ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В.А. Павский

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Для студентов вузов

Кемерово 2008

УДК 519.872(07)
ББК 22.176я7
П12

Рецензенты:
Н.Н. Данилов, заведующий кафедрой
математической кибернетики КемГУ, д-р физ.-мат. наук, профессор;
С.Н. Астраков, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики
Кемеровского института (филиал) РГТЭУ, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Кемеровского технологического института
пищевой промышленности

Павский, В.А.

П12 Теория массового обслуживания : учебное пособие / В.А. Павский; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. - Кемерово, 2008. - 116 с.
ISBN 978-5-89289-513-2

Изложены основы теории массового обслуживания, в круг интересов которой входят почти все направления современной практики.

При построении моделей используется методология марковских процессов. Применяемые показатели эффективности либо выводятся, либо сопровождаются соответствующими пояснениями. Сформулированы модели, часто используемые в практическом анализе реальных объектов и систем. Изложены необходимые сведения из теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов.

Предназначено для студентов и аспирантов экономических и смежных с ними специальностей вузов.

УДК 519.872(07)
ББК 22.176я7

ISBN 978-5-89289-513-2

Оглавление

Введение

Управление и организация промышленными и сельскохозяйственными предприятиями, сферой обслуживания (от предприятий общественного питания и бытового обслуживания до регулирования уровня воды в водохранилищах [1]); очистка воды [2]; проектирование и анализ функционирования автоматизированных систем управления (АСУ) [3], распределенных большемасштабных вычислительных систем, кластерных и Grid-систем [3, 4] далеко неполный перечень объектов **экономической системы**, в той или иной мере использующих математический аппарат **теории массового обслуживания** (ТМО)* [3, 5-7].

Формально ТМО - раздел теории случайных процессов, исследующий потоки требований на обслуживание, поступающие (как правило, в случайные моменты времени) в **систему массового обслуживания** (СМО) [8, 9] и покидающие ее после обслуживания.

Целью исследования [3, 6] является выбор оптимальной или субоптимальной структуры системы и процесса обслуживания.

Как показывает опыт, практическое применение моделей ТМО экономически выгодно в задачах, возникающих: а) при проектировании и эксплуатации систем, состоящих из большого числа тождественных или сходных по основным своим функциям элементов (например: АСУ, вычислительные системы и среды, сети магазинов и предприятий бытового обслуживания); б) определении количества и производительной способности обслуживающих устройств (регистрационные пункты в зданиях аэровокзалов, число кассовых аппаратов в супермаркетах, поиск оптимального комплекта оборудования для производства).

Первые работы по теории массового обслуживания связаны с именем датского ученого А.К. Эрланга (1878-1929) (сотрудника телефонной компании до 1922 г.). Его труды в области проектирования и анализа функционирования телефонных станций вызвали большой интерес к математическим задачам по

---

* Термин введен А.Я. Хинчиным (1894-1959) в 50-х годах прошлого века.

организации работы телефонных сетей, что в дальнейшем способствовало становлению ТМО как математической теории (известны формулы Эрланга).

Развивая результаты, полученные Эрлангом, Д. Юл (G. Jule) в 1924 г. опубликовал работу, в которой определил понятие процесса чистого размножения (при решении задач из теории эволюции), а в 30-х годах XX века В. Феллер (W. Feller) ввел понятие процесса **размножения и гибели**. Одновременно были опубликованы фундаментальные работы по ТМО А.Н. Колмогоровым (уравнения Колмогорова), А.Я. Хинчиным (1932) и Ф. Поллачеком (F. Pollaczek) (1934, формула Поллачека-Хинчина).

В 30-40-е годы XX века ТМО рассматривалась как один из разделов теории случайных процессов, в развитии которого наметился некоторый спад. Это было связано с тем, что для решения задач, возникающих в теории случайных процессов и ТМО, требуется большой объем вычислений, что по тем временам было трудновыполнимо. В 50-е годы, с появлением ЭВМ, появилась реальная возможность успешно решать практические задачи ТМО, записанные в виде систем уравнений.

Более того, выяснилось, что многие модели ТМО можно эффективно применять при проектировании и анализе функционирования самих ЭВМ, а в дальнейшем сетей и вычислительных систем (в частности, в США с середины 60-х по 70-е годы XX века методы ТМО использовались при разработке вычислительной сети ARPANet (прообраз Internet), принадлежащей министерству обороны, ядром которой была вычислительная сеть ILLIAC-4 с планируемым быстродействием один млд опер/с (реализовано $2{,}5\cdot10^{8}$ опер/с, 1972)).

Основные работы в СССР по теории массового обслуживания с 60-х годов XX века принадлежат школам Б.В. Гнеденко [8], А.А. Боровкова [9].

В настоящее время теория массового обслуживания, рассматриваемая как самостоятельная наука, имеет свою область исследования и возникающие проблемы решает собственными методами.

К сожалению, при построении моделей используется достаточно сложный для восприятия математический аппарат, а получаемые формулы громоздки и труднообозримы, хотя возникающие в ТМО формулировки задач понятны, иногда развлекательны; одни вызывают досаду, другие сочувствие и понимание.

Из-за громоздких формул большинство моделей сначала формулируются описательно, некоторые используют неформальный графический материал и только потом применяют собственно математические модели. Необычность подхода связана с тем, что предметом ТМО является одна из самых безрадостных сторон нашего сосуществования - ожидание в очередях. Следует заметить, что в США теория массового обслуживания известна именно как теория очередей (Theory of Queues).

