quad (11)$$

Уравнение (11) называется **каноническим уравнением прямой на плоскости**.

**Замечание.** Каноническая форма уравнения прямой – символическая. Допускается запись, например,  $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{l_2}$ .

Переходя к привычной форме, будем иметь  $y = y_0$ , то есть прямая параллельна оси  $Ox$ .

Теперь предположим, что коэффициент пропорциональности равен  $t$ , то есть  $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = t$ . Выражая отсюда переменные  $x$ ,  $y$ ,

получим **параметрическое уравнение прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l_1, \\ y = y_0 + t \cdot l_2. \end{cases}$$

В частности, если прямая проходит через точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M_1(x_1, y_1)$ , то в качестве вектора  $\vec{l}$  можно взять вектор  $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ , поэтому равенство (11) запишется в виде:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} -$$

– **уравнение прямой**, проходящей **через две заданные точки**.

Пусть прямая задана своим общим уравнением  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ . Найдем расстояние от точки  $M_1(x_1, y_1)$  до прямой. Пусть  $M_0(x_0, y_0)$  – произвольная точка прямой, тогда проекция вектора  $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  на вектор нормали к прямой  $\vec{n} = (A, B)$  и будет требуемым расстоянием:

$$\begin{aligned} d &= |np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{|A \cdot (x_1 - x_0) + B \cdot (y_1 - y_0)|}{|\vec{n}|} = \\ &= \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \end{aligned}$$

так как  $A \cdot x_0 + B \cdot y_0 = -C$ .

**Расстояние  $d$  от точки  $M_1(x_1, y_1)$  до прямой  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$**   
равно

$$d = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Пример 5.2.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2, -3)$  параллельно оси  $Oy$ .

**Решение.** В качестве направляющего вектора  $\vec{l}$  можно взять орт  $\vec{j} = (0, 1)$ . Подставив данные в каноническое уравнение прямой (11), получим:  $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{1}$ . От канонического уравнения прямой обычно переходят к общему:  $x-2=0$  или  $x=2$ .

**Пример 5.3.** Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(-2, 3)$ ,  $B(1, 12)$ ,  $C(11, 6)$ . Найти: 1) уравнение стороны  $AB$ ; 2) уравнение и длину высоты  $CD$ , опущенной из вершины  $C$  на сторону  $AB$ ; 3) уравнение медианы  $AE$ .

**Решение.** 1) Уравнение прямой  $AB$  через две заданные точки будет иметь вид:  $\frac{x-(-2)}{1-(-2)} = \frac{y-3}{12-3}$ ;  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{9}$  или  $y-3x=9$ .

2) Высота  $CD$  перпендикулярна стороне  $AB$ , а потому вектор  $\vec{n} = (-3, 1)$ , составленный из коэффициентов уравнения прямой  $AB$ , перпендикулярен прямой  $AB$  и параллелен высоте  $CD$ . Чтобы найти уравнение прямой  $CD$ , подставим в уравнение (11) координаты точки  $C(11, 6)$  и направляющего вектора  $\vec{n} = (-3, 1)$ :  $\frac{x-11}{-3} = \frac{y-6}{1}$  или  $x+3y=29$ .

Длину высоты найдем по формуле расстояния от точки  $C(11, 6)$  до прямой  $AB$  ( $y-3x=9$ ):

$$|\overline{CD}| = \frac{|6 - 3 \cdot 11 - 9|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{36}{\sqrt{10}} \approx 11,38.$$

3) Определим координаты точки  $E$  с помощью формул деления отрезка пополам [2]:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ . Используя координаты вершин  $B$  и  $C$ , получаем:  $x = \frac{1 + 11}{2} = 6$ ;  $y = \frac{12 + 6}{2} = 9$ ;  $C(6, 9)$ .

По точкам  $A$  и  $E$  построим уравнение медианы  $\frac{x + 2}{6 + 2} = \frac{y - 3}{9 - 3}$ , после упрощения которого получим  $3x - 4y + 18 = 0$ .

## ТЕМА 6. Кривые второго порядка

Рассмотрим плоскость  $R^2$ . К кривым 2-го порядка относятся линии, описываемые многочленом от двух переменных, максимальная степень которого равна двум, то есть

$$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x \cdot y + D \cdot x + E \cdot y + F = 0, \\ A, B, C, D, E, F \in R.$$

### **Окружность**

**Окружностью** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки  $C(x_0, y_0)$ , называемой ее центром.

Допустим, точка  $M(x, y)$  лежит на данной окружности, то расстояние  $CM$  равно некоторому числу  $R$ , называемому радиусом этой окружности:  $|CM| = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  – *уравнение окружности* с центром в точке  $(x_0, y_0)$  и радиуса  $R$ .

**Пример 6.1.** Найти центр и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ .

**Решение.** Выделим полный квадрат по каждой переменной, данное уравнение можно записать в виде:

$(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1) - 1 + (y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 4) - 4 - 4 = 0$  или  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ .  
Следовательно, это окружность с центром в точке  $(-1, 2)$  и радиусом  $R = 3$ .

## Эллипс

**Эллипсом** называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Выведем уравнение эллипса. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – фокусы (рис. 6.1). Положим  $|F_1F_2| = 2c$ . Декартову систему координат зададим следующим образом: ось  $Ox$  направим по прямой  $F_1F_2$ , а начало поместим в середину отрезка  $F_1F_2$ . Тогда  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ .

Пусть  $M(x, y)$  – произвольная точка эллипса. Тогда  $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ , где величина  $a$  дана, причем  $a > c$ .  
Имеем:  $|F_1M| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ ,  $|F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ .

Следовательно, уравнение эллипса имеет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2 \cdot a.$$

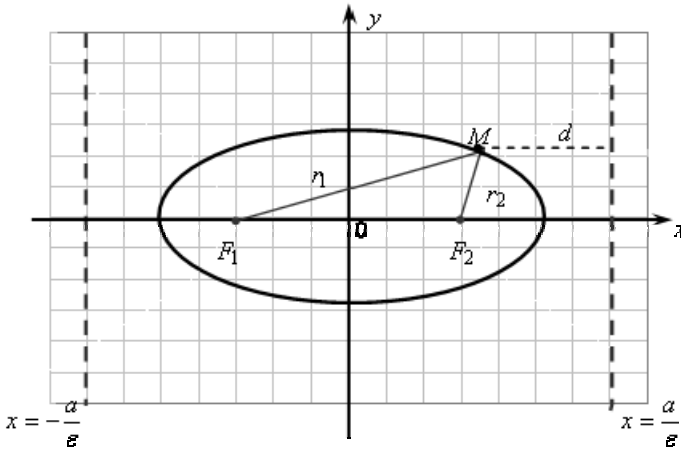


Рис. 6.1

Упростим последнее равенство: перенесем второе слагаемое в правую часть и возведем обе части в квадрат, получим  $(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$ , после раскрытия скобок и приведения подобных останется:  $4x \cdot c - 4a^2 = 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ . Разделим полученное равенство на четыре, возведем обе части еще раз в квадрат:  $x^2 \cdot c^2 - 2x \cdot c \cdot a^2 + a^4 = a^2 \cdot (x-c)^2 + a^2 \cdot y^2$  и преобразуем

$$x^2 \cdot c^2 - 2x \cdot c \cdot a^2 + a^4 = a^2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x \cdot c + c^2) + a^2 \cdot y^2.$$

После приведения подобных получим:

$$x^2 \cdot c^2 + a^4 - a^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot c^2 - a^2 \cdot y^2 = 0, \quad x^2 \cdot (c^2 - a^2) - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot (c^2 - a^2).$$

Обозначим  $b^2 = c^2 - a^2$  и разделим обе части последнего равенства на эту величину:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  — **каноническое уравнение эллипса** с полуосями  $x = a$ ,  $y = b$  и центром симметрии в точке  $(0, 0)$ . Число  $a$  в уравнении эллипса называется

большой, а  $b$  – малой полуосью эллипса. Прямую, на которой расположены фокусы эллипса, называют *фокальной осью*.

Величина  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  называется *эксцентриситетом* эллипса, а

прямые  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$  называются *директрисами* эллипса.

**Пример 6.2.** Доказать, что уравнение  $x^2 + 4x + 4y^2 - 16y - 4 = 0$  определяет эллипс.

**Решение.** Преобразуем уравнение, выделив полные квадраты по каждой переменной,  $(x+2)^2 + 4 \cdot (y-2)^2 - 4 - 16 - 4 = 0$ . Введем новые переменные  $x_1 = x+2$ ,  $y_1 = y-2$ . Тогда  $x_1^2 + y_1^2 = 24$  или  $\frac{x_1^2}{24} + \frac{y_1^2}{6} = 1$ . Последнее уравнение определяет эллипс с центром в точке  $(-2, 2)$ , причем  $a = \sqrt{24}$ ,  $b = \sqrt{6}$ .

## ***Гипербола***

***Гиперболой*** называется геометрическое множество точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Выведем уравнение гиперболы. Положим  $|F_1F_2| = 2c$ . Систему координат (рис. 6.2) выберем так же, как и в случае эллипса. Тогда  $F_1(-c, 0)$ , а  $F_2(c, 0)$ .

Если  $M(x, y)$  – произвольная точка гиперболы, то  $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2 \cdot a$ ,  $a$  – постоянная,  $c > a$ . Это уравнение соответствует определению гиперболы. Преобразуя его, как и в случае эллипса, и положив  $b^2 = c^2 - a^2$ , получим **каноническое уравнение гиперболы**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

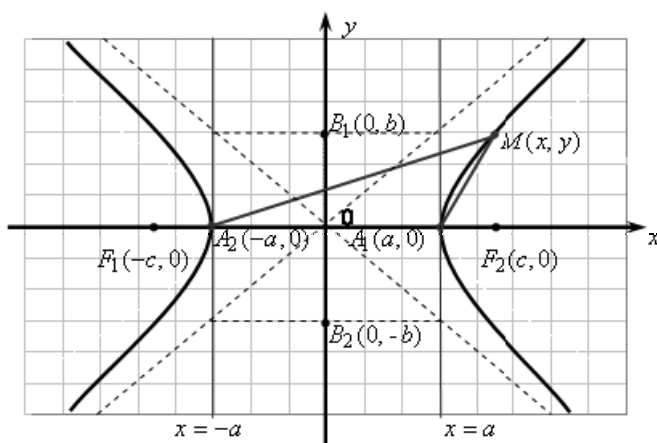


Рис. 6.2

Гипербола – кривая, симметричная относительно осей и начала координат. Прямые  $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$  являются *асимптотами* гиперболы, величина  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  называется *эксцентриситетом* гиперболы,  $\varepsilon > 1$ , а прямые  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$  – ее *директрисами*.

## Парабола

**Параболой** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки  $F$  и данной прямой (рис. 6.3). Точка  $F$  называется *фокусом* параболы, а данная прямая – *директрисой* параболы. Для получения уравнения параболы выберем систему координат следующим образом: ось  $Ox$  проведем через фокус  $F$  перпендикулярно директрисе. Начало координат поместим в точку, равноудаленную от фокуса и директрисы. Обозначим расстояние между фокусом и директрисой через  $p$ . Величина  $p$  называется параметром параболы. В выбранной системе координат фокус  $F$  имеет



координаты  $(p/2, 0)$ , а уравнение директрисы имеет вид  $x = -p/2$  или  $x + p/2 = 0$ .

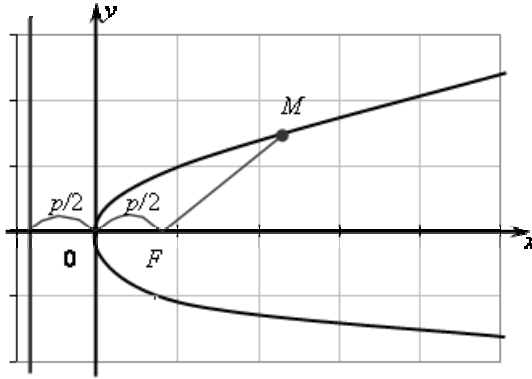


Рис. 6.3

Пусть  $M(x, y)$  – произвольная точка параболы. Соединим точку  $M$  с точкой  $F$ . Проведем отрезок  $MN$  перпендикулярно директрисе. Согласно определению параболы,  $MF = MN$ . По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$MF = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}, \text{ а } MN = \sqrt{(x + p/2)^2 + (y - y)^2}.$$

$$\text{Следовательно, } \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = \sqrt{(x + p/2)^2}.$$

После элементарных преобразований получим **каноническое уравнение параболы**:

$$y^2 = 2p \cdot x.$$

**Пример 6.3.** Классифицировать линию 2-го порядка  $4x^2 - 9y^2 - 40x - 36y + 28 = 0$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой  $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ . Выделим полный квадрат по каждой переменной, для этого сгруппируем отдельно слагаемые, содержащие переменную  $x$  и  $y$ :  $(4x^2 - 40x) - (9y^2 + 36y) = -28$ . Коэффициенты при переменных в старшей степени вынесем общими множителями

$4 \cdot (x^2 - 10 \cdot x) - 9 \cdot (y^2 + 4 \cdot y) = -28$ . Полученные выражения в скобках доведем до полного квадрата, в первом случае прибавим и отнимем 25, во втором – 4:  $4 \cdot ((x-5)^2 - 25) - 9 \cdot ((y+2)^2 - 4) = -28$ . После раскрытия скобок постоянные перенесем в правую часть равенства  $4 \cdot (x-5)^2 - 9 \cdot (y+2)^2 = -28 - 36 + 100$ . Приведем подобные  $4 \cdot (x-5)^2 - 9 \cdot (y+2)^2 = 36$ . Запишем уравнение линии 2-го порядка в общем виде. Разделим последнее равенство на 36, чтобы получить единицу в правой части

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \text{ или } \frac{(x-5)^2}{3^2} - \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1.$$

Данная линия (рис. 6.4) является гиперболой с центром в точке  $(5, -2)$  и полуосями  $a = 3$ ,  $b = 2$ .

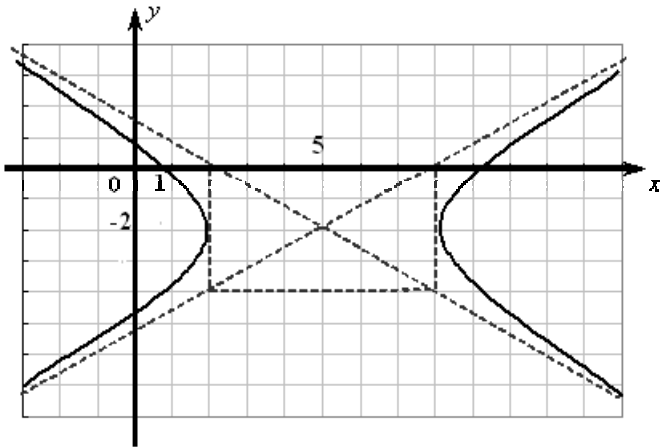


Рис. 6.4

## ТЕМА 7. Аналитическая геометрия в пространстве

### *Уравнение поверхности и линии в пространстве*

Поверхность в пространстве  $R^3$  можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, сфера радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки  $O$  на расстоянии  $R$ .

Прямоугольная система координат  $Oxyz$  в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  — их координатами: *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*. Координатами точки  $M(x_0, y_0, z_0)$  в пространстве (рис. 7.1) являются числа, соответствующие точкам пересечения координатных плоскостей  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$  с координатными осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

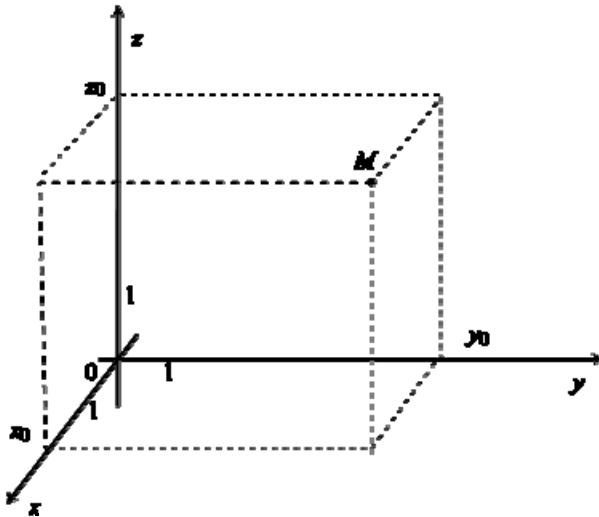


Рис. 7.1

Свойство, общее для всех точек поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности [2].

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  называется такое уравнение  $F(x, y, z) = 0$  с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнении поверхности называются текущими координатами точек поверхности. Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как геометрическое место точек, принадлежащее обеим поверхностям.

Если  $F_1(x, y, z) = 0$  и  $F_2(x, y, z) = 0$  – уравнения двух поверхностей, определяющих линию  $L$ , то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя

неизвестными: 
$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{– уравнение линии в пространстве.}$$

Например,  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$  есть уравнение оси  $Oz$ .

Линию в пространстве можно задать как траекторию движения некоторой точки. В этом случае ее задают векторным уравнением  $r = r(t)$  или параметрическими уравнениями:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

### ***Уравнение плоскости в пространстве***

Рассмотрим трехмерное пространство  $R^3$  с фиксированной декартовой системой координат  $Oxyz$ .

Координатная плоскость  $Oxy$  в нем является подпространством размерности два. Изученная нами прямая и кривые 2-го порядка, лежащие в плоскости  $Oxy$ , в пространстве также могут быть определены. Для этого необходимо задать саму плоскость  $Oxy$  в нем.

Очевидно, что если в пространстве задана система координат  $Oxyz$ , то плоскость  $Oxy$  определяется в ней уравнением  $z = 0$ .

Но плоскость в пространстве в системе координат может быть определена по-разному, поскольку она не обязательно должна проходить через начало или быть перпендикулярной другим координатным плоскостям.

Естественно возникает вопрос об уравнении плоскости в пространстве. Справедливы утверждения:

1. Если в пространстве (размерности  $n \geq 3$ ) задана произвольная плоскость и фиксирована произвольная декартова система координат  $Oxyz$ , то плоскость определяется в ней уравнением 1-й степени.

2. Если в пространстве (размерности  $n \geq 3$ ) фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат  $Oxyz$ , то всякое уравнение 1-й степени с переменными  $x, y, z$  определяет в ней плоскость.

Ниже мы эти утверждения сформулируем в виде теорем.

Пусть  $P$  – произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор  $\vec{n}$  называется *нормальным вектором* этой плоскости (рис. 7.2).

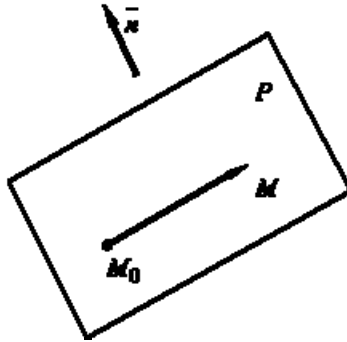


Рис. 7.2

Если известна какая-нибудь точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  плоскости  $P$  и какой-нибудь ее нормальный вектор  $\vec{n} = (A; B; C)$ , то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена (через данную

точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору).

В самом деле, возьмем на плоскости  $P$  произвольную точку  $M$  с переменными координатами  $x, y, z$ . Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда вектор  $\overline{M_0M}$  перпендикулярен вектору  $\overline{n}$ , а для этого необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю, то есть  $(\overline{n}, \overline{M_0M}) = 0$ .

Вектор  $\overline{n} = (A; B; C)$  задан по условию, найдем координаты вектора:  $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$  и запишем скалярное произведение этих векторов в координатной форме:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (12)$$

Так как точка  $M(x, y, z)$  выбрана на плоскости произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на плоскости  $P$ . Для точки  $N$ , не лежащей на заданной плоскости,  $(\overline{n}, \overline{M_0M}) \neq 0$  и равенство (12) нарушается. Следовательно, уравнение (12), являясь уравнением 1-й степени, определяет плоскость, проходящую через точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярную вектору  $\overline{n} = (A; B; C)$ .

**Пример 7.1.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2; -3; 1)$  и перпендикулярной вектору  $\overline{n} = (5; 1; -4)$ .

**Решение.** Используя формулу (12), имеем  $5 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y + 3) - 4 \cdot (z - 1) = 0$ , откуда после преобразований получим  $5 \cdot x + y - 4 \cdot z - 3 = 0$ .

Это уравнение 1-й степени и есть искомое уравнение плоскости.

**Уравнение плоскости, проходящей через три точки.** Пусть даны три точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  и  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ . Если точки не лежат на одной прямой, то через них всегда можно провести единственную плоскость. Обозначим  $(x, y, z)$  координаты произвольной точки  $M$  пространства и рассмотрим три вектора:

$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ ,  $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ,  
 $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ . Точка  $M$  лежит на плоскости  $M_1M_2M_3$  в том и только в том случае, когда перечисленные три вектора компланарны, а значит,  $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$ , т. е. определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Пример 7.2.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(3, -1, 2)$ ,  $B(4, -1, -1)$  и  $C(2, 0, 2)$ .

**Решение.** Пусть  $M(x, y, z)$  – произвольная точка плоскости, тогда векторы  $\overline{AM} = (x-3, y+1, z-2)$ ,  $\overline{AB} = (1, 0, -3)$ ,  $\overline{AC} = (-1, 1, 0)$  компланарны, поэтому:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель по правилу треугольников, получим:  $3 \cdot (x-3) + 3 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-2) = 0$  или  $3 \cdot x + 3 \cdot y + z = 8$ .

**Теорема 7.1.** В пространстве  $R^3$  всякая плоскость выражается уравнением 1-й степени  $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ ,  $A, B, C, D \in R$ .

**Доказательство.** В предыдущем пункте было установлено, что всякая плоскость может быть задана уравнением вида (12):

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0, \quad A, B, C \in R.$$

Раскрыв скобки и обозначив  $-A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0 = D$ , получим общее уравнение 1-й степени относительно  $x, y, z$ :

$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ , эквивалентное уравнению (12). Поэтому оно определяет ту же плоскость, что и уравнение (12), и называется **общим уравнением плоскости**. Коэффициенты при переменных в этом уравнении сохраняют тот же геометрический смысл, что и в равенстве (12), то есть являются координатами нормального вектора  $\vec{n} = (A; B; C)$  плоскости. Так как нормальный вектор плоскости является ненулевым, то коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  не могут быть одновременно равны нулю. Итак, мы доказали, что всякая плоскость в  $R^3$  определяется уравнением 1-й степени относительно переменных координат  $x, y, z$ .

**Теорема 7.2 (обратная).** Всякое линейное уравнение с тремя переменными  $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ ,  $A, B, C, D \in R$ , определяет плоскость в пространстве  $R^3$ , если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю.

**Доказательство.** Пусть  $x_0, y_0, z_0$  — какое-либо решение данного уравнения. Тогда  $A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0$ , откуда  $D = -(A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0)$ . Подставляя в данное уравнение вместо  $D$  его значение и группируя члены, получим

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и имеющей нормальный вектор  $\vec{n} = (A; B; C)$ . Следовательно, и равносильное ему уравнение  $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$  определяет плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{n} = (A; B; C)$ .

**Пример 7.3.** Построить в прямоугольной системе координат плоскость, заданную уравнением  $3 \cdot x - 2 \cdot y + z - 6 = 0$ .

**Решение.** Для построения плоскости необходимо и достаточно знать какие-либо три ее точки, не лежащие на одной прямой, например, точки пересечения плоскости с осями координат. Полагая в заданном уравнении  $x = y = 0$ , получим  $z = 6$ . Следовательно, заданная плоскость пересекает ось  $Oz$  в точке  $A(0, 0, 6)$ . Аналогично при  $x = z = 0$  получим  $y = -3$ , то есть точку  $B(0, -3, 0)$ ; при  $y = z = 0$  получим  $x = 2$ , то есть точку  $C(2, 0, 0)$ . По трем



точкам  $A(0,0,6)$ ,  $B(0,-3,0)$ ,  $C(2,0,0)$  строим заданную плоскость (рис. 7.3).

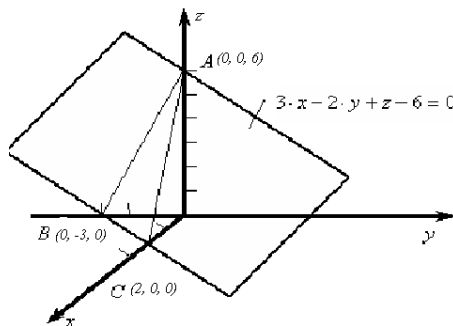


Рис. 7.3

*Частные случаи общего уравнения плоскости.* Рассмотрим особенности расположения плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты общего уравнения обращаются в нуль.

1. При  $D=0$  уравнение  $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0$  определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки  $O(0; 0; 0)$  удовлетворяют этому уравнению.

2. При  $A=0$  уравнение  $B \cdot y + C \cdot z + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Ox$ , поскольку нормальный вектор  $\vec{n} = (0; B; C)$  этой плоскости перпендикулярен оси  $Ox$  (его проекция на ось  $Ox$  равна нулю). Аналогично при  $B=0$  плоскость  $A \cdot x + C \cdot z + D = 0$  параллельна оси  $Oy$ , а при  $C=0$  плоскость  $A \cdot x + B \cdot y + D = 0$  параллельна оси  $Oz$ .

3. При  $A=D=0$  уравнение  $B \cdot y + C \cdot z = 0$  определяет плоскость, проходящую через ось  $Ox$ , поскольку она параллельна оси  $Ox$  ( $A=0$ ) и проходит через начало координат ( $D=0$ ). Аналогично плоскость  $A \cdot x + C \cdot z = 0$  проходит через ось  $Oy$ , а плоскость  $A \cdot x + B \cdot y = 0$  — через ось  $Oz$ .

4. При  $A=B=0$  уравнение  $C \cdot z + D = 0$  определяет плоскость, параллельную координатной плоскости  $Oxy$ , поскольку она параллельна осям  $Ox$  ( $A=0$ ) и  $Oy$  ( $B=0$ ). Аналогично плоскость

$A \cdot x + D = 0$  параллельна плоскости  $yOz$ , а плоскость  $B \cdot y + D = 0$  – плоскости  $Oxz$ .

5. При  $A = B = D = 0$  уравнение  $C \cdot z = 0$  (или  $z = 0$ ) определяет координатную плоскость  $Oxy$ , так как она параллельна плоскости  $Oxy$  ( $A = B = 0$ ) и проходит через начало координат ( $D = 0$ ). Аналогично уравнение  $y = 0$  в пространстве определяет координатную плоскость  $Oxz$ , а уравнение  $x = 0$  – координатную плоскость  $Oyz$ .

**Пример 7.4.** Составить уравнение плоскости  $P$ , проходящей через ось  $Oy$  и точку  $M_0(2; -4; 3)$ .

**Решение.** Уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oy$ , имеет вид  $A \cdot x + C \cdot z = 0$ . Для определения коэффициентов  $A$  и  $C$  воспользуемся тем, что точка  $M_0(2; -4; 3)$  принадлежит плоскости  $P$ . Поэтому ее координаты удовлетворяют написанному выше уравнению плоскости:  $M_0(2; -4; 3) \in P \Leftrightarrow 2 \cdot A + 3 \cdot C = 0$ , откуда  $A = -1,5 \cdot C$ . Подставив найденное значение  $A$  в уравнение  $A \cdot x + C \cdot z = 0$ , получим:  $-1,5 \cdot Cx + C \cdot z = 0$  или  $3 \cdot x - 2 \cdot z = 0$ .

Это и есть искомое уравнение.

### ***Взаимное расположение плоскостей***

Пусть две плоскости заданы в  $R^3$  общими уравнениями:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \text{ и } A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0, \\ A_i, B_i, C_i, D_i \in R, i = 1, 2.$$

Эти плоскости параллельны только в том случае, если коллинеарны их нормальные векторы  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ , то есть выполняются условия:  $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2$ .

Следовательно, две плоскости, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при одноименных переменных пропорциональны.

Если кроме коэффициентов при переменных пропорциональны и свободные члены, то есть выполняются равенства

$$A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2 = D_1 / D_2,$$

то плоскости совпадают.

Чтобы две плоскости пересекались, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных  $x, y, z$  не были пропорциональны.

Плоскости перпендикулярны в том случае, если перпендикулярны их нормальные векторы, то есть выполняется условие:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

**Пример 7.5.** Установить, перпендикулярны ли плоскости, заданные уравнениями  $2 \cdot x - 3 \cdot y + z - 2 = 0$  и  $4 \cdot x + 3 \cdot y + z + 5 = 0$ .

**Решение.** Плоскости перпендикулярны в том случае, если их нормальные векторы  $\overline{n_1} = (2; -3; 1)$  и  $\overline{n_2} = (4; 3; 1)$  удовлетворяют условию  $(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = 0$ . Так как  $(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$ , то указанное условие выполнено, поэтому данные плоскости перпендикулярны.

### *Уравнение прямой в пространстве $R^3$*

*Каноническое уравнение прямой.* Положение прямой вполне определено, если заданы лежащая на ней точка и направление. Направление прямой может быть задано любым вектором, коллинеарным данной прямой, который называется *направляющим вектором*.

Выведем уравнение прямой  $a$ , проходящей через данную точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и имеющей направляющий вектор  $\overline{a} = (l; m; n)$ .

Произвольная точка  $M(x, y, z)$  лежит на прямой  $a$  только в том случае, если векторы  $\overline{MM_1} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$  и  $\overline{a} = (l; m; n)$  коллинеарны, то есть для них выполняется условие:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

Эти равенства (а этими равенствами фактически заданы два независимых уравнения) определяют прямую (рис. 7.4), проходящую через заданную точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  коллинеарно вектору  $\vec{a} = (l; m; n)$ , и называются *каноническим уравнением прямой в пространстве*.

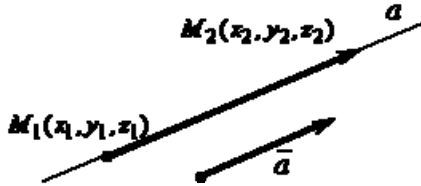


Рис. 7.4

Числа  $l$ ,  $m$  и  $n$  являются проекциями направляющего вектора  $\vec{a}$  на координатные оси. Так как вектор  $\vec{a}$  — ненулевой, то все три числа  $l$ ,  $m$  и  $n$  не могут одновременно равняться нулю. Но одно или два из них могут оказаться равными нулю, например,

$$(x - x_1)/l = (y - y_1)/0 = (z - z_1)/0.$$

Эта запись означает, что проекции вектора  $\vec{a}$  на оси  $Oy$  и  $Oz$  равны нулю. Поэтому и вектор  $\vec{a} = (l; 0; 0)$ , и прямая, заданная указанным образом, перпендикулярны осям  $Oy$  и  $Oz$ , то есть плоскости  $Oxz$ .

**Пример 7.6.** Составить уравнение прямой, перпендикулярной плоскости  $2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 \cdot z - 8 = 0$  и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью  $Oz$ .

**Решение.** Найдём точку пересечения данной плоскости с осью  $Oz$ . Так как любая точка, лежащая на оси  $Oz$ , имеет координаты  $(0; 0; z)$ , то, полагая в заданном уравнении плоскости  $x = y = 0$ , получим  $4 \cdot z - 8 = 0$  или  $z = 2$ . Следо-

вательно, точка пересечения данной плоскости с осью  $Oz$  имеет координаты  $(0; 0; 2)$ . Поскольку искомая прямая перпендикулярна плоскости, то она параллельна ее нормальному вектору  $\vec{n} = (2; -3; 4)$ . Поэтому направляющим вектором прямой может служить вектор нормали  $\vec{a} = \vec{n} = (2; -3; 4)$  заданной плоскости.

Теперь запишем искомые уравнения прямой, проходящей через точку  $A(0, 0, 2)$  в направлении вектора  $\vec{a} = (2; -3; 4)$ :

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{или} \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{4}.$$

**Уравнения прямой, проходящей через две данные точки**

Прямая может быть задана двумя лежащими на ней точками  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ . В этом случае направляющим вектором прямой может служить вектор  $\overline{M_1M_2}$ , то есть  $\vec{a} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ . Тогда каноническое уравнение прямой в пространстве примет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Эти равенства определяют прямую, проходящую через две данные точки.

**Пример 7.7.** Составить уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(2; 3; -5)$  и  $M_2(-4; 3; 2)$ .

**Решение.** Запишем искомое уравнение прямой в виде:

$$(x-2)/(-4-2) = (y-3)/(3-3) = (z+5)/(2+5)$$

или

$$(x-2)/(-6) = (y-3)/0 = (z+5)/7.$$

Так как  $\vec{a} = (-6; 0; 7)$ , то искомая прямая перпендикулярна оси  $Oy$ .

**Пример 7.8.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(2; -3; 5)$  параллельно прямой  $(x-1)/2 = (y-2)/(-1) = (z-3)/4$ .

**Решение.** Направляющим вектором искомой прямой может служить направляющий вектор  $\vec{a} = (2; -1; 4)$  данной прямой, поскольку по условию эти прямые параллельны. Зная точку  $M_1(2; -3; 5)$  и направляющий вектор  $\vec{a} = (2; -1; 4)$  искомой прямой, запишем ее уравнение в виде:  $(x - 2)/2 = (y + 3)/(-1) = (z - 5)/4$ .

### **Прямая как линия пересечения плоскостей**

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух непараллельных плоскостей:  $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$  и  $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$ , то есть как множество точек, удовлетворяющих системе двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0, \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Справедливо и обратное утверждение: система двух независимых линейных уравнений вида (13) определяет прямую как линию пересечения плоскостей (если они непараллельны). Уравнения системы (13) называются *общим уравнением* прямой в пространстве  $R^3$ .

**Пример 7.9.** Составить каноническое уравнение прямой, заданной общими уравнениями плоскостей:

$$\begin{cases} 2 \cdot x - 5 \cdot y + z + 4 = 0, \\ x + 2 \cdot y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Чтобы написать каноническое уравнение прямой или, что то же самое, уравнение прямой, проходящей через две данные точки, нужно найти координаты каких-либо двух точек прямой. Ими могут служить точки пересечения прямой с какими-нибудь двумя координатными плоскостями, например,  $Oyz$  и  $Oxz$ .

Точка пересечения прямой с плоскостью  $Oyz$  имеет абсциссу  $x = 0$ . Поэтому, полагая в данной системе уравнений  $x = 0$ , получим систему с двумя переменными:

$$\begin{cases} -5 \cdot y + z + 4 = 0, \\ 2 \cdot y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Ее решение  $y = 2$ ,  $z = 6$  вместе с  $x = 0$  определяет точку  $A(0, 2, 6)$  искомой прямой. Полагая в данной системе уравнений  $y = 0$ , получим систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot x + z + 4 = 0, \\ x - z + 2 = 0, \end{cases}$$

решение которой  $x = -2$ ,  $z = 0$  вместе с  $y = 0$  определяет точку  $B(-2, 0, 0)$  пересечения прямой с плоскостью  $Oxz$ .

Теперь запишем уравнения прямой, проходящей через точки  $A(0, 2, 6)$  и  $B(-2, 0, 0)$ :  $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-6}{0-6}$  или

$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}$ , где  $\vec{a} = (1; 1; 3)$  будет направляющим вектором этой прямой.

**Пример 7.10.** Прямая задана каноническим уравнением  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1}$ . Составить общее уравнение этой прямой.

**Решение.** Каноническое уравнение прямой можно записать в виде системы двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} (x-2)/3 = (y+1)/5, \\ (x-2)/3 = (z-3)/(-1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot x - 3 \cdot y - 13 = 0, \\ x + 3 \cdot z - 11 = 0. \end{cases}$$

Получили общее уравнение прямой, которая теперь задана пересечением двух плоскостей, одна из которых  $5 \cdot x - 3 \cdot y - 13 = 0$  параллельна оси  $Oz$  ( $C = 0$ ), а другая  $x + 3 \cdot z - 11 = 0$  – оси  $Oy$  ( $B = 0$ ).

Данную прямую можно представить в виде линии пересечения двух других плоскостей, записав ее каноническое уравнение в виде другой пары независимых уравнений:

$$\begin{cases} (x-2)/3 = (y+1)/5, \\ (y+1)/5 = (z-3)/(-1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot x - 3 \cdot y - 13 = 0, \\ y + 5 \cdot z - 14 = 0. \end{cases}$$

**Замечание.** Одна и та же прямая может быть задана различными системами двух линейных уравнений (то есть пересечением различных плоскостей, так как через одну прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей), а также различными каноническими уравнениями (в зависимости от выбора точки на прямой и ее направляющего вектора).

### *Деление отрезка в данном отношении*

Пусть даны точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ . Требуется найти координаты точки  $M(x; y; z)$ , делящей отрезок прямой, заключенный между  $M_1$  и  $M_2$ , в отношении  $\lambda = |M_1M| : |MM_2|$ ,  $\lambda > 0$  (рис. 7.6).