Методы теории массового обслуживания в большей степени основаны на анализе, чем на синтезе. Методы синтеза используются для обобщений и определения направлений развития возникающих проблем.

В книге представлен достаточно простой математический аппарат по сравнению с тем, который используется в теоретических исследованиях по ТМО, тем самым предполагается, что читатель сможет глубже понять методы построения моделей.

Изложение математических приемов, используемых в задачах по ТМО нередко не столь уж существенны для восприятия результатов, если иметь в виду прикладной аспект теории, поэтому некоторые формулы приводятся без выводов.

Цель пособия - познакомить с элементарными моделями и методами ТМО и показать их эффективность при решении практических задач. Может быть использовано в рамках учебно-методического комплекса. Для этого в пособие был включен раздел 5, в котором представлены математические модели СМО, одна из которых используется в качестве практической реализации методов ТМО для анализа эффективности функционирования сформулированной им задачи.

Первый и второй раздел носят информативно-вспомогательный характер: приведены сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для усвоения основного материала.

В третьем разделе даны сведения из теории случайных процессов и теории массового обслуживания: приведены основные определения, рассмотрены марковские цепи и процессы, описаны потоки случайных событий, сформулированы цель и задачи теории массового обслуживания, приведена классификация моделей.

Четвертый раздел содержит примеры систем массового обслуживания. Приведен анализ эффективности функционирования системы массового обслуживания с ожиданием. Описана структура выполнения задания по применению методов ТМО для анализа работы реальных систем массового обслуживания.

В приложениях приведены сведения из операционного исчисления, теории производящих функций, таблицы. Представлен библиографический список.

При выполнении работы по ТМО поощряются профессиональные предпочтения студента:

- желание заниматься административной деятельностью и бизнесом отражается в развернутом введении с элементами рекламы, постановке задачи, выводах и обоснованном прогнозе развития предприятия;

- склонность к инженерно-аналитической деятельности находит себя в качественной постановке задачи, желании разобраться в используемом математическом аппарате, расчете нескольких вариантов и выборе среди них лучшего;

- склонность к исполнительской (технологической) работе определяется характером введения, детальной постановкой задачи, скрупулезным анализом результатов, выводами.

1. Сведения из теории вероятностей

1.1. Основные понятия

Случайные события - набор таких **событий** (явлений), каждое из которых обладает возможностью (при неизменных условиях) реализоваться, но реализуется лишь одно из них [4]. Отсюда следует, что у каждого случайного события должно быть хотя бы одно альтернативное, то есть в единственном числе случайные события не существуют.

При изучении случайных событий предполагаем, что любое из них «за бесконечное время реализуется бесконечное число раз» [8]. Оценивать случайное событие будем по тому, как часто оно появляется в единицу времени.

Пусть Ω - множество мыслимых исходов эксперимента. Каждый исход эксперимента определяется как **элементарное случайное событие** ω. Будем называть множество $\Omega=\{\omega\}$ **пространством случайных элементарных событий**, а сами элементарные события - точками пространства Ω. [4, 8]. Любая пара точек пространства Ω не может произойти одновременно. Такие события называются попарно **несовместными**. Если число точек Ω конечно или счетно, то оно называется **дискретным**. Если они заполняют часть действительной оси или даже всю, то **непрерывным**.

Любой набор i точек ω_i, $\omega_i \in \Omega$, образует **случайное событие** $A=\{\omega_i\} \subset \Omega$, $i=1,2,...,$ κ, $k \in N=\{1,2,...,n,...\}$.

Если $\forall(A,B \subset \Omega) \Rightarrow (((A \bigcup B) \subset \Omega) \wedge ((A \bigcap B) \subset \Omega) \wedge (\overline{A} \subset \Omega))$ и эти условия выполняются для конечного числа событий, то имеем **алгебру** событий.

Каждому случайному событию $A \subset \Omega$ поставим в соответствие его меру - $p=P\{A\} \geq 0$. Если эта мера удовлетворяет аксиомам:

1) $P\{A\}$ существует для любого $A \subset \Omega$;

2) $P\{\Omega\}=1$;

3) $P\left\{\bigcup_i \omega_i\right\}=\sum_i P\{\omega_i\}$,

то она называется **вероятностью** события A. Само Ω называется **достоверным** событием, а его отрицание $\overline{\Omega} = \varnothing$ - **невозможным** событием. Если $A \bigcap B = \varnothing$, то A и B называются **несовместными** событиями (элементарные события - несовместны). Из аксиом 1)-3) следует, что

$$\forall (A \subset \Omega) \Rightarrow (0 \le P\{A\} \le 1).$$

Алгебра событий с введенной для них вероятностью, удовлетворяющей аксиомам 1)-3), образуют аксиоматический подход к определению вероятности. Пара (Ω, p) называется **вероятностным пространством**.

Теорема (*сложения вероятностей*): для любых $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ справедлива формула:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} - \sum_{i<j} P\{A_i \cap A_j\} + ... + (-1)^{n-1} \cdot P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\}.$$

В частности, $\forall A, B \subset \Omega$ имеет место

$$P\{A \bigcup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \bigcap B\}.$$

Определение. События A и B называются **независимыми**, если вероятность их совместного осуществления равна произведению вероятностей этих событий, то есть $P\{A \bigcap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$.

Утверждение. Если события несовместны, то они зависимы.

События $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ образуют **полную группу**, если они попарно несовместны и сумма вероятностей этих событий равна 1, то есть

1) $\forall (i \ne j) \Rightarrow (A_i \bigcap A_j = \varnothing)$;

2) $P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} = 1$.

В частности, $P\{A\} + P\{\overline{A}\} = 1$.

Замечание. Для несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ вместо аксиомы 3) часто используют расширенную аксиому 3*:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\}.$$

1.2. Классический метод вычисления вероятностей

Из аксиоматического определения вероятности следует что, если число $\omega_i \in \Omega$ не более чем счетно, то вероятность существует для любого события $A \subset \Omega$, но как ее вычислить, об этом ничего не говорится, хотя известно, что для каждого элементарного события ω_i существует вероятность p_i, такая, что сумма вероятностей всех элементарных событий пространства Ω равна единице, то есть

$$\sum_{i=1} P\{\omega_i\} = \sum_{i=1} p_i = 1.$$

На использовании этого факта основан **классический** метод вычисления вероятностей случайных событий, который в силу своей специфичности дает способ нахождения вероятностей этих событий непосредственно из аксиом.

Пусть дано вероятностное пространство (Ω, *p*), в котором:

1) Ω состоит из **конечного** числа *n* элементарных событий;

2) каждому элементарному событию ω_i поставлена в соответствие вероятность

$$P\{\omega_i\} = \frac{1}{n},\ i = 1,2,...,n.$$

Рассмотрим событие $A \subset \Omega$, которое состоит из *m* элементарных событий: $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}\}$, тогда из аксиомы 3) вероятностей, в силу несовместности элементарных событий, следует, что

$$P\{A\} = \sum_{j=1}^{m} P\{\omega_{i_j}\} = \frac{m}{n}.$$

Тем самым, имеем формулу:

$$P\{A\} = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

которую можно интерпретировать следующим образом: вероятность событию *A* произойти равна отношению числа элементарных событий, благоприятствующих появлению события *A*, к числу всех элементарных событий из Ω.

В этом суть классического метода вычисления вероятностей событий.

1.3. Статистический метод нахождения вероятностей

Классический метод вычисления вероятностей событий представляет собой теоретическую схему, которая основывается на аксиомах теории вероятностей и, следовательно, не зависит от реального объекта исследования.

Для его применения необходимо владеть всей информацией о возможных исходах эксперимента (пространство Ω). На практике далеко не всегда возможно описать пространство Ω, даже в случае равновозможности элементарных событий. Помочь может статистический метод вычисления вероятностей событий.

Пусть проведено n испытаний, в которых событие A появилось m раз.

Определение. Доля числа случаев, в которых событие A появилось, называется **частотой** появления события A и вычисляется по формуле:

$$W_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

Говоря о частоте, прежде всего, считают, что результат любого испытания заранее **не предсказуем**; учитываются только те результаты, которые **ожидали** получить. Если появился новый результат, то мы должны предполагать, что он возник из **равноценных** начальных условий и **одних и тех же начальных знаний**.

Испытания должны быть **независимыми**, в том смысле, что, во-первых, каждое повторное испытание проводится при одном и том же комплексе начальных условий, во-вторых, результатом эксперимента считаются два исхода: событие A появилось и событие A не появилось, причем вероятность появления события A равна p и не зависит от номера испытания (испытания Бернулли).

Частота должна быть **устойчива**, то есть при достаточно большом числе испытаний значения частоты подвержены малым колебаниям, которые тем меньше, чем больше число испытаний.

Определение. Число p, к которому сходится частота при неограниченном увеличении числа испытаний, называется **статистической** вероятностью, то есть

$$p = \lim_{n\to\infty} W_n(A), \tag{1.3}$$

Часто случайное событие определяют как событие, которое может произойти или не произойти. Это создает ложное ощущение того, что у любого случайного события есть вероятность. Отсюда следует, что теория вероятностей есть наука, которая может все. Однако это не так.

Наука предпочитает эксперименты, результат которых однороден, то есть в результате опыта всегда наступает или не наступает интересующее нас событие. Полной однородности результатов трудно добиться, однако к этому необходимо стремиться.

С точки зрения современной теории вероятностей можно изучать только такие случайные события, которые связаны со статистически однородными экспериментами.

Достичь статистическую однородность можно, если предположить **независимость** результатов повторных испытаний. Ясно, что экспериментальная проверка независимости возможна, но никогда не бывает полной. Например, при проведении опытов, зависящих от времени, проверить результат невозможно, если не оставить часть результатов опытов на проверку.

Для того чтобы формула (1.3) имела смысл, необходимо, чтобы любой результат опыта можно было **повторить**. Поскольку в точности повторить опыт невозможно, необходимо, чтобы все повторные наблюдения казались нам **одинаковыми**. Причем каждый новый результат наблюдения являлся следствием одинаковых начальных условий и одних и тех же начальных знаний.

Подведем итоги. Чтобы вычислить вероятность события статистическим методом необходимо:

1) быть уверенным в том, что вероятность события существует;

2) провести достаточное число повторных независимых испытаний;

3) вычислить частоту;

4) учесть, если это возможно, субъективный фактор;

5) за вероятность события A принять либо значение частоты, либо число близкое к нему.