Рис. 7.6

Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1) \text{ и } \overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z).$$

Они коллинеарны и одинаково направлены, то есть могут отличаться только длиной. По условию

$$|\overrightarrow{M_1M}| : |\overrightarrow{MM_2}| = \lambda,$$

поэтому

$$|\overrightarrow{M_1M}| = \lambda \cdot |\overrightarrow{MM_2}| = \lambda,$$

или в координатной форме



$$(x - x_1; y - y_1; z - z_1) = \lambda \cdot (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Из равенства этих двух векторов следует равенство их соответствующих координат:

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y_1), \quad z - z_1 = \lambda \cdot (z_2 - z_1).$$

Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda > 0.$$

В частности, если точка  $M$  делит отрезок  $M_1M_2$  пополам, то  $\lambda = 1$  и  $x = (x_1 + x_2)/2$ ,  $y = (y_1 + y_2)/2$ ,  $z = (z_1 + z_2)/2$ , то есть координаты точки, делящей отрезок пополам, равны полусуммам соответствующих координат концов отрезка.

**Пример 7.12.** Найти координаты точки  $M$ , делящей пополам отрезок прямой  $(x - 2)/3 = (y + 1)/5 = (z - 3)/(-1)$ , заключенный между плоскостями  $Oxz$  и  $Oxy$ .

**Решение.** Найдем точку пересечения прямой с плоскостью  $Oxz$ , полагая в уравнениях прямой  $y = 0$ . Тогда получим

$$(x - 2)/3 = 1/5 = (z - 3)/(-1)$$

или

$$\begin{cases} (x - 2)/3 = 1/5, \\ (z - 3)/(-1) = 1/5. \end{cases}$$

Из последней системы находим  $x = 2,6$ ,  $z = 2,8$ . Эти координаты вместе с  $y = 0$  определяют точку  $A(2,6; 0; 2,8)$ . Аналогично, полагая в уравнениях прямой  $z = 0$ , имеем:

$$(x - 2)/3 = (y + 1)/5 = 3 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - 2 = 9, \\ y + 1 = 15, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x = 11, \quad y = 14.$$

Получим точку  $B(11; 14; 0)$  пересечения прямой с плоскостью  $Oxy$ . Зная координаты концов  $A(2,6; 0; 2,8)$  и  $B(11; 14; 0)$  отрезка  $AB$ , по формулам деления отрезка пополам определим координаты точки  $M$  – середины отрезка  $AB$ :  $x = \frac{2,6+11}{2} = 6,8$ ;  $y = \frac{0+14}{2} = 7$ ;  $z = \frac{2,8+0}{2} = 1,4$ . Итак,  $M(6,8; 7; 1,4)$  – искомая точка.

**Пример 7.13.** Даны координаты вершин пирамиды  $A(0, 1, 1)$ ,  $B(1, 8, 3)$ ,  $C(3; 7; -2)$ ,  $D(-1; 2; 5)$ . Найти: 1) длины ребер  $AB$  и  $AC$ ; 2) угол между ребрами  $AB$  и  $AC$ ; 3) площадь грани  $ABC$ ; 4) объем пирамиды  $ABCD$ ; 5) уравнение прямой  $AB$ ; 6) уравнение плоскости  $ABC$ ; 7) уравнение высоты пирамиды, опущенной на грань  $ABC$ . Сделать чертеж.

**Решение**

1) Длина ребра  $AB$  совпадает с длиной вектора  $\overline{AB}$ , поэтому определим координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (1-0; 8-1; 3-1) = (1; 7; 2), \\ \overline{AC} &= (3-0; 7-1; -2-1) = (3; 6; -3).\end{aligned}$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, то есть

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{1^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 49 + 4} = \sqrt{54}, \\ |\overline{AC}| &= \sqrt{3^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54}.\end{aligned}$$

2) Угол между ребрами  $AB$  и  $AC$  совпадает с углом между векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , который можно определить по формуле:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{1 \cdot 3 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{54}} = \frac{3 + 42 - 6}{54} = \frac{39}{54} = \frac{13}{18}, \\ \angle \varphi &\approx 43^\circ.\end{aligned}$$

3) Грань  $ABC$  представляет собой треугольник, его площадь найдем через векторное произведение:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-33)^2 + 9^2 + (-15)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1395} \approx 18,67,$$

так как

$$\begin{aligned} [\overline{AB}, \overline{AC}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \\ &= (-21 - 12) \cdot \bar{i} - (-3 - 6) \cdot \bar{j} + (6 - 21) \cdot \bar{k} = -33 \cdot \bar{i} + 9 \cdot \bar{j} - 15 \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

4) Объем пирамиды вычислим по формуле:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \cdot \text{mod}(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \frac{1}{6} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \text{mod}(24 + 21 + 6 + 12 + 3 - 84) = \frac{1}{6} \cdot \text{mod}(-18) = \frac{18}{6} = 3. \end{aligned}$$

Здесь  $\text{mod } x = |x|$ .

5) Уравнение прямой, проходящей через точки  $A, B$ , имеет вид:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{8-1} = \frac{z-1}{3-1}, \text{ то есть } \frac{x}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{2}.$$

6) Уравнение плоскости  $ABC$  определим из равенства

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 1-0 & 8-1 & 3-1 \\ 3-0 & 7-0 & -2-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ или} \\ -11 \cdot x + 3 \cdot y - 5 \cdot z + 2 = 0.$$

7) Так как высота – это прямая, перпендикулярная плоскости  $ABC$ , ее направляющим вектором будет вектор-нормаль  $\vec{n} = (-11; 3; -5)$  плоскости  $ABC$ , тогда уравнение высоты имеет вид:

$$\frac{x+1}{-11} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-5}.$$

Выполним чертеж (рис. 7.5).

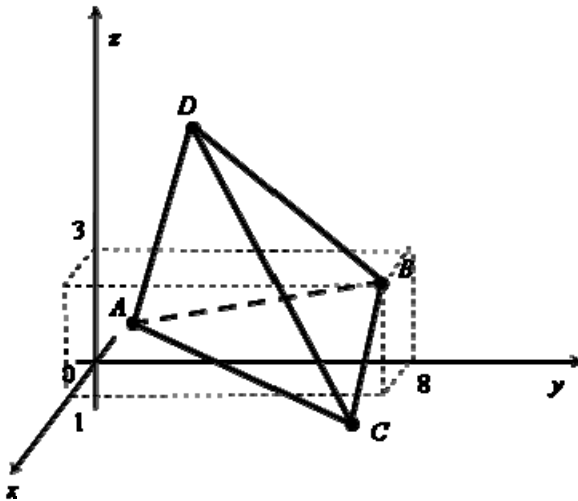


Рис. 7.5

## ТЕМА 8. Функции. Теория пределов

### Понятие функции

В теме 5 мы уже встречались с понятием функции, информация о которой основывалась на материале из школьного курса математики. Здесь это понятие получит свое дальнейшее развитие.

Пусть на действительной оси  $R$  заданы два числовых множества  $X \subset R$  и  $Y \subset R$ .

**Определение.** Будем говорить, что на множестве  $X$  задана *функция*  $f$  действительной переменной  $x$ , если известен закон (отображение), по которому каждому значению  $x \in X$  по закону  $f$  ставится в соответствие единственное значение  $y \in Y$  и обозначается  $y = f(x)$ . Переменная  $x$  называется аргументом функции  $f$ , множество  $X$  — областью определения функции, переменная  $y$  — значением функции или зависимой переменной, а множество  $Y$  — областью значений функции.

**Замечание.** Область  $Y$  значений функции обычно не указывается, так как множество принимаемых значений функции определяет сам закон.

Допускаются многозначные функции (то есть одному  $x$  соответствует более одного значения  $y$ ). Обычно эти случаи оговариваются особо.

**Замечание.** Для обозначения функциональной зависимости вместо символа функции  $f$  можно использовать любую другую букву (но не число) любого алфавита.

**Определение.** Совокупность всех значений независимой переменной  $x$ , для которых функция  $y = f(x)$  определена, называется *областью определения*, или областью существования функции, и обозначается  $D(y) = X$ .

**Определение.** Пусть задана функция  $y = f(x)$ . Тогда  $f(x_0)$  называется *значением* этой функции при  $x = x_0$ .

**Пример 8.1.** Найти значения  $f(0)$ ,  $f(x-2)$  функции  $f(x) = 2 \cdot x^2 + 5$ .

**Решение.** Вычислим значения функции при заданных значениях аргумента  $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 5 = 5$ ;  $f(x-2) = 2 \cdot (x-2)^2 + 5 = 2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 4) + 5 = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 13$ .

### **Способы задания функции**

Чтобы задать функцию  $y = f(x)$ , необходимо указать правило, позволяющее по известному значению  $x$  находить соответствующее значение  $y$ .

Наиболее популярные следующие способы задания функции.

**1) Табличный.** При табличном задании просто выписывается ряд значений независимой переменной и соответствующие им значения функции.

Табличный способ задания функций особенно распространен в естествознании и технике. Например, при изучении зависимости электрического сопротивления  $r$  некоторого медного стержня от температуры  $t$  была получена следующая таблица:

|     |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $t$ | 19,1  | 25,0  | 30,1  | 36,0  | 40,0  | 45,1  | 50,0  |
| $r$ | 76,30 | 77,80 | 79,75 | 80,80 | 82,35 | 83,90 | 85,10 |

**2) Аналитический.** Аналитическое задание функции состоит в том, что дается формула, с помощью которой по заданным значениям независимой переменной можно получать соответствующие им значения функции.

Например,  $y = x^2 + 2 \cdot \lg x$  или  $y = \frac{2 + \cos x}{1 + \sin x}$  – формулы,

которые определяют  $y$  как функцию от  $x$ .

В свою очередь аналитическое задание функции бывает явное, неявное, параметрическое и др.

**Определение.** Функция, заданная формулой (аналитически) вида  $y = f(x)$ , то есть разрешенной относительно зависимой переменной, называется **явной**.

Рассмотрим функцию  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Здесь  $y$  однозначно не выражается через  $x$ , это неявная функция. Графиком этой функции является окружность с центром в точке  $O(0, 0)$  и радиусом  $R = 1$ .

**Определение.** Функция, заданная уравнением  $F(x, y) = 0$ , не разрешенным относительно зависимой переменной, называется  *неявной*  функцией.

Неявная функция может быть как однозначной, так и многозначной. Например, функция  $e^{x \cdot y} - y = 0$  является однозначной неявной функцией.

Для доказательства существования неявной функции  $F(x, y) = 0$  следует доказать, что существует решение этого уравнения, то есть найти функцию  $y = \varphi(x)$ , такую, что выполняется равенство  $F(x, \varphi(x)) = 0$ ,  $\forall x \in X \neq \emptyset$ .

**Определение.** Функция задана *параметрически*, если соответствующие значения  $x$  и  $y$  выражены через третью переменную  $t$ , называемую параметром, то есть 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$
  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Например, 
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
 – уравнение окружности радиуса  $a$ .

### 3) Графический

**Определение.** *Графиком* функции называется множество всех точек  $(x, y)$  плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной  $x$ , а ординаты – соответствующими значениями функции  $y = f(x)$ . Равенство  $y = f(x)$  называется уравнением этого графика [3].

Функция задана графически, если начерчен ее график.

Если график функции построен (рис. 8.1), то, чтобы найти значение функции  $y = f(x)$ , отвечающее какому-нибудь значению  $X$ , необходимо отложить это значение  $X$  по оси абсцисс и из полученной точки восстановить перпендикуляр до пересечения с графиком функции. Длина этого перпендикуляра, взятая с надлежащим знаком, и равна значению функции  $f(x)$ . Например,  $f(2) = 5$ .

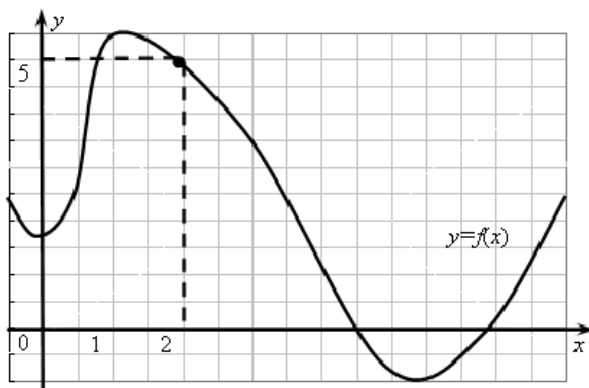


Рис. 8.1

**4) Содержательный.** При таком способе задания варианты независимой переменной, функции и ее значения формулируются в виде правил, законов и т. д. Например, конституция, УК и т. п.

**Замечание.** Представленные способы задания имеют свои достоинства и недостатки. К недостаткам табличного способа задания относится то, что, зная таблицу значений функций, не всегда можно найти аналитическое уравнение функции и соответственно значения функции в точках, не представленных в таблице. Наглядность графического способа задания оказывается неоспоримым плюсом, к недостаткам относится неточность определяемых значений функции. Абсолютно точным способом задания функции является аналитический, так как если известно уравнение (правило) функции, то для любого возможного  $x$  всегда найдется значение  $y$ . Самый общий способ задания функции – содержательный, однако он чаще используется в гуманитарных дисциплинах и реже в математике, например, в теории вероятностей.

### *Элементарные функции*

**Определение.** Функции, построенные из простейших элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции, называются элементарными.



Простейшими считаются функции:

- 1) степенная  $y = x^n$ ,  $n \in R$ ;
- 2) показательная  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 3) логарифмическая  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ ;
- 4) тригонометрические:  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ;
- 5) обратные тригонометрические:  $y = \arccos x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  
 $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

Примером неэлементарной функции является

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пусть  $y$  является функцией от  $u$ ,  $y = f(u)$ ,  $u \in U$ , а  $u$  – функцией от  $x$ ,  $u = \varphi(x)$ ,  $x \in X$ , тогда  $y$  называется **сложной** функцией, то есть  $y = f(\varphi(x))$ , определенной для тех  $x \in X$ , для которых значения  $\varphi(x)$  входят во множество  $U$ .

Например,  $y = \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ ;  $y = \frac{10^x - 1}{x^2}$  – сложные функции.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на симметричном интервале относительно начала координат, то есть  $-x$ ,  $x \in D(y)$ .

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется **четной**, если она не изменяет свое значение при изменении знака аргумента, т. е.  $f(-x) = f(x)$ . Функция  $y = f(x)$  называется **нечетной**, если при изменении знака аргумента знак функции меняется, то есть  $f(-x) = -f(x)$ .

**Замечание.** Отметим, что график четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ , а нечетной – относительно начала координат.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ , называется **периодической**, если существует число  $T \neq 0$ , такое, что  $f(x \pm T) = f(x)$ ,  $x \pm T \in X$ . Наименьшее число  $T$  называется периодом (основным периодом).

### ***Задание функций в полярной системе координат***

Зададим на плоскости точку  $O$ , которую назовем полюсом. Проведем из полюса направленную полупрямую, которую назовем полярной осью.

Пусть  $M$  – произвольная точка плоскости. Соединим точку  $M$  с полюсом. Длина отрезка  $OM$  равна  $\rho$  и называется полярным радиусом, а угол  $\varphi$ , откладываемый от полярной оси к отрезку  $OM$  против движения часовой стрелки, – полярным углом (рис. 8.2).

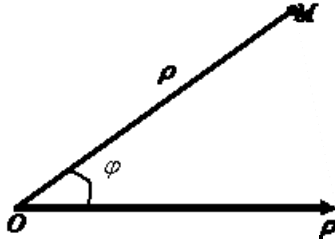


Рис. 8.2

Таким образом, положение точки  $M$  на плоскости определяется двумя координатами  $\rho$  и  $\varphi$ , причем  $\rho$  – всегда величина неотрицательная, а угол  $\varphi$  может принимать значения от 0 до  $2\pi$ , то есть  $\rho \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

#### ***Связь между полярными и декартовыми координатами***

Если совместить полюс с началом координат декартовой системы (рис. 8.3), а полярную ось – с осью абсцисс, тогда прямоугольные координаты  $x$  и  $y$  связаны с полярными координатами  $\rho$  и  $\varphi$  формулами:

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi, \quad (14)$$

а полярные координаты – с декартовыми формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (15)$$

**Замечание.** При нахождении полярного угла точки, определенной в декартовой системе координат, полезно использовать следующие из формулы (15):

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (15')$$

которые позволяют определить угол с точностью до четверти.

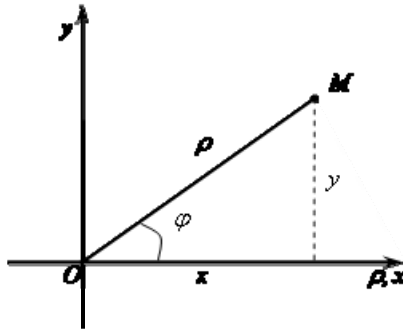


Рис. 8.3

**Пример 8.2.** Задана функция в полярной системе координат своим уравнением  $\rho = 1 - \cos \varphi$ . Необходимо:

- 1) определить точки, лежащие на линии, давая  $\varphi$  значения через промежуток, равный  $\frac{\pi}{8}$ , начиная от  $\varphi = 0$  и до  $\varphi = 2\pi$ ;
- 2) построить линию, соединив полученные точки;
- 3) найти уравнение этой линии в прямоугольной декартовой системе координат.

**Решение.** Придавая углу  $\varphi$  значения с шагом  $\frac{\pi}{8}$ , считаем значения  $\rho$ .

|           |   |         |         |          |         |          |          |          |
|-----------|---|---------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|
| $\varphi$ | 0 | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ | $5\pi/8$ | $3\pi/4$ | $7\pi/8$ |
| $\rho$    | 0 | 0,06    | 0,3     | 0,62     | 1       | 1,38     | 1,7      | 1,94     |

|           |       |          |          |           |          |           |          |           |
|-----------|-------|----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| $\varphi$ | $\pi$ | $9\pi/8$ | $5\pi/4$ | $11\pi/8$ | $3\pi/2$ | $13\pi/8$ | $7\pi/4$ | $15\pi/8$ |
| $\rho$    | 2     | 1,94     | 1,7      | 1,38      | 1        | 0,62      | 0,3      | 0,06      |

Для построения графика в полярной системе координат откладываем полярную ось, затем отмечаем значения углов  $\varphi$  и на этих лучах откладываем значения полярных радиусов, соответствующих данным полярным углам. Соединяем полученные точки. График данной функции построен (рис. 8.4).

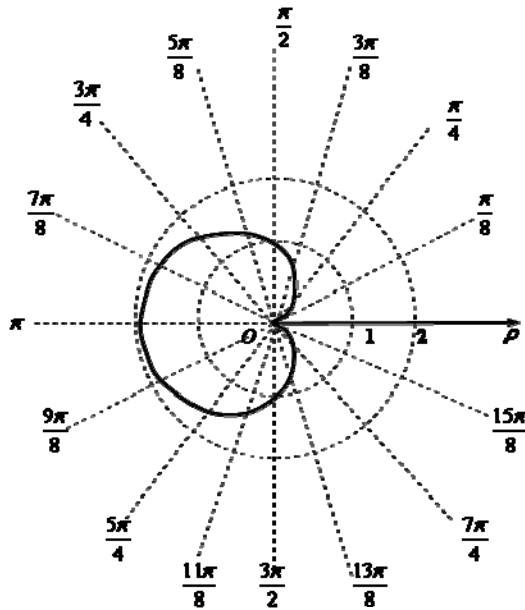


Рис. 8.4

Найдем задание этой линии в декартовой системе координат. Для этого воспользуемся формулами перехода (15'):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \text{ После преобразования } x^2 + y^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

возведем правую и левую части этого равенства в квадрат

$(x^2 + y^2 - x)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$ , получаем уравнение линии в декартовой системе координат  $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$ .