Замечание. Полученные числовые значения вероятностей в формулах (1.1)-(1.3) относятся к математической статистике, а не к теории вероятностей, поскольку задачей теории вероятностей является вычисление вероятностей одних событий по известным вероятностям других событий.

1.4. Условная вероятность. Формула полной вероятности

Пусть дано вероятностное пространство (Ω, p) и $A, B \subset \Omega$.

Определение. Число $P\{A/B\}$, определяемое по формуле (1.4), называется условной вероятностью:

$$P\{A/B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}},\ P\{B\} \neq 0. \tag{1.4}$$

Формула (1.4) ниоткуда не следует, а является следствием здравого смысла. Символ $\{A/B\}$ озвучивается как «событие *A* произойдет при условии, что событие *B* уже произошло».

Условная вероятность выражает долю участия события *A* в реализации события *B*.

Теорема (*умножения вероятностей*), $\forall A_i \subset \Omega$, $i = 1,2,...,n$, имеет место

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} = P\{A_i\} \cdot P\{A_2 / A_1\} \cdot \ldots \cdot P\left\{A_n \middle/ \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right\}.$$

В частности, $\forall A, B \subset \Omega$,

$$P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B / A\}. \tag{1.5}$$

Из формулы (1.5) следует, что события *A*, *B* - независимы, если

$$P\{A\} = P\{A/B\}.$$

Замечание. Независимость случайных событий в теории вероятностей относится к её фундаментальным понятиям и во многих случаях определяется практическими соображениями. Понятие независимости событий шире понятия обычной независимости. Принято считать, что события *A* и *B* независимы, если они не связаны причинно либо их связь несущественна. Например, пусть события *A* и *B* зависимы, причем $P\{A\} = 0$ ($A \neq \varnothing$), то $P\{A \cap B\} = 0$ и, тем самым, $P\{A\bigcap B\}=P\{A\}\cdot P\{B\}$, то есть в вероятностном смысле события A и B независимы.

Заставляет задуматься над независимостью случайных событий и свойства независимости, которые сразу следуют из определения 1:

1) $\forall(A\subset\Omega)) \Rightarrow (A$ и Ω - независимы);

2) $\forall(A\subset\Omega)$ и любого $B\subset\Omega$, такого, что $P\{B\}=0$, следует, что A и B независимы;

3) если A и B_i независимы, причем $\forall i\neq j$ $(B_i\bigcap B_j=\varnothing)$, то A и $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$ независимы;

4) A независимо с A, если либо $P\{A\}=0$, либо $P\{A\}=1$.

Теорема (*о полной вероятности*): пусть имеем вероятностное пространство (Ω,p) и события $B,A_i\subset\Omega$, $i=1,2,...,n$; события A_i попарно несовместные, то есть $\forall i\neq j$, $A_i\bigcap A_j=\varnothing$, а событие $B\subset\Omega$ происходит с одним и только одним из событий A_i, то есть $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A_i\bigcap B)$, тогда имеет место формула **полной** вероятности:

$$P\{B\}=\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}\cdot P\{B/A_i\},$$

при этом

$$P\{B\}\leq\sum_{i=1}^{n}P\{A_i\}\leq 1.$$

1.5. Независимые испытания. Формула Бернулли

Пусть вероятность появления события A в каждом из n ***независимых*** испытаний постоянна и равна p, то есть $P\{A\}=p$, а $P\{\overline{A}\}=q$, где $q=1-p$, причем результатом испытания являются два исхода: событие A появилось или не появилось (такие **независимые испытания** называются **испытаниями Бер-**

нулли [4]). Тогда вероятность $P_n(k)$ - того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \ k = 0,1,...,n, \tag{1.6}$$

где
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \ (k \le n); \ q = 1 - p. \tag{1.7}$$

Из формулы (1.6) следует, что $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$.

В частности, вероятность $P_{n\ge1}(k) = P_n \quad (1 \le k \le n)$, означающая появление события A хотя бы раз, находится из формулы: $P_{\ge1}(k) + P_n(0) = 1$ или

$$P_{\ge1}(k) = 1 - q^n. \tag{1.8}$$

Среди вероятностей $P_n(k)$ существует наибольшая, при некотором $k = k_0$. Значение k_0 называют **наивероятнейшим** числом появления события A в n испытаниях и находят по формуле:

$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)\cdot p], & \text{если } (n+1)\cdot p \text{ - не целое,} \\ n\cdot p, \ (n+1)\cdot p, & \text{если } (n+1)\cdot p \text{ - целое,} \end{cases}$$

где $[x]$ - целая часть числа $x \in R$.

Если p мало (обычно $p \le 0{,}1$), а n велико и $n \cdot p = \lambda$ не мало и не велико ($\lambda < 20$), то для вычисления по формуле Бернулли используют приближенную формулу Пуассона:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \ \lambda = np. \tag{1.9}$$

Функция $V_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ называется функцией Пуассона; она табулирована. Для некоторых λ значения функции приведены в приложении 1 (см. с. 99).

Если $p \to \dfrac{1}{2}$ и $n > 10$, то используют приближенную **формулу Муавра-Лапласа:**

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2),\ \text{а}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\varphi(x)$ называется функцией Гаусса. Ее значения приведены в приложении 2 (см. с. 100).

Для подсчета вероятности того, что значения $k\in[k_1,k_2]$, $0\le k_1\le k_2\le n$, используют приближенную интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P\{k_1\le k\le k_2\}\approx\Phi(b)-\Phi(a),$$

где $\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$, а $b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ называется функцией Пуассона, а ее значения для $x\le 0$ приведены в приложении 3 (см. с. 101).