### **Числовые последовательности**

**Определение.** Функция  $f$  целочисленного аргумента  $n$ :  $f(n) = x_n$  называется числовой последовательностью

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

где  $x_n$  — общий член последовательности. Числовую последовательность можно записать более компактно:

$$\{x_n\}, n \in N \text{ или } \{x_n : n \in N\}.$$

**Замечание.** Числовая последовательность всегда состоит из счетного (бесконечного) числа членов, поскольку любую «конечную» последовательность можно представить в виде

$$x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots$$

Это обусловлено тем, что «конечные» последовательности не представляют теоретического интереса.

**Определение.** Числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной, если существует число  $K$ , такое, что любой член этой последовательности по абсолютной величине не превосходит этого числа, то есть

$$\exists (K \in R) : \forall (n \in N) \Rightarrow (|x_n| \leq K).$$

Аналогично числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется неограниченной, если для любого фиксированного числа  $K$  существует такой номер  $n_0 = n_0(K)$ , что  $\forall n > n_0$  всякий член этой последовательности по абсолютной величине больше этого числа, то есть  $\forall (K \in R) : \exists (n_0 \in N), \forall (n > n_0) \Rightarrow (|x_n| > K)$ .

## ***Предел числовой последовательности***

**Определение.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N$ , вообще говоря, зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех натуральных  $n$ , больших  $N$ , выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , то есть  $\forall(\varepsilon > 0) \exists(N = N(\varepsilon)): \forall(n > N) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)$ . Для вычисления предела последовательности используется обозначение  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (или  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ).

**Определение.** Окрестностью точки  $x_n$ ,  $n \in N$ , последовательности  $\{x_n\}$  называется любой открытый интервал, содержащий  $x_n$ .

**Определение.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если в любой его окрестности содержится бесконечное число членов последовательности.

Заметим, что окрестность числа  $a$  не обязана содержать это число, в этом случае говорят о выколотой окрестности числа  $a$ .

**Пример 8.3.** Пусть задана числовая последовательность  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ . Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Решение.** Общий член последовательности  $x_n = \frac{1}{n}$ . Используем определение и найдем такое число  $N = N(\varepsilon)$ , что для любого малого  $\varepsilon > 0$  и натурального  $n > N$  выполняется неравенство:  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ . Разрешим это неравенство относительно  $n$ :  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ , так как  $n \in N$ , то модуль автоматически опускается, и получаем  $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$ . Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0$  найдено

$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$  такое, что  $\forall n \in N$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ то есть } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В обозначениях через «lim» вычисление предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$  осуществляется по схеме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left[ \begin{array}{c} \text{комментарии} \\ x_\infty \end{array} \right] = a.$$

В нашем случае:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

**Замечание.** Из определения следует, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, если, начиная с некоторого номера  $N$ , то есть при  $n = N + 1, N + 2, \dots$ , все элементы последовательности попадают в интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , который называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$ .

**Определение.** Последовательность  $\{\alpha_n\}$  называется бесконечно малой, если  $\forall (\varepsilon > 0) \exists (N = N(\varepsilon)): \forall (n > N) \Rightarrow (|\alpha_n| < \varepsilon)$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .

### **Свойства бесконечно малых**

- 1) Сумма бесконечно малых есть бесконечно малая.
- 2) Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть бесконечно малая.

**Теорема 8.1.** Для того чтобы последовательность  $\{x_n\}$  имела предел, равный  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы  $x_n = a + \alpha_n$ ,  $n \in N$ , где  $a = \text{const}$ ,  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая последовательность.

**Определение.** Последовательность  $\{B_n\}$  называется бесконечно большой, если  $\forall (\varepsilon > 0) \exists (N = N(\varepsilon)) : \forall (n > N) \Rightarrow (|B_n| > \varepsilon)$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$ .

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел.

### *Свойства сходящихся последовательностей*

1) Если для последовательности  $\{x_n\}$  существует предел, равный  $a$ , и число  $b > a$  (или  $b < a$ ), то существует такое число  $N$ , что для любого  $n > N$  следует, что  $x_n < b$  (или  $x_n > b$ ).

**Следствие.** Если для последовательности  $\{x_n\}$  существует предел, равный  $a$ , и  $a > 0$  (или  $a < 0$ ), то  $\forall (n > N) \Rightarrow (x_n > 0)$  (или  $x_n < 0$ ).

2) Если для последовательности  $\{x_n\}$  существует предел, равный  $a$ , и для любого номера  $n$ ,  $x_n < b$  или  $x_n > b$ , то  $a \leq b$  или  $a \geq b$ .

3) Если для последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  существуют пределы, равные соответственно  $a$  и  $b$ , и для любого номера  $n$  выполняется неравенство  $x_n < y_n$ , то  $a \leq b$ .

### *О сжатой последовательности*

4) Пусть заданы три последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$ , для которых выполняется условие: для любого номера  $n$   $x_n \leq y_n \leq z_n$ . Тогда если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{z_n\}$  имеют предел, равный  $a$ , то и последовательность  $\{y_n\}$  имеет предел, равный  $a$ .

5) Если для последовательности  $\{x_n\}$  существует предел, то он единственный.

6) Если для последовательности  $\{x_n\}$  существует предел, то она ограничена.



**Пример 8.4.** Вычислим пределы:

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^2 + 7 \cdot n + 1}{n^2 - 3 \cdot n - 2} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{n^2}{n^2} + 7 \cdot \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - 3 \cdot \frac{n}{n^2} - \frac{2}{n^2}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - 3 \cdot \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{3 + 7 \cdot \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}{1 - 3 \cdot \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}} = \frac{3 + 7 \cdot 0 + 0}{1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0} = \frac{3}{1} = 3; \\
 2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 &= [\infty^2] = \infty; \\
 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)}{n^2} = \\
 &= \left[ \begin{array}{l} a_n = a_1 + d(n-1) \\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \end{array} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot n}{2 \cdot n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{2}; \\
 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) &= \left[ \begin{array}{l} b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \\ S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \end{array} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется монотонно возрастающей (или монотонно убывающей) при возрастании  $n$ , если  $\forall (n \in N) \ x_n < x_{n+1}$  (или  $x_n > x_{n+1}$ ).

Последовательность  $\{x_n\}$  называется неубывающей (или невозрастающей), если  $\forall (n \in N) \ x_n \leq x_{n+1}$  (или  $x_n \geq x_{n+1}$ ).

**Определение.** Число  $a$  является верхней (или нижней) гранью последовательности  $\{x_n\}$ , если:

- 1) для всех  $n \in N$  выполняется неравенство  $x_n \leq a$  (или  $x_n \geq a$ );  
 2) для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $n_\varepsilon$ , что  $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$  (соответственно  $x_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$ ) и обозначается  $\sup\{x_n\}$  (или  $\inf\{x_n\}$ ).

**Теорема 8.2.** Если последовательность  $\{x_n\}$  монотонно возрастает (монотонно убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел, равный  $\sup\{x_n\}$  ( $\inf\{x_n\}$ ).

**Пример 8.6.** Рассмотрим последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in N$ . Покажем, что она монотонно возрастает и ограничена сверху.

**Решение.** Воспользуемся формулой *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^n,$$

где  $C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$  – число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов [4],  $k = 0, 1, 2, \dots, n \in N$ .

**Определение.** Произведение натуральных чисел  $1, 2, \dots, n$  называется *эн-факториалом* и обозначается символом  $n!$ , то есть  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

При этом  $\forall n, (n+1)! = (n+1) \cdot n!$ , по определению  $0! = 1$ .

Далее, учитывая определение числа сочетаний, имеем

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+2)}{(n-1)!} \cdot a \cdot b^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot b^n.$$

Пусть  $a=1, b=\frac{1}{n}$ , тогда  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \frac{n}{1!} \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{1}{n} +$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(n-2))}{(n-1)!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \\
& + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(n-1))}{n!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \dots + \\
& + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(n-1)}{n} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \\
& + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) + \\
& + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \\
& + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
& + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Так как  $\forall n \in N \quad n < n+1$ , то  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right);$$

$$\frac{2}{n} > \frac{2}{n+1} \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{2}{n+1}\right);$$

.....

$$\frac{n-1}{n} > \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right).$$

Кроме того,  $x_{n+1}$  содержит на одно слагаемое больше, поэтому  $\forall n \in N \quad x_n < x_{n+1}$ , то есть последовательность монотонно возрастающая.

Ограничим ее сверху: так как  $\forall n \in N \quad 1 - \frac{1}{n} < 1, \quad 1 - \frac{2}{n} < 1, \dots,$   
 $1 - \frac{n-1}{n} < 1$  и  $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{4!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3},$   
 $\dots, \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$  то

$$\begin{aligned} x_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

То есть  $\forall n \in N \quad x_n < 3$ , тогда по теореме о монотонно возрастающей ограниченной последовательности для нашей последовательности предел существует, обозначим его числом  $e$ , тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \text{ Замечая, что}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^2 = 2,25, \quad x_3 = \left( 1 + \frac{1}{3} \right)^3 = \left( \frac{4}{3} \right)^3 \approx 2,37,$$

$$x_4 = \left( 1 + \frac{1}{4} \right)^4 = \left( \frac{5}{4} \right)^4 \approx 2,44, \quad \dots, \text{ получим, что } 2 < e < 3. \text{ Это}$$

трансцендентное число имеет такую же значимость в математике, как и число  $\pi$  [3]. Иначе говоря,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,7182818285\dots$$

### ***Предел функции***

Понятие предела является одним из основных в функциональном анализе [3]. С помощью предела формулируется множест-

во других более общих понятий. Большинство новых утверждений и результаты в анализе получены благодаря понятию предела.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x = x_0$ .

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что, как только  $|x - x_0| < \delta$ , так сейчас же  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Через кванторы всеобщности ( $\forall$ ) и существования ( $\exists$ ) предел функции запишется формулой  $\forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta = \delta(\varepsilon)) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon)$  или, что то же самое,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

**Определение.**  $\varepsilon$ -Окрестностью точки  $x_0$  называется любой открытый интервал с центром в точке  $x_0$  радиуса  $\varepsilon$ :  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

**Определение.** Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого  $x$ , принадлежащего  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , значения функции  $f(x)$  принадлежат  $\varepsilon$ -окрестности числа  $A$ , где  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  — сколь угодно малое число, вообще говоря, зависящее от  $\varepsilon$ . Окрестность числа  $A$  может быть выколотой.

**Определение.** Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого малого  $\varepsilon > 0$  существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что  $|\alpha(x)| < \varepsilon$ , то есть  $\forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta = \delta(\varepsilon)) : (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|\alpha(x)| < \varepsilon)$ , что эквивалентно записи  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

**Определение.** Функция  $B(x)$  называется бесконечно большой функцией при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого малого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$  такая, что  $|B(x)| > \varepsilon$ , то есть

$\forall (\varepsilon > 0) \quad \exists (\delta = \delta(\varepsilon)) : (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|B(x)| > \varepsilon)$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} B(x) = \infty$ .

**Замечание.** Символ « $\infty$ » является абстракцией, поэтому символы « $+\infty$ » или « $-\infty$ » следует рассматривать как бесконечно удаленные точки на числовой оси. Совпадают ли они в «бесконечности» или находятся на противоположных сторонах – неизвестно. Все зависит от их физической интерпретации и от правил действия с числами разных знаков. Под бесконечно большой величиной следует понимать любую функцию  $B(x)$ , которая при  $x \rightarrow x_0$  находится от любого конечного числа  $N_0$  на сколь угодно большом расстоянии.

**Теорема 8.3.** Функция, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая функция, и наоборот, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = \left[ \frac{1}{0} \right] = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{B(x)} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

### Основные теоремы о пределах

Если существуют  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$ , то справедливы

следующие теоремы:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f_1(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \quad C = const;$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x);$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x);$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0).$

## **Вычисление пределов**

При вычислении пределов функции необходимо в выражение, стоящее под знаком предела, вместо переменной подставить ее предельное значение. При этом возможны два варианта:

1. Проведение необходимых вычислений позволяет получить определенное число (в частности, ноль) или бесконечность, что и является ответом.

2. В результате подстановки предельного значения переменной получаются неопределенные выражения, символические обозначения некоторых из них имеют вид  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty \pm \infty$ ,

$\infty^0$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$  и др. В этом случае для получения результата нужно эти неопределенные выражения «раскрыть» (то есть исключить неопределенность) либо показать, что предела не существует.

**Замечание.** При вычислении пределов функций полезно помнить, что по определению ( $C = \text{const} \neq 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C}{x} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C \cdot x = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} C \cdot x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1; \\ 0, & 0 \leq a < 1; \\ \emptyset, & a < 0; \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1; \\ +\infty, & 0 \leq a < 1; \\ \emptyset, & a < 0. \end{cases}$$

**Пример 8.7.** Вычислить:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 + 9}}{\sin(\pi/x)} = \frac{\sqrt{3^3 + 9}}{\sin(\pi/3)} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}/2} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3};$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(1 + 2 \cdot x^2)} = \frac{2^2 - 4}{\ln(1 + 2 \cdot 2^2)} = \frac{0}{\ln 9} = 0;$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 3 \cdot x)^{1/(x+1)^2} = (1 - 3 \cdot (-1))^{1/(-1+1)^2} = 4^{1/(+0)} = 4^{+\infty} = +\infty.$$

**Замечание.** Символическая запись  $\frac{1}{0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = \left[ \frac{1}{0} \right] = \infty \right)$ ,

где  $\alpha(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ ), стоящая под знаком предела, означает деление не на ноль, а на число, стремящееся к нулю, так и  $\frac{1}{\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{B(x)} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0 \right)$ ,  $B(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ ) – это не деление на бесконечность, а деление на число, стремящееся к бесконечности, при этом  $\left[ \frac{1}{0} \right] = \infty$  и  $\left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0$ .

Теперь рассмотрим методы раскрытия различных видов неопределенностей.

**Неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .** При вычислении пределов

отношения многочленов с неопределенностью  $\frac{\infty}{\infty}$  при  $x \rightarrow \infty$

определяют старшую степень переменной  $x$  для числителя и знаменателя и делят числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на  $x$  в этой степени.

**Пример 8.8.** Вычислить:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x^3 - 3 \cdot x + 1}{2 \cdot x - 5 \cdot x^3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{x^3}{x^3} - 3 \cdot \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{2 \cdot \frac{x}{x^3} - 5 \cdot \frac{x^3}{x^3}} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2} - 5} = -\frac{2}{5};$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2 \cdot x + x^4}{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3} + 1}{\frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \left[ \frac{1}{0} \right] = \infty;$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 7}{5 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{5 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{0}{5} = 0.$$

**Неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .** При вычислении пределов

отношения многочленов с неопределенностью  $\frac{0}{0}$  при  $x \rightarrow x_0$

необходимо при помощи алгебраических преобразований представить эти многочлены в виде произведения сомножителей, одним из которых будет  $(x - x_0)$ .

**Пример 8.9.** Вычислить:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 2 \cdot x + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{x^2 + 2 \cdot x + 4} = \frac{2 + 2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 5}{x^2 - 2 \cdot x - 3} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2 \cdot x - 5)}{(x+1)(x-3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \cdot x - 5}{x - 3} = \frac{-2 - 5}{-1 - 3} = \frac{-7}{4} = -1 \frac{3}{4};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6})(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+6})}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+6})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2-x) - (x+6)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+6})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2 \cdot (x+2)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{2-x} + \sqrt{x+6})} = \frac{-2}{-5(2+2)} = \frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

### ***Первый замечательный предел***

**Теорема 8.4.** Предел отношения синуса бесконечно малого угла к величине этого угла в радианах равен единице, то есть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел называется ***первым замечательным пределом***.

Легко показать (покажите), что имеют место следующие пределы:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1; \\
 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} &= 1, \text{ если } \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.
 \end{aligned}$$

**Пример 8.10.** Вычислить:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \cos x} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x \cdot 2 \cdot \sin^2(x/2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x / 2x) \cdot 2x}{2 \cdot \cos 2x \cdot (\sin(x/2)/(x/2))^2 \cdot (x/2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x \cdot 4}{2 \cdot \cos 2x \cdot x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x \cdot \cos 2x} = \left[ \frac{4}{0} \right] = \infty;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \left[ \begin{array}{l} x - 1 \rightarrow 0, \quad x = y + 1 \\ y = x - 1, \quad y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cdot (y + 1))}{\sin(3\pi \cdot (y + 1))} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cdot y + \pi)}{\sin(3\pi \cdot y + 3\pi)} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cdot y + \pi)}{\sin(3 \cdot \pi \cdot y + 3 \cdot \pi)} = \left[ \begin{array}{l} \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha \\ \sin(\alpha + 2 \cdot \pi) = \sin \alpha \end{array} \right] = \\
 &= \left[ \begin{array}{l} \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha \\ \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi \cdot y)}{-\sin(3 \cdot \pi \cdot y)} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\sin(\pi \cdot y)/(\pi \cdot y)) \cdot \pi \cdot y}{(\sin(3 \cdot \pi \cdot y)/(3 \cdot \pi \cdot y)) \cdot 3 \cdot \pi \cdot y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot y}{3 \cdot \pi \cdot y} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

### ***Второй замечательный предел***

Так называется предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e,$$

где число  $e$  нами определено как предел последовательности

$$\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\} \quad (\text{см. пример 8.6}).$$

Обычно  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$  или следствие из него  $\lim_{\alpha(x) \rightarrow \infty} (1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e$

используется для раскрытия неопределенности вида  $1^\infty$ .

Очевидно, что структура предела предполагает, чтобы основание степени было представлено в виде  $(1+\alpha(x))$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$ , а показатель степени должен быть величиной, обратной к  $\alpha(x)$ .