Замечание. Часто вместо функции $\Phi(x)$ используют функцию $\Phi^*(x)=\int\limits_{0}^{x}\varphi(t)dt$. Она нечетная, то есть $\Phi^*(x)=-\Phi^*(-x)$. Таблицу достаточно составить для значений $x>0$. [6].

Замечание. Формула Бернулли (1.9) важна как в теоретических исследованиях, так и в приложениях, поскольку условие независимости испытаний является фундаментальным в математической статистике. Кроме того, функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ имеют очень важное самостоятельное значение, поскольку являются непрерывным аналогом формулы Бернулли.

Замечание. Если о числе *n* испытаний известно, что оно большое, то для подсчета вероятностей в испытаниях Бернулли используют формулу Пуассона (1.9), интерпретируя параметр λ как некоторое среднее значение числа появлений события *A*, например, в единицу времени, которое задается либо заранее, либо вычисляется по экспериментальным данным.

1.6. Случайные величины

Пусть ξ - число появлений события A в n испытаниях, тогда ξ может принимать значения 0, 1, …, n и, тем самым, является функцией $\varphi(\omega)$ элементарных событий $\omega \in \Omega$. Переменная $\xi = \varphi(\omega)$ называется **случайной величиной**.

Случайная величина ξ является естественным обобщением понятия случайного события в том смысле, что если с любым случайным событием $A \subset \Omega$ связана его вероятность $P\{A\}$, то со случайной величиной как функцией от множества случайных событий связано распределение вероятностей этих событий.

Определение. **Измеримая** [4] функция φ, определенная на пространстве элементарных событий Ω, со значениями из R, называется случайной величиной.

Если число значений случайной величины ξ конечно или счетно, то она называется **дискретной**. Если число значений случайной величины принадлежит отрезку или даже всей действительной оси, то она называется **непрерывной**.

В случае для произвольной случайной величины ξ задается функция ее распределения: вероятность того, что случайная величина ξ меньше заданного $x \in R$, то есть

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{1.10}$$

Определение. Переменная ξ называется случайной величиной, если для нее задана функция распределения (1.10).

С введением случайной величины и ее функции распределения под вероятностным пространством будем понимать тройку $(\Omega, \Im, F(x))$, где Ω - числовое пространство, $\mathfrak{I}$ - класс событий из Ω, для которого любая часть $\mathfrak{I}$ есть событие.

1.6.1. Свойства функции распределения

Пусть $F(x)$ - функция распределения случайной величины ξ, тогда имеют место:

1) монотонность: $\forall(x_1 \le x_2) \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;

2) непрерывность слева: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

5) не более чем счетное число разрывов первого рода.

Любая функция, удовлетворяющая условиям 1)-5), удовлетворяет и формуле (1.10). Справедливо обратное.

Определение. Функция $\rho(x)$ называется плотностью, если она удовлетворяет условиям:

1) $\rho(x) \geq 0$, $\forall x \in R$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$.

Замечание. Если функция распределения есть вероятность и по определению безразмерна, то плотность имеет размерность, обратную времени $[1/\mathit{вр}]$.

Плотность является непрерывным аналогом закона распределения дискретной случайной величины.

Если для случайной величины задана плотность распределения вероятностей, то функция распределения находится по формуле:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t) dt \, . \tag{1.11}$$

Такая случайная величина называется непрерывной.

Некоторые важные свойства функции распределения и плотности:

1) $F'(x) = \rho(x)$;

2) $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a)$, в частности, $P\{\xi = a\} = F(a+0) - F(a-0)$;

3) $P\{x \leq \xi \leq x + dx\} = \rho(x) dx$.

1.6.2. Примеры распределений

1. Распределения дискретных случайных величин:

1) **Вырожденное** распределение $I(A)$ (индикатор события A):

$$I(A)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \omega \in A,\\ 0, & \text{если} \quad \omega \notin A.\end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x \le a,\\ 1, & \text{если} \quad x > a.\end{cases}$$

2) **Биномиальное** распределение.

Распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \; k = 0,1,\dots,n.$$

Функция распределения определяется формулой:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0,\\ \sum\limits_{k<x} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & 0 < x \le n,\\ 1, & x > n.\end{cases}$$

3) Распределение **Пуассона**.

Распределение вероятностей случайной величины ξ имеет вид:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \; k = 0,1,\dots, \; \lambda > 0 - const.$$

Функция распределения записывается в виде:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0,\\ \sum\limits_{k<x} \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, & x > 0.\end{cases}$$

4) **Геометрическое** распределение.

Пусть случайная величина ξ задана распределением вероятностей

$$P\{\xi = k\} = q \cdot p^k, \; q = 1 - p, \; k = 0,1,\dots,$$

функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0,\\ \sum\limits_{k<x} q \cdot p^k, & x > 0.\end{cases}$$

2. Распределения непрерывных случайных величин:

1) **Равномерное** на $[a,b]$ распределение.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

2) **Показательное** (экспоненциальное) распределение.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}; & x>0,\quad \lambda>0.\end{cases}$$

Если x интерпретировать как время, то функцию $F(x)=1-\exp(-\lambda x)$ называют функций **надежности**, а параметр $\lambda>0$ - **интенсивностью**.