**Пример 8.11.** Вычислить:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \cdot x - 1}{2 \cdot x + 4} \right)^{3 \cdot x - 1} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2 \cdot x - 1}{2 \cdot x + 4} - 1 \right)^{3 \cdot x - 1} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2 \cdot x - 1 - 2 \cdot x + 4}{2 \cdot x + 4} \right)^{3 \cdot x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-5}{2 \cdot x + 4} \right)^{3 \cdot x - 1} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-5}{2 \cdot x + 4} \right)^{\frac{2 \cdot x + 4}{-5} \cdot \frac{-5}{2 \cdot x + 4} \cdot (3 \cdot x - 1)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-5}{2 \cdot x + 4} \right)^{\frac{2 \cdot x + 4}{-5}} \right]^{\frac{-15 \cdot x + 5}{2 \cdot x + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-15 + 5/x}{2 + 4/x}} = e^{-15/2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin(3 \cdot x))^{1/(2 \cdot x)} = [1^\infty] = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (-\sin(3 \cdot x)))^{\frac{1}{-\sin(3 \cdot x)} \cdot \frac{-\sin(3 \cdot x)}{2 \cdot x}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + (-\sin(3 \cdot x)))^{\frac{1}{-\sin(3 \cdot x)}} \right]^{\frac{-\sin(3 \cdot x)}{2 \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin(3 \cdot x)}{3 \cdot x} \cdot \frac{3 \cdot x}{2 \cdot x}} = e^{-3/2}.
 \end{aligned}$$

## Эквивалентные функции

**Определение.** Если  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – бесконечно малые при  $x \rightarrow x_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$ ,  $C = \text{const}$ , то функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются бесконечно малыми одного порядка, если же  $C = 0$ , то говорят, что  $\alpha(x)$  – бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Если  $C = 1$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются эквивалентными бесконечно малыми при  $x \rightarrow x_0$  и обозначаются:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

**Определение.** Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой порядка  $n$  по сравнению с функцией  $\beta(x)$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^n} = C \neq 0, \quad C = \text{const}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Таблица эквивалентных бесконечно малых величин ( $\alpha(x) \rightarrow 0$ )

- |                                                                            |                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ;                                       | 6) $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ;                              |
| 2) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ;                                    | 7) $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ;                           |
| 3) $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) / \ln a$ ,<br>$a > 0, a \neq 1$ ; | 8) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$ ,<br>$a > 0, a \neq 1$ ;     |
| 4) $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ ;                                   | 9) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ ;                                        |
| 5) $1 - \cos \alpha(x) \sim \alpha^2(x) / 2$ ;                             | 10) $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) / n$ ,<br>$n \in \mathbb{N}$ . |

Рассмотрим примеры вычисления пределов с использованием бесконечно малых величин.

**Пример 8.12.** Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left[ \frac{\sin 3x \sim 3x, 3x \rightarrow 0;}{\sin 5x \sim 5x, 5x \rightarrow 0;} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot x \cdot 5 \cdot x}{x^2 \cdot (1 - x^2)^2} = 15.$$

Отметим в заключение, что при вычислении пределов нужно комбинировать различные приемы и методы. Для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$  также применяется правило Лопиталю, использующее аппарат дифференцирования функций (тема 9).

### **Непрерывность функции**

**Определение.** Если в определении предела функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $x < x_0$  (или  $x > x_0$ ), то говорят, что имеет место **предел слева** (или **предел справа**), который обозначается  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$  (или  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ ). В этом случае говорят об односторонних пределах.

**Теорема 8.5.** Для того чтобы существовал предел функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$  (то есть односторонние пределы совпадают).

**Пример 8.13.** Вычислить односторонние пределы в точке  $x = 0$  функции  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

**Решение.**  $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2},$

$\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$  Так как  $f(-0) \neq f(+0)$ , то предел

функции  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow 0$  не существует.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной** в точке  $x = x_0$ , если выполняются следующие условия:

1) функция  $y = f(x)$  определена в точке  $x = x_0$ , то есть существует значение этой функции в данной точке, равное  $f(x_0)$ ;

2) односторонние пределы этой функции существуют, равны между собой и совпадают со значением функции в данной точке, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

**Определение.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то говорят, что функция непрерывна на этом интервале.

Отметим важные *теоремы о непрерывности функций*.

**Теорема 8.6.** Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

**Теорема 8.7.** Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны в точке  $x = x_0$ , то их сумма, разность, произведение и частное (если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \neq 0$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0$ ) также являются непрерывными функциями.

**Теорема 8.8.** Если функция  $u = \varphi(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0$ , а  $f(u)$  непрерывна в точке  $u_0 = \varphi(x_0)$ , то сложная функция  $f(\varphi(x))$  непрерывна в точке  $x = x_0$ .

### ***Классификация точек разрыва***

Если в точке  $x = x_0$  нарушается какое-либо условие непрерывности функции, то точка  $x = x_0$  называется точкой разрыва функции.

**Разрыв 1-го рода.** Точка разрыва  $x = x_0$  называется *точкой разрыва 1-го рода* функции  $y = f(x)$ , если односторонние пределы  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$  существуют, конечны, а разность  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = C$ ,  $|C| < +\infty$ , называется *скачком функции  $f(x)$*  в точке  $x_0$ . Точка  $x_0$  разрыва 1-го рода, в которой скачок функции равен 0 ( $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ ), называется *точкой устранимого разрыва*.

**Разрыв 2-го рода.** Точка разрыва  $x = x_0$  называется *точкой разрыва 2-го рода* функции  $y = f(x)$ , если хотя бы один из односторонних пределов  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$  не существует или равен  $\infty$ .

**Пример 8.14.** Классифицировать точки разрыва функции:

$$1) y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad 2) y = \frac{|x|}{x}; \quad 3) y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

**Решение.** 1) Функция определена для всех действительных  $x$ , за исключением точки  $x = 2$ . В этой точке нарушается первое условие непрерывности. Значит, точка  $x = 2$  является точкой разрыва. Вычислим односторонние пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x+2) = 4; \\ \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x+2) = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, точка  $x = 2$  – точка устранимого разрыва.

2) Так как функция не определена в точке  $x = 0$ , то вычислим односторонние пределы функции в окрестности этой точки:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Поскольку пределы существуют, конечны, но не равны между собой, то точка  $x = 0$  – точка разрыва 1-го рода.

3) Точка  $x = \pm 2$  является точкой разрыва 2-го рода, так как:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+1}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2-0+1}{(-2-0-2)(-2-0+2)} = \\ &= \left[ \frac{-1}{+0} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x+1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \left[ \frac{-1}{-0} \right] = +\infty, \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x+1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \left[ \frac{3}{-0} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x+1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \left[ \frac{3}{+0} \right] = +\infty.$$

**Примеры 8.15.** Исследуем на непрерывность следующие функции:

$$1) \ y = 2^{\frac{1}{x-1}}; \ 2) \ y = \begin{cases} 3 \cdot x^2, & x < 0; \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & x \geq 1. \end{cases}$$

**Решение. 1)** Функция определена на всей числовой оси, кроме точки  $x=1$ , значит, как элементарная функция, она всюду непрерывна в области определения. Исследуем функцию на непрерывность в точке  $x=1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[ 2^{-\infty} \right] = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[ 2^{+\infty} \right] = +\infty.$$

Точка  $x=2$  – точка разрыва 2-го рода. График этой функции имеет следующий вид (рис. 8.5).

**2)** Функция определена на всей числовой оси, однако для разных промежутков функция задана различными уравнениями, причем в каждом из промежутков функция является непрерывной, поэтому разрывы могут быть только на границах промежутков. Итак, подозрительными на разрыв будут точки  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$ .

Рассмотрим точку  $x_1 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 3 \cdot x^2 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{1-x^2} = 1;$$

$$f(0) = \sqrt{1-0} = 1.$$

Так как  $f(+0) \neq f(-0)$  и конечны, значит, точка  $x_1 = 0$  – точка разрыва 1-го рода.

Рассмотрим точку  $x_2 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) = 0;$$

$$f(1) = 1-1 = 0.$$

Имеем:  $f(1+0) = f(1-0) = f(1)$ . Значит, в точке  $x_2 = 1$  функция непрерывна.

Построим график этой функции (рис. 8.6). В точке  $x = 0$  принимает значение, равное 1 (на рис. 8.6 изображено точкой).

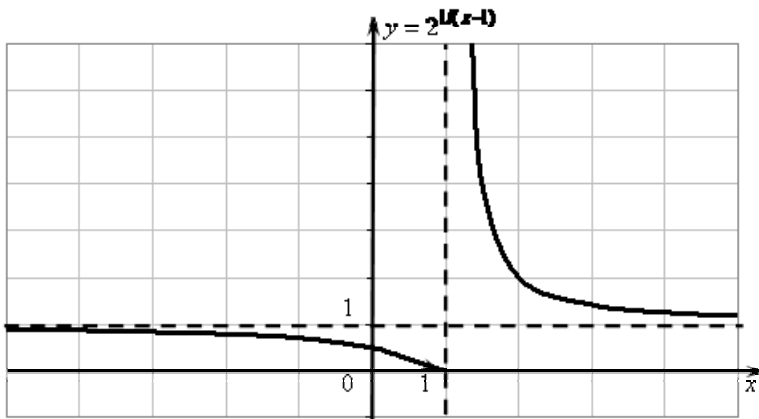


Рис. 8.5

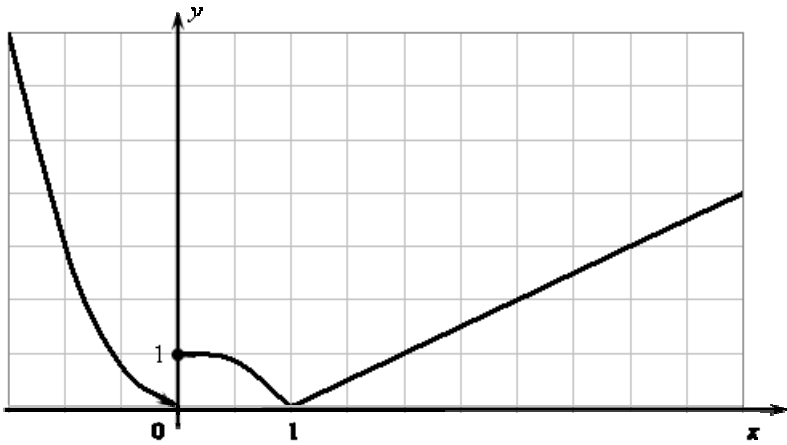


Рис. 8.6

## ТЕМА 9. Дифференциальное исчисление

### *Определение производной*

Пусть функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на интервале  $(a, b)$ . Зададим аргументу  $x \in (a, b)$  некоторое приращение  $\Delta x = (x + \Delta x) - x$ , тогда функция  $y = f(x)$  получит приращение  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

**Определение.** *Производной* функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется *предел* (если он существует) *отношения приращения функции*  $\Delta y$  к *приращению аргумента*  $\Delta x$ , когда последнее стремится к нулю ( $\Delta x \rightarrow 0$ ).

Таким образом, получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (16)$$

или

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (17)$$

**Замечание.** При вычислении производной функции по определению возникает неопределенное выражение вида  $\frac{0}{0}$ . Раскрывая эту неопределенность, выясняем существование предела и тем самым производной функции в точке  $x$ .

Для обозначения производной функции  $y = f(x)$  часто используют также символы:

$$f'(x), \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad y'_x.$$

Если в каждой точке  $x \in (a, b)$  существует производная  $y'$ , то функция  $y = f(x)$  называется **дифференцируемой на интервале**  $(a, b)$ , а операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

### **Геометрический смысл производной**

**Касательной** к кривой  $y = f(x)$  в точке  $M_0$  называется прямая, являющаяся предельным положением секущей  $M_0M$ , когда точка  $M$ , двигаясь по кривой, неограниченно приближается к точке  $M_0$  (рис. 9.1).

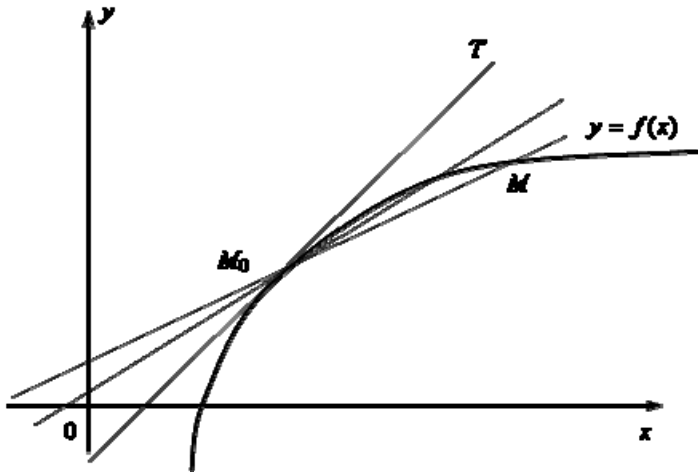


Рис. 9.1

Рассмотрим график непрерывной на  $(a, b)$  функции  $y = f(x)$  (рис. 9.2), имеющей в точке  $M_0(x_0, y_0)$  неvertикальную касательную. Найдем угловой коэффициент этой касательной:  $k = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  – угол наклона касательной к оси  $Ox$ .

Придадим переменной  $x$  приращение  $\Delta x$ , функция  $y = f(x)$  также получит приращение  $\Delta y$ , соответствующей ему точкой на кривой будет  $M(x, y)$ , где  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ . Проведем секущую  $M_0M$  и обозначим через  $\psi$  угол между секущей  $M_0M$  и осью  $Ox$ . Рассмотрим треугольник  $M_0MN$ , тогда  $\angle MM_0N = \psi$ . Угловой коэффициент секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg} \psi = \frac{MN}{M_0N} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Из непрерывности функции следует, что при  $\Delta x \rightarrow 0$  приращение  $\Delta y$  также стремится к нулю; но тогда точка  $M$ , двигаясь по

кривой, в пределе совпадает с точкой  $M_0$ , а секущая, поворачиваясь в точке  $M_0$ , в пределе переходит в касательную, тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \psi.$$

Поэтому угловой коэффициент касательной равен:

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{M \rightarrow M_0} k_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \psi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

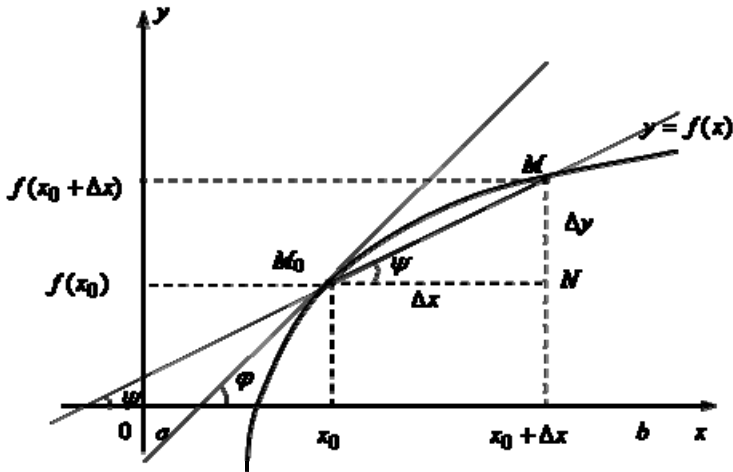


Рис. 9.2

Таким образом, геометрически **производная  $f'(x_0)$  в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке, абсцисса которой равна  $x_0$ , или, что то же самое, тангенсу угла наклона касательной в точке  $M_0(x_0, y_0)$  к оси абсцисс.**

## **Правила дифференцирования, таблица производных**

Для вычисления производных необходимо знать *правила дифференцирования* и формулы, определяющие производные простейших функций. Вывод этих правил и формул основывается на определении производной функции.

### **Правила дифференцирования**

Пусть  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции на интервале  $(a, b)$ ,  $C = \text{const}$ .

**1.**  $(C)' = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $y = C$ , придадим переменной  $\Delta x$  приращение, тогда  $\Delta y = C - C = 0$ . Составим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

и вычислим предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$ .

**2.**  $x' = 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $y = x$ , тогда  $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$ ,  
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ . По определению имеем  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$ .

**3.**  $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $y = C \cdot u(x)$  и функция  $u = u(x)$  – дифференцируемая на интервале  $(a, b)$ , т. е.

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Придадим переменной  $x$  приращение, тогда функции  $y$ ,  $u$  также получают приращение:

$$\Delta y = C \cdot u(x + \Delta x) - C \cdot u(x) = C \cdot (u(x + \Delta x) - u(x)) = C \cdot \Delta u,$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C \cdot \Delta u}{\Delta x}$ . Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем

$$(C \cdot u(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot \Delta u}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = C \cdot u'(x).$$

$$4. \quad (u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

**Доказательство.** Пусть  $y = u(x) \pm v(x)$ ,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции на интервале  $(a, b)$ , т. е.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \\ v'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Запишем приращение функции, соответствующее приращению переменной  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned} \Delta y &= u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x) - u(x) \mp v(x) = (u(x + \Delta x) - u(x)) \pm \\ &\quad \pm (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u \pm \Delta v. \end{aligned}$$

По определению производной и свойствам пределов функций получаем:

$$\begin{aligned} (u(x) \pm v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x). \end{aligned}$$

$$5. \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

**Доказательство.** Пусть  $y = u(x) \cdot v(x)$ , где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции на интервале  $(a, b)$ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \\ v'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Если независимая переменная получит приращение  $\Delta x$ , тогда функции  $y$ ,  $u$ ,  $v$  также получают приращение, т. е.



$$\begin{aligned}
\Delta y &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - \\
&- u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\
&= v(x + \Delta x) \cdot (u(x + \Delta x) - u(x)) + u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x)) = \\
&= v(x + \Delta x) \cdot \Delta u + u(x) \cdot \Delta v.
\end{aligned}$$

По определению производной и свойствам пределов функций получаем:

$$\begin{aligned}
(u(x) \cdot v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) \cdot \Delta u + u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\
&= v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x).
\end{aligned}$$

$$6. \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ ,  $v(x) \neq 0$  и  $u = u(x)$ ,

$v = v(x)$  – дифференцируемые функции на интервале  $(a, b)$ :

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Приращению  $\Delta x$  соответствуют приращения функций  $y$ ,  $u$ ,  $v$ , тогда:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\
&= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - v(x) \cdot u(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{v(x) \cdot (u(x + \Delta x) - u(x)) - u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x))}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\
&= \frac{v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot \Delta v}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}.
\end{aligned}$$

По определению производной и свойствам пределов функций имеем:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) \cdot (\Delta u / \Delta x) - u(x) \cdot (\Delta v / \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.
\end{aligned}$$

**Пример 9.1.** Найти производную функции по определению:

1)  $y = x^2$ ; 2)  $y = \sqrt{x}$ ; 3)  $y = \sin x$ .

**Решение**

1)  $y = x^2$ . Значению независимой переменной  $x$  соответствует значение функции  $f(x) = x^2$ ,  $x \in R$ , значению  $x + \Delta x$  соответствует значение функции  $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$ . По определению производной (17) имеем:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2 \cdot x + \Delta x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \cdot x + \Delta x) = 2x. \text{ Таким образом, } (x^2)' = 2x.
\end{aligned}$$

2)  $y = \sqrt{x}$ . Запишем приращение функции  $y = \sqrt{x}$ , соответствующее приращению независимой переменной  $\Delta x$  ( $x > 0$ ):  $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$ . По определению производной функции имеем:

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}},
 \end{aligned}$$

т. е.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$

**3)**  $y = \sin x$ . Значению аргумента  $x$  соответствует значение функции  $f(x) = \sin x$ , а значению  $x + \Delta x$  соответствует значение функции  $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$ .

Найдем приращение функции:

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\
 &= 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2},
 \end{aligned}$$

вычислим предел:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем  $(\sin x)' = \cos x$ .

### Таблица производных простейших функций

- |                                                  |                                                              |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in R;$          | 8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, a > 0, a \neq 1;$ |
| 2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1;$  | 9) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$                                 |
| 3) $(e^x)' = e^x;$                               | 10) $(\cos x)' = -\sin x;$                                   |
| 4) $(\sin x)' = \cos x;$                         | 11) $(\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x};$          |
| 5) $(\operatorname{tgx})' = \frac{1}{\cos^2 x};$ | 12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$                |
| 6) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$      | 13) $(\operatorname{arctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}.$           |
| 7) $(\operatorname{arctgx})' = \frac{1}{1+x^2};$ |                                                              |

**Пример 9.2.** Найти производную функции:

$$1) y = (x^2 + 5 \cdot x) \cdot (x^3 - 2); \quad 2) y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

#### Решение

1) Воспользуемся правилом дифференцирования произведения функций:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 5 \cdot x)' \cdot (x^3 - 2) + (x^3 - 2)' \cdot (x^2 + 5 \cdot x) = \\ &= (2 \cdot x + 5) \cdot (x^3 - 2) + 3 \cdot x^2 \cdot (x^2 + 5 \cdot x) = 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x + 5 \cdot x^3 - \\ &- 10 + 3 \cdot x^4 + 15 \cdot x^3 = 5 \cdot x^4 + 20 \cdot x^3 - 4 \cdot x - 10. \end{aligned}$$

2) По правилу дифференцирования дроби имеем:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left( \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)' = \\
 &= \frac{(\cos x + \sin x)' \cdot (\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)'}{(\cos x - \sin x)^2} = \\
 &= \frac{(-\sin x + \cos x) \cdot (\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x) \cdot (-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2} = \\
 &= \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x} = \\
 &= \frac{\cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x}{1 - \sin 2x} = \\
 &= \frac{2}{1 - \sin 2x}.
 \end{aligned}$$

### ***Производные сложной и обратной функций***

**Теорема 9.1.** Производная сложной функции  $y = f(\varphi(x))$  или  $y = f(u)$ , где  $u = \varphi(x)$ , равна произведению производной функции  $f(u)$  по промежуточному аргументу  $u = \varphi(x)$  на производную промежуточного аргумента по независимой переменной  $x$ :

$$(f(\varphi(x)))' = f'_\varphi \cdot \varphi'(x) \text{ или } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

**Пример 9.3.** Найти производную функции:

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad 2) y = \arctg \sqrt{x}.$$

1) Представим данную функцию как степенную  $y=(1+x^2)^{-1/2}$  и найдем ее производную:

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-3/2} \cdot (1+x^2)' = -\frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{(1+x^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$2) \quad y' = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (1+x)}.$$

**Определение.** Пусть функция  $y=f(x)$  определена на множестве  $X$  со значениями из множества  $Y$ . Функция, определенная на  $Y$  и сопоставляющая значению  $y \in Y$  такое  $x \in X$ , что  $f(x)=y$ , называется обратной для функции  $y=f(x)$  и обозначается  $x=f^{-1}(y)$ ,  $y \in Y$  (то есть  $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$ ).

Для существования на  $(a,b)$  функции, обратной к  $f(x)$ , необходимо, чтобы  $f(x)$  была строго монотонна, то есть  $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2$ , или  $f(x_1) < f(x_2)$ , или  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**Теорема 9.2.** Если функция  $y=f(x)$  строго монотонна на интервале  $(a,b)$  и имеет производную  $f'(x) \neq 0$  в каждой точке этого интервала, то обратная к ней функция  $x=f^{-1}(y)$  существует и имеет производную  $(f^{-1}(y))'$  в соответствующей точке, определяемую по формуле  $(f^{-1}(y))'_y = \frac{1}{f'(x)}$  или

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Таким образом, *производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.*

**Пример 9.4.** Найти производную функции  $y = \arcsin x$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

**Решение.** Обратной к функции  $y = \arcsin x$  является функция  $x = \sin y$ ,  $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ , тогда  $x'_y = (\sin y)' = \cos y$ .

Тогда по теореме о дифференцировании обратной функции имеем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

### ***Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций***

Если неявная функция задана уравнением  $F(x; y) = 0$ , то для нахождения производной от  $y$  по  $x$  нет необходимости разрешать уравнение относительно  $y$ : *достаточно продифференцировать это равенство по  $x$ , рассматривая при этом  $y$  как функцию  $x$ , и затем полученное равенство разрешить относительно  $y'$* . Производная неявной функции выражается через аргумент  $x$  и функцию  $y$ .

**Пример 9.5.** Найти производную функции, заданную уравнением  $x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y = 0$ .

**Решение.** Функция задана неявно. Дифференцируем по  $x$  данное равенство.

Из полученного соотношения

$$3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3 \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') = 0 \text{ следует, что } y^2 \cdot y' - x \cdot y' = y - x^2,$$

$$\text{то есть } y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Пусть функция  $y = f(x)$  задана **параметрически**  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$   $t \in [a, b]$ , где функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  – дифференцируемые и  $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$ .

Найдем производную  $y'_x$ , считая, что функция  $x = \varphi(t)$  имеет обратную  $t = \varphi^{-1}(x)$ . По правилу дифференцирования обратной функции имеем:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \quad (18)$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ то есть } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Полученная формула позволяет находить производную от функции, заданной параметрически, не находя явной зависимости функции  $y$  от  $x$ .

**Пример 9.6.** Пусть  $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$  Найти  $y'_x$ .

**Решение.** Имеем  $x'_t = (t^3)' = 3 \cdot t^2$ ,  $y'_t = (t^2)' = 2 \cdot t$ . По формуле (18)

$$\text{имеем } y'_x = \frac{2 \cdot t}{3 \cdot t^2} = \frac{2}{3 \cdot t}.$$

### **Логарифмическое дифференцирование**

*Логарифмическое дифференцирование* состоит в том, что первоначально заданную функцию логарифмируют, а затем приступают к дифференцированию, помня, что  $y$  является функцией аргумента  $x$ .

Логарифмическое дифференцирование целесообразно использовать в случаях, когда взятие производной существенно упрощается после логарифмирования исходной функции (сложно-показательных функций  $y = u(x)^{v(x)}$ , сложных дробно-рациональных функций и т. п.)

и приводит к неопределенному выражению  $\frac{0}{0}$ .

Найдем производную функции  $y = u(x)^{v(x)}$ , где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  — дифференцируемые функции. Для этого ее прологарифмируем с целью упрощения последующих вычислений по основанию  $e$ :  $\ln y = \ln(u(x))^{v(x)}$ . Дифференцируем обе части последнего равенства по  $x$ :  $(\ln y)' = (v(x) \cdot \ln u(x))'$ , получаем:



$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot (\ln u(x))'; \quad \frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)};$$

$$y' = y \cdot \left( v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right).$$

$$\text{Окончательно имеем } \left( u(x)^{v(x)} \right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \left( v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right).$$

**Пример 9.7.** Найти производную функции  $y = (\sin x)^{x^2}$ .

**Решение.** Учитывая вышесказанное, получаем

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^2} = x^2 \cdot \ln \sin x,$$

дифференцируем

$$\frac{y'}{y} = (x^2)' \cdot \ln \sin x + x^2 \cdot (\ln \sin x)'; \quad y' = y \cdot \left( 2x \cdot \ln \sin x + \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} \right).$$

$$\text{Окончательно имеем } y' = (\sin x)^{x^2} \cdot \left( 2x \cdot \ln \sin x + \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} \right).$$

**Пример 9.8.** Найти производную функции  $y = \frac{(x^2+2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3}$ .

**Решение.** Прологарифмируем заданную функцию

$$\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4} \cdot \ln(x-1) + x - 3 \cdot \ln(x+5), \text{ продифференцируем}$$

полученное равенство как неявно заданную функцию  $x$ :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + 1 - \frac{3}{x+5}.$$

$$\text{Выражаем } y': \quad y' = y \cdot \left( \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4 \cdot (x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right),$$

то есть

$$y' = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3} \cdot \left( \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4 \cdot (x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right).$$

### ***Геометрические приложения производной***

Исходя из геометрического смысла производной, уравнение касательной к графику дифференцируемой функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$ , где  $y_0 = f(x_0)$ , имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (19)$$

В самом деле, любая прямая, заданная уравнением  $y = k \cdot x + b$ , однозначно определена точкой  $(x_0, y_0)$ , лежащей на этой прямой, и углом ее наклона к оси  $Ox$ . Из геометрического смысла производной в точке имеем  $f'(x_0) = k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ . Приравнявая левую и правую части последнего равенства, получаем (19).

Прямая, проходящая через точку  $(x_0, y_0)$  перпендикулярно к касательной, называется **нормалью** к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке.

Если  $f'(x_0) \neq 0$ , то уравнение нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), \quad (20)$$

если  $f'(x_0) = 0$ , то нормалью является прямая  $x = x_0$ .

**Пример 9.9.** Найти уравнение касательной и нормали к графику функции  $y = x^2$  в точке  $x = 1$ . Сделать чертеж.

**Решение.** Для того чтобы записать уравнения касательной и нормали, необходимо определить значения функции и ее производной в заданной точке  $x_0 = 1$ :  $y_0 = y(1) = 1^2 = 1$ ,  $y' = f'(x) = (x^2)' = 2x$ ,  $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ .

Так как  $f'(x_0) \neq 0$ , то найденные значения подставим в формулы (19) и (20):

$$y = 2 \cdot x - 1 \text{ — касательная,}$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \text{ — нормаль.}$$

Выполним чертеж (рис. 9.3).

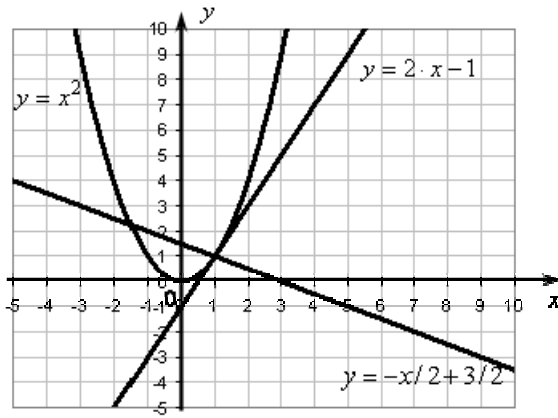


Рис. 9.3

### *Дифференциал функции*

**Определение.** Функция  $y = f(x)$ , определенная на интервале  $(a, b)$ , называется дифференцируемой в точке  $x \in (a, b)$ , если в некоторой окрестности этой точки приращение функции  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где  $A = A(x)$  — постоянная,  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Определение.** Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x \in (a, b)$  называется главная линейная часть ее приращения и обозначается  $dy$  или  $df(x)$ , т. е.  $dy = A \cdot \Delta x$ .

Пусть функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x \in (a, b)$  отличную от нуля производную  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$ . Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции можно записать  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  или  $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ .

Таким образом, дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x \in (a, b)$  равен произведению производной этой функции в точке  $x$  на приращение аргумента

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Поскольку дифференциал независимого переменного совпадает с его приращением ( $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$ ), тогда

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Из этого равенства следует, что производную  $\frac{d}{dx} f(x)$  можно рассматривать не только как обозначение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ , но и как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной, то есть  $\frac{d}{dx} f(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}$ .

Правила нахождения дифференциалов непосредственно вытекают из соответствующих правил дифференцирования функций.

**Пример 9.10.** Найти дифференциал функции  $y = e^x \cdot \ln x$ .

**Решение.** Имеем:

$$dy = d(e^x \cdot \ln x) = (e^x \cdot \ln x)' \cdot dx = \left( e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x} \right) dx.$$

**Замечание.** Рассматривая производную как отношение дифференциалов, легко получить многие формулы и теоремы вычисления производных. Например, производная сложной функции легко получается из цепочки:  $(f(\varphi(x)))'_x = \frac{df(\varphi(x))}{d\varphi} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$ .

### **Основные свойства дифференциала**

Пусть  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции,  $C = const$ .

- 1)  $dC = 0$  ;                      2)  $d(C \cdot u) = C \cdot du$ ;
- 3)  $d(u \pm v) = du \pm dv$  ;    4)  $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$ ;
- 5)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$ ,  $v \neq 0$ .

### **Производные высших порядков**

Производная  $y' = f'(x)$  функции  $y = f(x)$  тоже есть функция от  $x$  и называется производной 1-го порядка (1-й производной).

Если функция  $f'(x)$  дифференцируемая, то ее производная называется производной 2-го порядка (2-й производной) и обозначается  $y''$ ,  $f''(x)$  или  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ .

Производная от производной 2-го порядка, если она существует, называется **производной 3-го порядка** и обозначается  $y'''$ ,  $f'''(x)$  или  $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ .

По индукции **производной  $n$ -го порядка** называется производная от производной  $(n-1)$  порядка:  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ,  $n \in N$ .

Производные функции порядка выше первого называются **производными высших порядков**.

Например, для функции  $y = x^5 - 3 \cdot x^2 + \cos 3x$  имеем:  
 $y' = 5 \cdot x^4 - 6 \cdot x - 3 \cdot \sin 3x$ ;  $y'' = 20 \cdot x^3 - 6 - 9 \cdot \cos 3x$ ;  
 $y^{(3)} = 60 \cdot x^2 + 27 \cdot \sin 3x$  и т. д.

**Пример 9.11.** Найти производную 2-го порядка функции  
 $y = \ln^2 x - \frac{1}{x}$ .

**Решение.** Поскольку  $y' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ , то

$$y'' = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln x \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^2} \cdot (1 - \ln x) - \frac{2}{x^3} =$$

$$= \frac{2}{x^3} \cdot (x - x \cdot \ln x - 1).$$

Если функция задана параметрически:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  дифференцируемые, по крайней мере,  $n$ -го порядка включительно,  $n \in \mathbb{N}$ , тогда производные  $y'_x$ ,  $y''_{xx}$ ,  $y'''_{xxx}$ , ... вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т. д.}$$

Например, для функции  $x = a \cdot \cos^3 t$ ,  $y = a \cdot \sin^3 t$  имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 \cdot a \cdot \sin^2 t \cdot \cos t}{-3 \cdot a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{(x'_t)'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cdot \cos^3 t)'_t} = \frac{-1/\cos^2 t}{-3 \cdot a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t} = \frac{1}{3 \cdot a \cdot \sin t \cdot \cos^4 t}.$$

**Теоремы о дифференцируемости функции**

Знание производной дифференцируемой функции в любой точке интервала  $(a, b)$  часто позволяет делать выводы о поведении на нем самой функции. Обоснованию этого заявления и посвящена оставшаяся часть пособия.

**Теорема 9.3 (Ферма́).** Если функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , достигает наибольшего (наименьшего) значения в точке  $x_0 \in (a, b)$  и имеет в ней конечную производную, то производная функции в этой точке равна нулю, то есть  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема 9.4 (Рóлля).** Если функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и на концах промежутка принимает равные значения  $f(a) = f(b)$ , то существует хотя бы одна точка  $\xi \in (a, b)$ , производная функции в которой равна нулю, то есть  $f'(\xi) = 0$ .

**Теорема 9.5 (Лагранжа).** Если функция  $y = f(x)$  определена, непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то существует точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой выполняется равенство

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (21)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что для дифференцируемой функции, определенной на  $[a, b]$ , существует точка  $\xi$ , содержащаяся внутри интервала  $(a, b)$ , такая, что касательная к кривой  $f(x)$  в этой точке параллельна секущей  $AB$  (рис. 9.4), что следует из равенства  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$ .

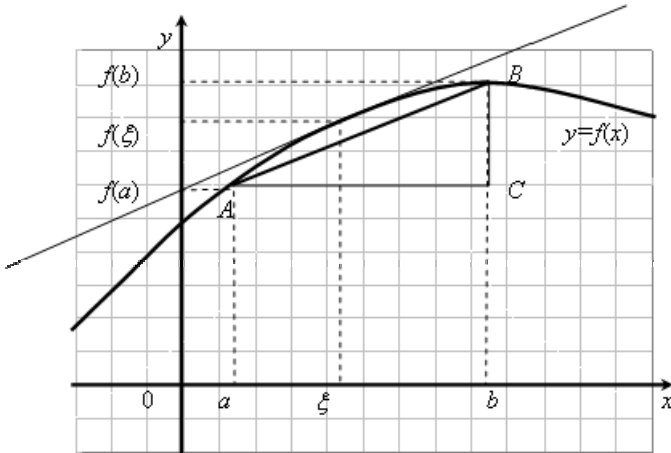


Рис. 9.4

**Замечание.** Теорему Лагранжа часто называют теоремой о среднем значении, а формулу (21) – формулой Лагранжа о конечных приращениях. Этому названию можно дать следующее объяснение.

Рассмотрим промежуток  $[a, b] = [x_0, x_0 + \Delta x]$ . Применим к нему теорему Лагранжа (при любом допустимом  $\Delta x > 0$ ), будем иметь точное равенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(\xi),$$

где  $0 < \Theta < 1$ ,  $\xi = x_0 + \Theta \cdot \Delta x$  или

$$\Delta f(x_0) = f'(\xi) \cdot \Delta x.$$

Недостаток формулы Лагранжа заключается в том, что  $\xi$  неизвестно, так как неизвестно число  $\Theta$ . Тем не менее, формула конечных приращений очень важна в теоретических исследованиях.



**Теорема 9.6 (Коши).** Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  определены, непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $\forall x \in (a, b) \quad g'(x) \neq 0$ , тогда существует точка  $\xi \in (a, b)$ , в которой выполняется равенство

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Геометрический смысл теоремы Коши аналогичен теореме Лагранжа.

### **Правило Лопиталья**

Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  дифференцируемы и  $g'(x) \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  или

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , тогда предел отношения этих функций равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Замечание.** Отметим, что правило Лопиталья применяется только в том случае, если имеет место неопределенное выражение

вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Например, вычислить предел, используя правило Лопиталья,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{(\sin 5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \cos 3x}{5 \cdot \cos 5x} = \frac{3}{5}.$$

### Формула Тейлора

Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n(x)$$

имеет большое теоретическое и практическое значение. В частности, с ее помощью можно вычислить приближенное значение функции  $y = f(x)$  по известным значениям этой функции и ее  $n$  производных в точке  $x_0$  и оценивать точность этого вычисления.

Для оценки погрешности формулы Тейлора важна форма записи остаточного члена  $R_n(x)$ . Распространенной является запись остаточного члена в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

где  $\Theta$  – произвольное число из интервала  $(x, b)$ .