3) **Нормальное** распределение.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left((y-a)^2/2\sigma^2\right)dy\,,\ \sigma>0\,,\ a-const\,.$$

Для непрерывных случайных величин легко получить плотность, если воспользоваться формулой: $\rho(x)=F'(x)$.

В инженерных расчетах более популярна плотность, поскольку она геометрически более наглядна. Часто плотность называют законом распределения.

Плотность равномерного на $[a,b]$ распределения (рис. 1.1)

$$\rho(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b];\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b].\end{cases}$$

Отсутствие точек перегиба у плотности (рис. 1.2) не позволяет напрямую использовать ее для описания волнообразных случайных величин.

Плотность нормального распределения

$$\rho_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,.$$

На рис. 1.3 представлены графики плотности при $\sigma=0{,}5;\ 1;\ 2$. Точки $a\pm\sigma$ являются точками перегиба. Наличие двух параметров a, σ существенно расширяет область применения нормального распределения в ряду других.

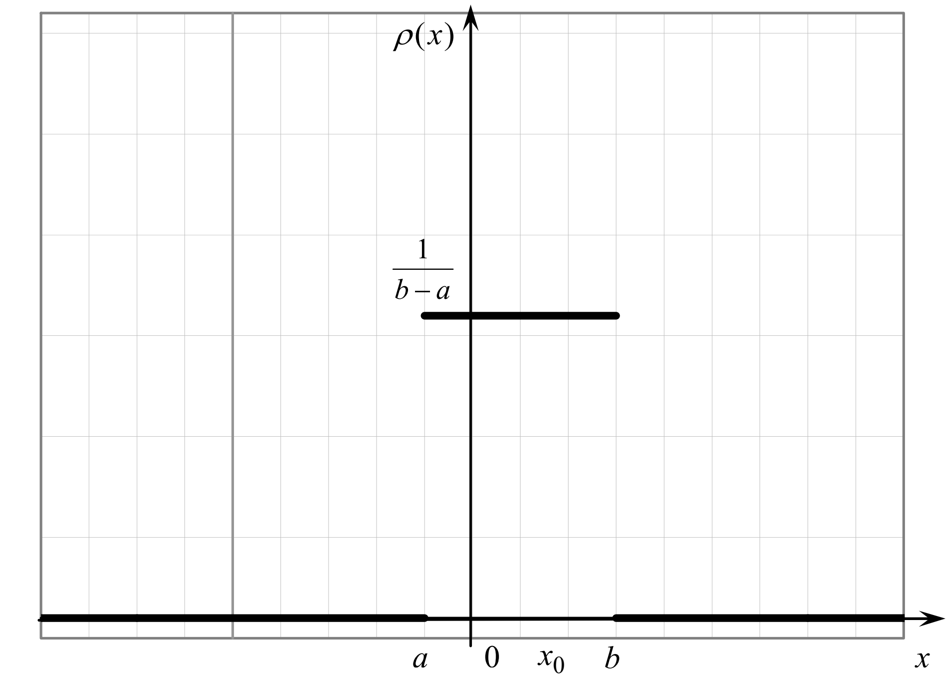

Рис. 1.1

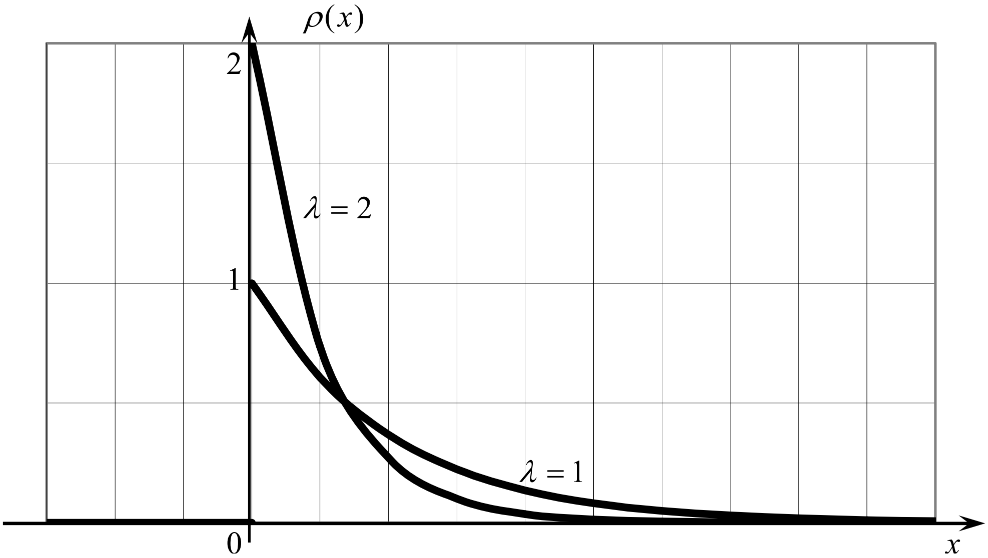

Рис. 1.2

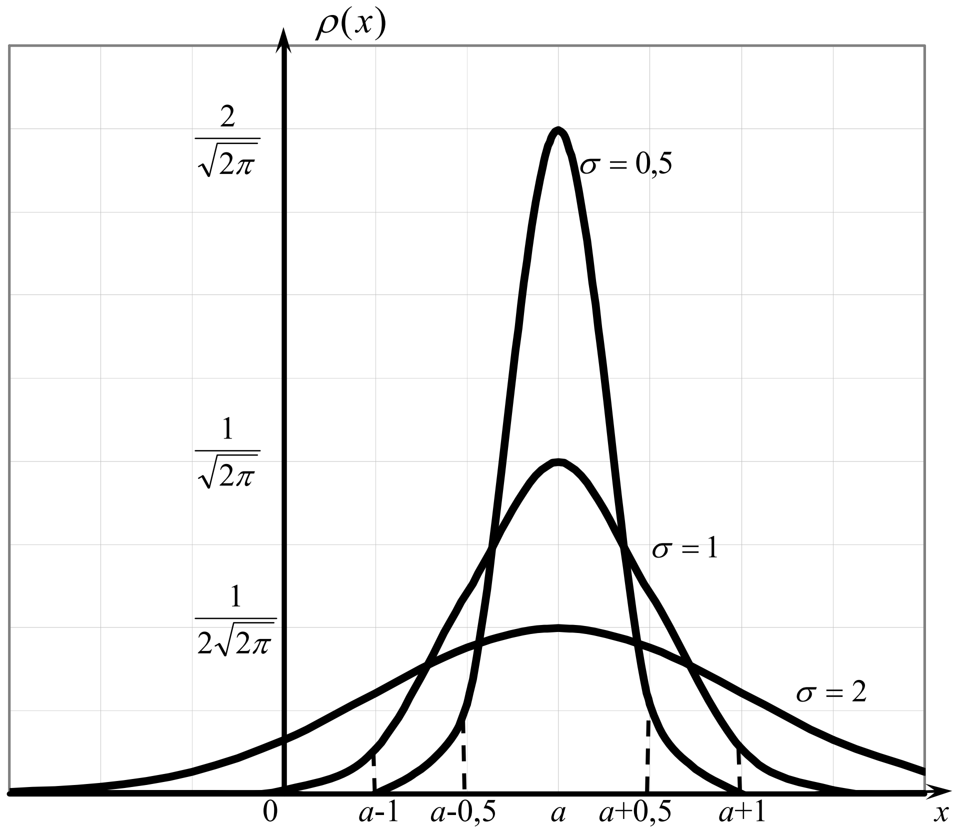

Рис. 1.3

1.7. Числовые характеристики случайных величин

При рассмотрении функций распределения и плотностей нам встречались постоянные (параметры). Эти постоянные являются не только характеристиками заданных функций, но и имеют важное самостоятельное значение как числовые характеристики случайных величин.

Пусть задана последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Определение. Средневзвешенным называется число

$$b = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot a_i ,$$

где

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,$$

в частности, при $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,...,n$, имеем

$$a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$ - среднеарифметическое.

Пусть дискретная случайная величина ξ задана законом распределения (см. таблицу).

Таблица

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

$$\left(\sum_i p_i = 1 \right)$$

Определение. **Математическим** ожиданием $M\xi$ случайной величины ξ называется ее средневзвешенное значение, то есть

$$M\xi = \sum_i x_i \cdot p_i \,. \tag{1.12}$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части формулы (1.12), сходится.