**Пример 9.12.** Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, вычислить  $e^{0,1}$  с точностью до 0,001.

**Решение.** Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции  $f(x) = e^x$  при  $x_0 = 0$  имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \\ R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta \cdot x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Для любого значения  $x$ , находящегося в промежутке  $0 < x < 1$ , имеем  $1 < e^x < 3$ , и, следовательно,  $|R_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta \cdot x} < \frac{3 \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$ .

Очевидно, условие  $|R_n(x)| < \delta$  будет выполнено, если  $\frac{3 \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} < \delta$

или  $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\delta}{3}$ .

Вычисляя последовательно слагаемые, входящие в формулу Тейлора, одновременно имеем возможность видеть, достигнута ли требуемая точность  $\delta$ . Полагая  $\delta = 0,001$  и  $x = 0,1$ , получаем, что заданная точность вычислений будет достигнута при  $n = 2$ , тогда имеем:

$$e^{0,1} = 1 + 0,1/1! + (0,1)^2/2! + (0,1)^3/3! + \dots \approx 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105.$$

## ТЕМА 10. Исследование функции

### *Возрастание и убывание функции*

**Определение.** Функция называется возрастающей (убывающей), если при увеличении аргумента значение функции увеличивается (уменьшается) (рис. 10.1), то есть соответственно  $\forall (x_1, x_2 \in X)$ :  $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$ ;  $(\forall (x_1, x_2 \in X): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$ .

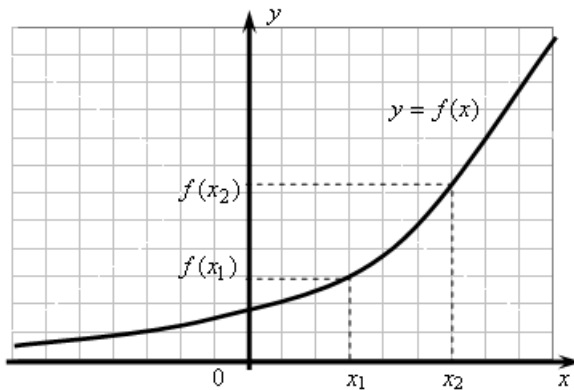


Рис. 10.1

**Теорема 10.1.** Производная возрастающей (убывающей) функции не отрицательна (не положительна).

**Определение.** Функция, только возрастающая или убывающая, называется монотонной. Промежутки, на которых данная функция возрастает или убывает, называются промежутками монотонности этой функции.

### *Экстремумы функции*

**Определение.** Если при переходе аргумента (слева направо) через некоторое значение  $x_1$  функция переходит от возрастания к убыванию, то говорят, что в точке  $x = x_1$  функция имеет максимум (max). Если же при переходе аргумента через некоторое значение  $x_2$  функция переходит от убывания к возрастанию, то в этой точке  $x = x_2$  функция имеет минимум (min). Точки максимума и минимума называются точками экстремума (extr) (рис. 10.2).

**Теорема 10.2 (необходимое условие экстремума).** В точке экстремума дифференцируемой функции производная этой функции равна нулю (см. рис. 10.2).

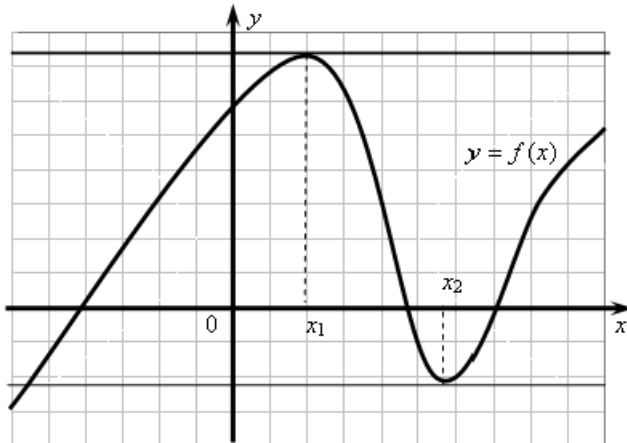


Рис. 10.2

**Следствие.** Дифференцируемая функция может иметь экстремум лишь в тех точках, в которых производная функции равна нулю или не существует.

**Определение.** Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками функции.

**Теорема 10.3 (1-е достаточное условие экстремума).** Если дифференцируемая функция  $y = f(x)$  такова, что для некоторого значения  $x_0$  ее аргумента  $x$  производная  $f'(x)$  равна нулю (не существует при условии, что сама функция  $y = f(x)$  в этой точке непрерывна) и меняет свой знак при переходе через эту точку  $x = x_0$ , то  $x_0$  является экстремумом функции  $f(x)$ , причем:

- 1) если  $f'(x)$  меняет свой знак с «+» на «-», то в точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  достигает максимум;
- 2) если  $f'(x)$  меняет свой знак с «-» на «+», то в точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  достигает минимум.

**Теорема 10.4 (2-е достаточное условие экстремума).** Если для дифференцируемой функции  $y = f(x)$  в некоторой точке  $x_0$  ее первая производная  $f'(x)$  равна нулю, а вторая  $f''(x)$  – существует и отлична от нуля, то есть

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция  $y = f(x)$  имеет экстремум, а именно:

- 1) если  $f''(x_0) > 0$ , то  $x_0$  – минимум;
- 2) если  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  – максимум.

### **Наибольшее и наименьшее значения функции**

Пусть функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , необходимо перечислить все точки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  максимумов (минимумов), принадлежащие интервалу  $(a, b)$  и выбрать наибольшее (наименьшее) значение из чисел  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$  (рис. 10.3).

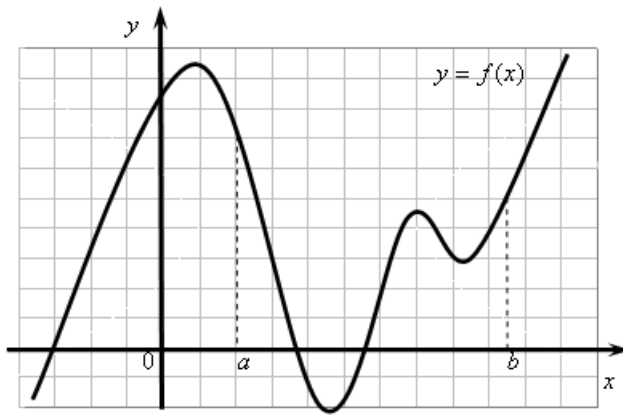


Рис. 10.3

**Пример 10.1.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x \cdot e^{-x}$  на отрезке  $[0, 2]$ .

**Решение.** Найдем критические точки функции, для этого вычислим производную функции  $y' = (x \cdot e^{-x})' = e^{-x} \cdot (1 - x)$ . Определим точки, в которых производная функции равна нулю:  $x = 1$ . Так как  $x = 1 \in [0, 2]$ , то наибольшее и наименьшее значения функции выберем из следующих:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = e^{-1} \approx 0,37; \quad y(2) = 2 \cdot e^{-2} \approx 0,27.$$

Ответ:  $y_{\text{наим}} = y(0) = 0$ ,  $y_{\text{наиб}} = y(1) = e^{-1}$ .  
 $[0, 2]$   $[0, 2]$

### Вогнутость и выпуклость функции. Точки перегиба

**Определение.** График функции  $y = f(x)$ , определенной и непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , называется выпуклым (вогнутым), если каждая дуга графика функции  $y = f(x)$  лежит не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 10.4), т. е.

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2 \in R^+): \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \forall (x_1, x_2 \in [a, b]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \geq \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2); (\forall (\lambda_1, \lambda_2 \in R^+):$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \forall (x_1, x_2 \in [a, b]) \Rightarrow$$

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \leq \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)).$$

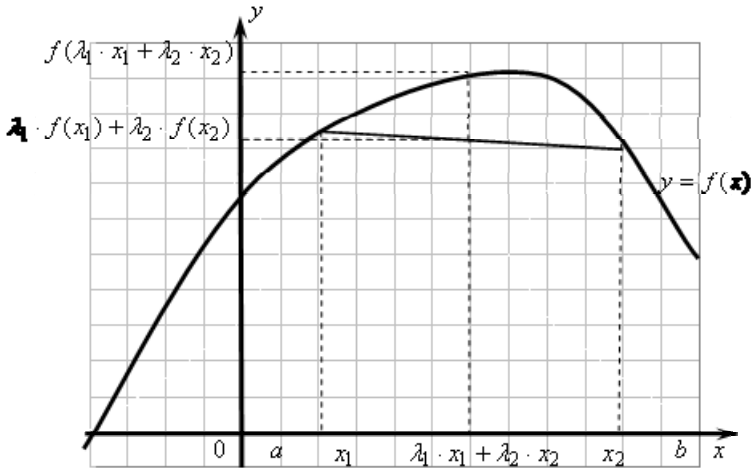


Рис. 10.4

**Теорема 10.5 (Достаточное условие вогнутости / выпуклости).**

Если для дважды дифференцируемой функции  $y = f(x)$  вторая производная  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ ) на интервале  $(a, b)$ , то график функции на этом интервале выпуклый (вогнутый).

**Определение.** Точкой перегиба графика дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется такая его точка, при переходе через которую кривая меняет выпуклость на вогнутость или наоборот (рис. 10.5).

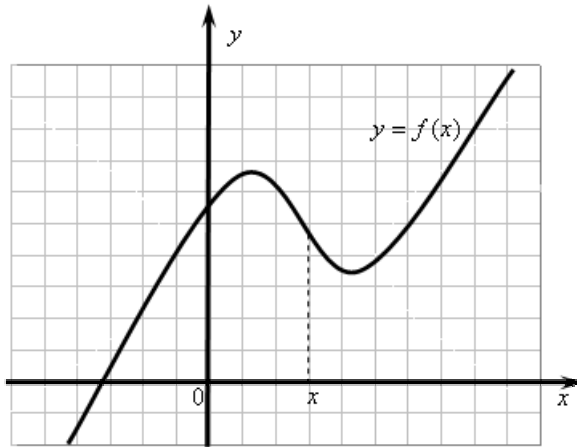


Рис. 10.5

**Теорема 10.6 (Необходимое условие точки перегиба).** Если  $(x_0, f(x_0))$  – точка перегиба функции  $y = f(x)$ , то вторая производная этой функции  $f''(x)$  в точке  $x_0$  равна нулю или не существует.

**Теорема 10.7 (Достаточное условие точки перегиба).** Если для функции  $y = f(x)$  вторая производная  $f''(x)$  в некоторой точке  $x_0$  обращается в ноль или не существует и при переходе через эту точку меняет свой знак, то точка  $(x_0, f(x_0))$  является точкой перегиба графика функции.

### Асимптоты графика функции

**Определение.** Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается текущая точка кривой при удалении этой функции в бесконечность.

**Определение.** Прямая  $x = a$  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы один из односторонних пределов  $f(a - 0)$  или  $f(a + 0)$  равен бесконечности.

**Определение.** Прямая, заданная уравнением  $y = k \cdot x + b$ , называется *наклонной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$  при



$x \rightarrow \infty$ , если коэффициенты  $k, b$ , определяемые по формулам  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$ , принимают конечные значения.

Если  $k = 0$ , то  $y = b$  – горизонтальная асимптота.

### Схема исследования функции

Для того чтобы построить график функции, необходимо обладать достаточной информацией об этой функции. Такую информацию можно получить, проведя полное исследование функции, пользуясь следующей схемой:

- 1) область определения функции;
- 2) нули функции, интервалы знакопостоянства функции;
- 3) четность, нечетность, периодичность;
- 4) экстремумы, интервалы возрастания / убывания функции;
- 5) точки перегиба, интервалы выпуклости / вогнутости;
- 6) асимптоты.

**Пример 10.2.** Провести полное исследование функции  $y = 2x^2 / (x - 1)$  и построить ее график.

**Решение.** Исследуем функцию в соответствии со схемой.

1) Функция  $y = 2x^2 / (x - 1)$  не определена только в точке  $x = 1$ , поэтому областью определения функции будет вся числовая плоскость, кроме этой точки, то есть  $D(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

2) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

с осью  $Ox$ :  $y = 0 \Rightarrow x = 0$ ; с осью  $Oy$ :  $x = 0 \Rightarrow y = 0$ .

Определим интервалы знакопостоянства функции (рис. 10.6).



Рис. 10.6

Таким образом, график функции расположен выше оси  $Ox$  на интервале  $(1, +\infty)$  и ниже – на интервале  $(-\infty, 1)$ .

3) Очевидно, что ни одна позиция не выполнена, то есть функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

4) Исследуем функцию на наличие экстремумов. Для этого вычислим первую производную:

$$y' = \frac{2 \cdot ((x^2)'(x-1) - (x-1)' \cdot x^2)}{(x-1)^2} = \frac{2(2x(x-1) - x^2)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2(2x^2 - 2x - x^2)}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Найдем точки, в которых производная равна нулю или не существует, отметим на числовой оси полученные точки и определим знак производной на каждом из полученных интервалов (рис. 10.7).



Рис. 10.7

Функция возрастает на интервалах  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ , убывает  $(0, 1) \cup (1, 2)$ , в точке  $x=0$ ,  $y=0$  достигает максимум, в точке  $x=2$ ,  $y=8$  достигает минимум.

$$5) \quad y'' = \frac{2 \cdot ((x^2 - 2x)'(x-1)^2 - ((x-1)^2)'(x^2 - 2x))}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2((2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2 - 2x))}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{4(x-1)(2x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Найдем точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, полученную точку отметим на числовой оси и проверим знак второй производной на полученных интервалах (рис. 10.8).

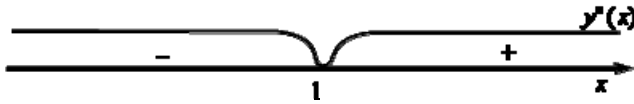


Рис. 10.8

График функции – выпуклый на интервале  $(-\infty, 1)$ , вогнутый – на интервале  $(0, +\infty)$ ; так как функция в точке  $x = 1$  не определена, то точек перегиба нет.

6) Поскольку функция не определена в точке  $x = 1$ , вычислим пределы функции справа и слева в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x^2}{(x-1)} = \frac{2}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2}{(x-1)} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

Прямая  $x = 1$  является вертикальной асимптотой.

Исследуем функцию на наличие наклонной асимптоты, для этого вычислим коэффициенты  $k$  и  $b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = 2;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{(x-1)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1} = 2.$$

Прямая  $y = 2x + 2$  является наклонной асимптотой.

Результаты исследования представим в следующей таблице:

|       |                |     |               |               |     |                |
|-------|----------------|-----|---------------|---------------|-----|----------------|
| $x$   | $(-\infty, 0)$ | 0   | $(0, 1)$      | $(1, 2)$      | 2   | $(2, +\infty)$ |
| $y$   | $-\uparrow$    | 0   | $-\downarrow$ | $+\downarrow$ | 8   | $+\uparrow$    |
| $y'$  | +              | Max | -             | -             | Min | +              |
| $y''$ | -              |     | -             | +             |     | +              |

Построим график функции (рис. 10.9).

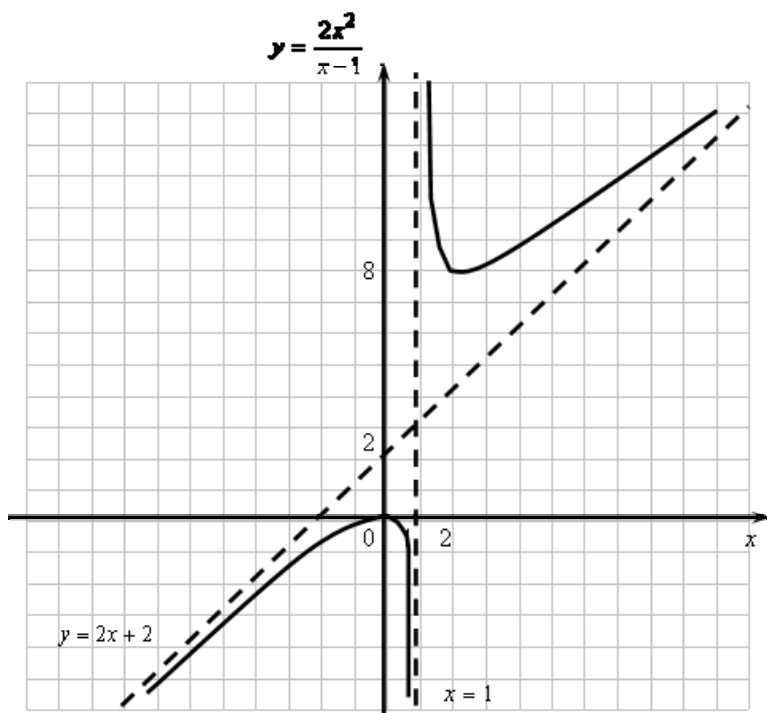


Рис. 10.9

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В 1-м семестре выполняются две контрольные работы (1-я контрольная работа включает задания с 1-го по 6-е, 2-я контрольная работа – задания с 7-го по 12-е), вариант которых следует выбирать по последней цифре номера зачетной книжки. Если номер заканчивается 0, то он соответствует варианту 10. Не следует приступать к выполнению контрольных работ, не изучив соответствующие разделы и не разобрав приведенные в них примеры.

Контрольные работы оформляются в отдельной тетради (необходимо оставить поля для замечаний рецензента) либо в отдельном файле (в названии файла следует указать фамилию и дисциплину), если Ваш населенный пункт расположен в ином городе, чем сам вуз, в котором Вы обучаетесь. Условие задачи должно быть приведено полностью. Решение выполняется в логической последовательности с пояснениями и краткими формулировками производимых действий.

Выполненные контрольные работы студентом доставляются в институт или отправляются по электронной почте на рецензирование (vm2@kemtipp.ru). Получив проверенную работу, студент должен учесть замечания и исправить ошибки, если таковые имеются. Если работа не зачтена, то ее надо выслать на повторное рецензирование. Контрольные работы, выполненные без соблюдения предъявляемых требований, небрежно или не своего варианта, не рецензируются.

Возникающие при выполнении контрольной работы вопросы можно задать по электронной почте (vm2@kemtipp.ru).

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Задание № 1.** Даны четыре вектора  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  и  $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$  в некотором базисе. Показать, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют базис, и найти координаты вектора  $\vec{d}$  в этом базисе.

- 1)  $\vec{a} = (4, 5, 2)$ ,  $\vec{b} = (3, 0, 1)$ ,  $\vec{c} = (-1, 4, 2)$ ,  $\vec{d} = (5, 7, 8)$ ;
- 2)  $\vec{a} = (3, -5, 2)$ ,  $\vec{b} = (4, 5, 1)$ ,  $\vec{c} = (-3, 0, -4)$ ,  $\vec{d} = (-4, 5, -16)$ ;
- 3)  $\vec{a} = (-2, 3, 5)$ ,  $\vec{b} = (1, -3, 4)$ ,  $\vec{c} = (7, 8, -1)$ ,  $\vec{d} = (1, 20, 1)$ ;
- 4)  $\vec{a} = (1, 3, 5)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, 0)$ ,  $\vec{c} = (5, 7, 9)$ ,  $\vec{d} = (0, 4, 16)$ ;
- 5)  $\vec{a} = (2, 4, -6)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, 5)$ ,  $\vec{c} = (0, -3, 7)$ ,  $\vec{d} = (3, 2, 52)$ ;
- 6)  $\vec{a} = (4, 3, -1)$ ,  $\vec{b} = (5, 0, 4)$ ,  $\vec{c} = (2, 1, 2)$ ,  $\vec{d} = (0, 12, -6)$ ;
- 7)  $\vec{a} = (3, 4, -3)$ ,  $\vec{b} = (-5, 5, 0)$ ,  $\vec{c} = (2, 1, -4)$ ,  $\vec{d} = (8, -16, 17)$ ;
- 8)  $\vec{a} = (-2, 1, 7)$ ,  $\vec{b} = (3, -3, 8)$ ,  $\vec{c} = (5, 4, -1)$ ,  $\vec{d} = (18, 25, 1)$ ;
- 9)  $\vec{a} = (1, 0, 5)$ ,  $\vec{b} = (3, 2, 7)$ ,  $\vec{c} = (5, 0, 9)$ ,  $\vec{d} = (-4, 2, -12)$ ;
- 10)  $\vec{a} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{b} = (4, 3, -3)$ ,  $\vec{c} = (-6, 5, 7)$ ,  $\vec{d} = (34, 5, -26)$ .

**Задание № 2.** Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти ее решение с помощью правила Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение; 3) решить методом Гаусса.

1. 
$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = -10, \\ 2 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 - x_3 = 8, \\ -x_1 + 6 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 3. \end{cases}$$
6. 
$$\begin{cases} x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = -5, \\ x_1 + 9 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = -1, \\ -2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 6. \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x_1 - 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = -1, \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 = 6, \\ -3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 = -13. \end{cases}$$
3. 
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = -10, \\ -x_1 + 5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 5, \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 3. \end{cases}$$
4. 
$$\begin{cases} -2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 = -8, \\ x_1 + 7 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = -9, \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$
5. 
$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 = -5, \\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 8, \\ x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$
7. 
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 = 5, \\ 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 4, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$
8. 
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 4, \\ 4 \cdot x_1 - x_2 + 5 \cdot x_3 = 6, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 9. \end{cases}$$
9. 
$$\begin{cases} -2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 = -4, \\ 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = -6, \\ x_1 - 8 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 1. \end{cases}$$
10. 
$$\begin{cases} x_1 + 7 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 3, \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 = 5, \\ -2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = -4. \end{cases}$$

**Задание № 3.** Даны координаты вершин пирамиды.

Найти:

1) длины ребер  $AB$  и  $AC$ ; 2) угол между ребрами  $AB$  и  $AC$ ;  
 3) площадь грани  $ABC$ ; 4) объем пирамиды  $ABCD$ ; 5) уравнение прямой  $AB$ ; 6) уравнение плоскости  $ABC$ ; 7) уравнение высоты пирамиды, опущенной на грань  $ABC$ . Сделать чертеж.

- 1)  $A(3, 1, 4)$ ,  $B(-1, 6, 1)$ ,  $C(-1, 1, 6)$ ,  $D(0, 4, -1)$ ;
- 2)  $A(3, 3, 9)$ ,  $B(6, 9, 1)$ ,  $C(1, 7, 3)$ ,  $D(8, 5, 8)$ ;
- 3)  $A(3, 5, 4)$ ,  $B(5, 8, 3)$ ,  $C(1, 9, 9)$ ,  $D(6, 4, 8)$ ;
- 4)  $A(2, 4, 3)$ ,  $B(7, 6, 3)$ ,  $C(4, 9, 3)$ ,  $D(3, 6, 7)$ ;
- 5)  $A(9, 5, 5)$ ,  $B(-3, 7, 1)$ ,  $C(5, 7, 8)$ ,  $D(6, 9, 2)$ ;
- 6)  $A(0, 7, 1)$ ,  $B(4, 1, 5)$ ,  $C(4, 6, 3)$ ,  $D(3, 9, 8)$ ;
- 7)  $A(5, 5, 4)$ ,  $B(3, 8, 4)$ ,  $C(3, 5, 10)$ ,  $D(5, 8, 2)$ ;
- 8)  $A(6, 1, 1)$ ,  $B(4, 6, 6)$ ,  $C(4, 2, 0)$ ,  $D(1, 2, 6)$ ;
- 9)  $A(7, 5, 3)$ ,  $B(9, 4, 4)$ ,  $C(4, 5, 7)$ ,  $D(7, 9, 6)$ ;
- 10)  $A(6, 6, 2)$ ,  $B(5, 4, 7)$ ,  $C(2, 4, 7)$ ,  $D(7, 3, 0)$ .

**Задание № 4.** Какая кривая определяется следующим уравнением?

- 1)  $36 \cdot x^2 + 36 \cdot y^2 - 36 \cdot x - 24 \cdot y - 23 = 0$ ;
- 2)  $16 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 - 32 \cdot x + 50 \cdot y - 359 = 0$ ;
- 3)  $1/4 \cdot x^2 - 1/9 \cdot y^2 - x + 2/3 \cdot y - 1 = 0$ ;
- 4)  $x^2 + 4 \cdot y^2 - 4 \cdot x - 8 \cdot y - 8 = 0$ ;
- 5)  $5 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 5 = 0$ ;
- 6)  $x^2 - y^2 - 6 \cdot x + 10 = 0$ ;
- 7)  $2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot y - 3 = 0$ ;
- 8)  $x^2 + 4 \cdot y^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$ ;
- 9)  $x^2 - 4 \cdot y^2 + 2 \cdot x + 5 = 0$ ;
- 10)  $4 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 - 8 \cdot x - 36 \cdot y + 4 = 0$ .

**Задание № 5.** Задана линия своим уравнением в полярной системе координат. Необходимо: 1) определить точки, лежащие на линии, придавая  $\varphi$  значения через промежуток, равный  $\pi/8$ , начиная от  $\varphi = 0$  и до  $\varphi = 2\pi$ , 2) построить линию, соединив полученные точки; 3) найти уравнение этой линии в прямоугольной декартовой системе координат.

- |                                             |                                             |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1) $\rho = 1/(1 + \cos \varphi)$ ;          | 6) $\rho = 1/(2 + 4 \cdot \cos \varphi)$ ;  |
| 2) $\rho = 2/(2 - 3 \cdot \cos \varphi)$ ;  | 7) $\rho = 8/(3 - \cos \varphi)$ ;          |
| 3) $\rho = 1/(2 + \cos \varphi)$ ;          | 8) $\rho = 5/(3 - 4 \cdot \sin \varphi)$ ;  |
| 4) $\rho = 10/(2 + 3 \cdot \cos \varphi)$ ; | 9) $\rho = 3/(1 - 2 \cdot \sin \varphi)$ ;  |
| 5) $\rho = 1/(3 - 3 \cdot \cos \varphi)$ ;  | 10) $\rho = 5/(6 + 3 \cdot \sin \varphi)$ . |



**Задание № 6.** Построить множество решений системы линейных алгебраических неравенств и найти координаты угловых точек.

- |                                                                                                                                                     |                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\begin{cases} 5 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 10, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 10, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$                                  |
| 2) $\begin{cases} 5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 \geq -15, \\ 0 \leq x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 17, \\ 0 \leq x_1 \leq 11, \end{cases}$              | 7) $\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24, \\ 4 \cdot x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 - 6 \cdot x_2 \leq -6, \\ x_1 \leq 3, \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 16, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 8, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 2, \end{cases}$                        | 8) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, \end{cases}$       |
| 4) $\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 8, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 0, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 32, \\ x_2 \leq 7, \end{cases}$          | 9) $\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 0, \\ 3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 \geq -12, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$       |
| 5) $\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \leq 6, x_2 \geq 0, \end{cases}$                      | 10) $\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 12, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$                       |

**Задание № 7.** Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 5x - 1};$  б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1}{2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3};$
- в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2 \cdot x + 3} - 3}{\sqrt{x - 2} - 1};$  г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cdot x + 1) \cdot (\ln(x + 3) - \ln x).$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 - x + 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 \cdot x^2 - 14 \cdot x - 5}{x^2 - 2 \cdot x - 15}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3 \cdot x - 2} - 2}{\sqrt{2 \cdot x + 5} - 3}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 2) \cdot (\ln(x + 1) - \ln x)$ .
3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 - 3}{5x^4 - 2x^3 - 4x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2 \cdot x^2 - x - 1}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 \cdot x + 3} - 1}{\sqrt{5 + x} - 2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2) \cdot (\ln(2x + 1) - \ln(2x - 1))$ .
4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{3 \cdot x^2 + x - 5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7 \cdot x + 10}{2 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 10}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x - 4}}{2 - \sqrt{2 \cdot x - 6}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3) \cdot (\ln(x - 2) - \ln(x + 1))$ .
5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 4}{2 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 20}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x + 11}}{2 - \sqrt{x + 6}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 5) \cdot (\ln(x - 3) - \ln x)$ .
6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 7x^2 - 5x^3}{2 + 2x - x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 10 \cdot x + 21}{x^2 + 8 \cdot x + 15}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{9 + x} - 2}{\sqrt{4 - x} - 3}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 5)(\ln(2x + 4) - \ln(2x + 1))$ .
7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 3x^5}{8 - 6x - x^5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22 - x}}{1 - \sqrt{4 + x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 1) \cdot (\ln(2x - 1) - \ln(2x + 1))$ .
8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{9x^4 + 3x + 5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 4}{2 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 20}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5 - x}}{3 - \sqrt{8 + x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - 3) \cdot (\ln(x + 2) - \ln(x - 1))$ .

9. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - 2 \cdot x + 5 \cdot x^4}{2 + 3 \cdot x^2 + x^4}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4 \cdot x - 21}{2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{2 - \sqrt{8 + x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3 \cdot x + 5) \cdot (\ln(x + 5) - \ln x)$ .
10. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot x + 14 \cdot x^2}{1 + 2 \cdot x + 7 \cdot x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 8 \cdot x + 15}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x - 3}}{2 - \sqrt{x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cdot x - 7) \cdot (\ln(x + 4) - \ln x)$ .

**Задание № 8.** Исследовать функцию  $y = f(x)$  на непрерывность: найти точки разрыва функции (если они есть) и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. 
$$y = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, & x < -2; \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$
2. 
$$y = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3}, & x < -3; \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 3; \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$
3. 
$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x < 0; \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$
6. 
$$y = \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, & x < -2; \\ -\sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2; \\ \frac{|x-2|}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$
7. 
$$y = \begin{cases} -\frac{1}{x+3}, & x < -3; \\ -\sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 3; \\ \frac{|x-3|}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$
8. 
$$y = \begin{cases} -\frac{1}{x+1}, & x < -1; \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0; \\ \frac{|x|}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$4. \quad y = \begin{cases} -\frac{2 \cdot |x|}{x}, & x < 0; \\ \sqrt{4 - x^2}, & 0 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

$$5. \quad y = \begin{cases} \frac{3 \cdot |x|}{x}, & x < 0; \\ \sqrt{9 - x^2}, & 0 \leq x \leq 3; \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$

$$9. \quad y = \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, & x < -2; \\ \sqrt{4 - x^2}, & -2 \leq x \leq 2; \\ \frac{2 \cdot |x|}{x}, & x > 2. \end{cases}$$

$$10. \quad y = \begin{cases} -\frac{1}{x+3}, & x < -3; \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 \leq x \leq 0; \\ \frac{3 \cdot |x|}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

**Задание № 9.** Найти производные первого порядка данной функции, используя правила вычисления производных.

$$1. \quad 1) \quad y = 3 \cdot x^2 - \sin^3 x,$$

$$3) \quad y = \frac{\ln x}{4 - 3 \cdot \cos x},$$

$$2. \quad 1) \quad y = 4 \cdot x^4 + e^x,$$

$$3) \quad y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{ctgx}},$$

$$3. \quad 1) \quad y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - \ln^3 x,$$

$$3) \quad y = \frac{\operatorname{ctgx}}{x^4},$$

$$4. \quad 1) \quad y = 5 \cdot x^2 - \arcsin^3 x,$$

$$3) \quad y = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x},$$

$$5. \quad 1) \quad y = 4 \cdot \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}^3 x,$$

$$2) \quad y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x,$$

$$4) \quad \begin{cases} x = \arcsin 2t, \\ y = 1/(1 - 4 \cdot t^2). \end{cases}$$

$$2) \quad y = \sin x \cdot \ln x,$$

$$4) \quad \begin{cases} x = (1 - t)^2, \\ y = \cos(1 - t)^2. \end{cases}$$

$$2) \quad y = e^x \cdot \arcsin x,$$

$$4) \quad \begin{cases} x = (t - 1)^2, \\ y = \sin(t - 1)^2. \end{cases}$$

$$2) \quad y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \ln x},$$

$$4) \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg}(t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$$

$$2) \quad y = x^5 \cdot e^x,$$

- 3)  $y = \frac{tgx}{\ln x}$ ,                      4)  $\begin{cases} x = 7 + t^2, \\ y = ctg(3 \cdot t^2). \end{cases}$
6. 1)  $y = 5 \cdot \sqrt[5]{x} - 7 \cdot arcctg^3 x$ ,    2)  $y = \cos x \cdot (3 \cdot x - 1)$ ,
- 3)  $y = \frac{3 \cdot x^5}{e^x}$ ,                      4)  $\begin{cases} x = \ln(1 - t^4), \\ y = \arccos(t^2). \end{cases}$
7. 1)  $y = 10 \cdot x^3 + 2 \cdot \cos^3 x$ ,    2)  $y = \sqrt[4]{x} \cdot \sin x$ ,
- 3)  $y = \frac{\ln x}{\arcsin x}$ ,                      4)  $\begin{cases} x = 3/(1 + t^2), \\ y = arcctgt. \end{cases}$
8. 1)  $y = 6 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 7 \cdot tg^3 x$ ,    2)  $y = e^x \cdot \arccos x$ ,
- 3)  $y = \frac{ctgx}{2 \cdot x^4}$ ,                      4)  $\begin{cases} x = arctg(1 + t)^2, \\ y = \sqrt{t^2 + 2 \cdot t + 2}. \end{cases}$
9. 1)  $y = 7 \cdot x^6 + 2 \cdot \arccos^3 x$ ,    2)  $y = e^x \cdot ctgx$ ,
- 3)  $y = \frac{5 \cdot \ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$ ,                      4)  $\begin{cases} x = 3 \cdot e^{-t}, \\ y = (2 + e^{-t})^2. \end{cases}$
10. 1)  $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3 \cdot ctgx$ ,                      2)  $y = \sin x \cdot arctgx$ ,
- 3)  $y = \frac{e^x}{\arcsin x}$ ,                      4)  $\begin{cases} x = \sin^2(1 - 4 \cdot t), \\ y = \cos^2(1 - 4 \cdot t). \end{cases}$

**Задание № 10.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

1.  $f(x) = x^3 - 12 \cdot x + 7$ ;                       $[0; 3]$ .
2.  $f(x) = x^6 - \frac{5}{3} \cdot x^2 + 2$ ;                       $[0; 2]$ .

$$3. \quad f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \cos x; \quad [0; \pi/2].$$

$$4. \quad f(x) = 3 \cdot x^4 - 16 \cdot x^3 + 2; \quad [-3; 1].$$

$$5. \quad f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 1; \quad [1/2; 2].$$

$$6. \quad f(x) = x^4 + 12 \cdot x; \quad [-2; 2].$$

$$7. \quad f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x - \sin x; \quad [0; \pi/2].$$

$$8. \quad f(x) = 81 \cdot x - \frac{3}{4} \cdot x^4; \quad [-1; 4].$$

$$9. \quad f(x) = 5 \cdot x - x^5; \quad [-1; 3].$$

$$10. \quad f(x) = x - \sin x; \quad [-\pi; \pi].$$

**Задание № 11.** Найти уравнение касательной и нормали к графику функции  $y = f(x)$  в указанной точке  $x_0$ . Сделать чертеж.

$$1) \quad y = \frac{1}{x+1}, x_0 = 2; \quad 6) \quad y = 1 + \frac{1}{x}, x_0 = 1;$$

$$2) \quad y = \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}, x_0 = 1; \quad 7) \quad y = 2 \cdot x + \frac{1}{x}, x_0 = 0,5;$$

$$3) \quad y = 2 \cdot \sqrt{x}, x_0 = 4; \quad 8) \quad y = 2 \cdot e^{-x}, x_0 = 0;$$

$$4) \quad y = \frac{x^2}{x+1}, x_0 = -2; \quad 9) \quad y = \frac{1+x}{e^x}, x_0 = 0;$$

$$5) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x-1}, x_0 = 0; \quad 10) \quad y = x^2 + 3 \cdot x, x_0 = -1.$$

**Задание № 12.** Построить график функции  $y = f(x)$ , используя общую схему исследования функции.

$$1) \quad y = \frac{4 \cdot x}{4 + x^2}; \quad 6) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$2) \quad y = \frac{x^2}{x-1};$$

$$3) \quad y = \frac{x^2 - 5}{x - 3};$$

$$4) \quad y = \frac{2 - 4 \cdot x^2}{1 - 4 \cdot x^2};$$

$$5) \quad y = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2};$$

$$7) \quad y = \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{x};$$

$$8) \quad y = \frac{2 \cdot x^2 + x + 1}{x + 1};$$

$$9) \quad y = \frac{x^2 + 5}{x + 2};$$

$$10) \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс, 2008. – Ч 1. – 304 с.
2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-пресс, 2008. – Т. 1. – 416 с.
4. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.
5. Демидович, Б.П. Краткий курс высшей математики / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: Астрель; АСТ, 2005. – 654 с.
6. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 264 с.
7. Проскураков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскураков. – СПб.: Лань, 2008. – 480 с.
8. Натансон, И.П. Краткий курс высшей математики / И.П. Натансон. – СПб.: Лань, 2007. – 736 с.
9. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – СПб.: Лань, 2007. – 688 с.
10. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2008. – Т. 1. – 448 с.

ЛР № 020524 от 02.06.97

Подписано в печать 15.12.10. Формат 60×84<sup>1/16</sup>

Бумага типографская. Гарнитура Times

Уч.-изд. л. 10,25. Тираж 800 экз.

Заказ № 123

ПЛД № 44-09 от 10.10.99

Отпечатано в редакционно-издательском центре

Кемеровского технологического института пищевой промышленности

650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52