Пусть случайная величина ξ непрерывна и имеет функцию распределения $F(x)$, тогда ее математическое ожидание определяется по формуле:

$$M\xi = \int_{\Omega'} x dF(x) ,$$

где Ω' - числовое множество (интервал), на которое взаимно-однозначно отображено пространство элементарных событий Ω.

Если существует плотность распределения $\rho(x) = F'(x)$, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \rho(x) dx \,. \tag{1.13}$$

Математическое ожидание существует, если интеграл в формуле (1.13) сходится.

Свойства. Пусть ξ, η - случайные величины и $\alpha, \beta \in R$, тогда

1) $M(\alpha + \beta \cdot \xi) = \alpha + \beta \cdot M\xi$;

2) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$;

3) если $a \le \xi \le b$, то $a \le M\xi \le b$;

3*) $M\xi \le M\,|\,\xi\,|$;

4) если $\xi \ge 0$ и $M\xi = 0$, то $P\{\xi = 0\} = 1$;

5) если ξ, η - независимые, то $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.

Определение. Отклонением случайной величины ξ называется случайная величина

$$\eta = \xi - M\xi .$$

Математическое ожидание отклонения равно нулю. В самом деле, имеем

$$M\eta = M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0 .$$

С механической точки зрения математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести.

Определение. Средневзвешенное значение квадрата отклонения случайной величины ξ называется ее дисперсией

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 . \tag{1.14}$$

Дисперсия характеризует меру разброса около среднего значения.

Преобразуя формулу (1.14), будем иметь

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + M^2\xi$ или

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi , \tag{1.15}$$

что эквивалентно формуле (1.14).

Замечание. Дисперсию можно определить как $\min\limits_a M(\xi - a)^2$.

В самом деле, имеем $D\xi = M\xi^2 + a^2 - 2a \cdot M\xi$, тогда $(M\xi^2 + a^2 - 2a \cdot M\xi)'_a = 2a - 2 \cdot M\xi = 0$, минимум достигается в точке $a = M\xi$. Это означает, что число $a = M\xi$ является наилучшей оценкой в среднем случайной величины.

Для практического применения дисперсии используется среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Замечание. Для среднего квадратичного отклонения не выполняется свойство аддитивности (сложения). Поэтому в теоретических исследованиях используется дисперсия, которая этим свойством обладает. Свойства среднего квадратичного отклонения обычно не рассматривают.

Свойства дисперсии. Пусть ξ, η - случайные величины и $\alpha, \beta \in R$, тогда

1) $D\xi \geq 0$;

2) $D\xi = 0$ тогда и только тогда, когда $P\{\xi = \alpha\} = 1$;

3) $D(\alpha + \beta \cdot \xi) = \beta^2 \cdot D\xi$;

4) если ξ, η - независимые, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

Очевидным является распространение свойств $M\xi$ и $D\eta$ на произвольное число случайных величин.

Относительно случайных величин ξ, η можно считать, что они могут быть независимы, зависимы функционально $\eta = f(\xi)$, зависимы через случайную зависимость. Качественную (линейную) зависимость между случайными величинами ξ, η обычно пытаются найти с помощью коэффициента **корреляции.**

Определение. Случайная величина ξ называется нормированной, если $M\xi = 0$, $D\xi = 1$; любую случайную величину можно нормировать преобразованием:

$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}. \tag{1.16}$$

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ, η называется число

$$r(\xi, \eta) = M(\xi^* \cdot \eta^*),$$

где
$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}, \ \eta^* = \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}.$$

Свойства:

1) $|r(\xi, \eta)| \leq 1$;

2) если ξ, η - независимые, то $r(\xi, \eta) = 0$;

Определение. Если $r(\xi, \eta) = 0$, то случайные величины ξ, η называются некоррелированными.

3) $|r(\xi,\eta)|=1$ тогда и только тогда, когда $\eta=\alpha+\beta\cdot\xi$, то есть $\xi,\ \eta$ - линейно зависимы.

Пусть случайная величина $\xi\geq 0$, тогда $\forall\varepsilon>0$,

$$P\{\xi\geq\varepsilon\}\leq\frac{M\xi^k}{\varepsilon^k},\ k\in N. \tag{1.17}$$

Формула (1.17) называется неравенством Маркова.

Из формулы (1.17) следует, что если $q(\xi)\geq 0$ и монотонно возрастает, то

$$P\{\xi\geq\varepsilon\}\leq\frac{M(q^k(\xi))}{q^k(\varepsilon)}.$$

Если случайная величина ξ имеет дисперсию, то

$$P\{|\,\xi-M\xi\,|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D\xi}{\varepsilon^2}\ \text{или}\ P\{|\,\xi-M\xi\,|\leq\varepsilon\}\geq 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2},\ \forall\varepsilon>0. \tag{1.18}$$

Неравенство (1.18) называется неравенством Чебышева.

С помощью неравенства Чебышева можно оценивать отклонения случайной величины ξ, не зная ее функцию распределения, а имея лишь $M\xi$, $D\xi$.

Теорема (*закон больших чисел*): пусть $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$ - последовательность независимых случайных величин с дисперсиями $D\xi_i$, $i\in N$, ограниченными в совокупности, тогда

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|>\varepsilon\right\}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}D\xi_i}{n\cdot\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{1.19}$$

Физический смысл закона больших чисел состоит в следующем: так как математическое ожидание для любой случайной величины есть число, то среднеарифметическое математических ожиданий тоже число и из формулы (1.19) следует, что совокупное действие большого числа случайных величин ведет себя не случайно.

Последнее означает, что при определенных условиях чем больше информации мы имеем об объекте, тем точнее можем предсказать его поведение.

2. Элементы математической статистики

Статистика (*status* - состояние) обычно включает разделы:

1) **сбор** сведений (результатов эксперимента) о свойствах отдельных элементов массовых явлений;

2) **исследование** этих сведений, выявление закономерностей;

3) разработку **приемов** и **методов** исследования результатов эксперимента и **прогноз**.

Математическая статистика в основном имеет отношение к третьему разделу, который в свою очередь состоит: а) из оценки неизвестной функции распределения; б) оценки неизвестных параметров распределения, в) проверки гипотез.

2.1. Оценка функции распределения

Пусть имеем множество Γ, состоящее из конечного или бесконечного числа однородных элементов ω, каждый из которых обладает своим **индивидуальным** свойством, представленным количественно, то есть в числовой интерпретации. Мы рассматриваем конечные подмножества множества Γ и делаем выводы относительно всего множества.

Числовое множество Γ называется **генеральной** совокупностью, его элементы (числа) - точками, а подмножества, состоящие из k элементов, - **вариационным** рядом. Это фундамент математической статистики, аналогичной пространству Ω элементарных событий теории вероятностей.

Для того чтобы иметь представление о целом (то есть о генеральной совокупности) по его части (то есть о вариационном ряде), мы должны быть уверены в том, что эта часть должна быть выбрана так, чтобы отражала все **основные** свойства целого, то есть была **репрезентативна**. Если мы заранее не знаем свойства целого, то считаем, что при построении подмножеств каждый элемент генеральной совокупности имеет одинаковую вероятность попасть в это подмножество (простой случайный выбор).

Таким образом, исходным пунктом статистического исследования является выбор элементов из генеральной совокупности. Результаты n экспериментов называются **выборкой** объема n,

$$x_1, x_2, ..., x_n. \tag{2.1}$$

Замечание. Выборка из генеральной совокупности существенно отличается от построения подмножества, так как элементы в выборке могут повторяться, а в подмножестве каждый элемент обладает своим качеством.

Выберем из выборки (2.1) элементы в порядке неубывания $x'_1 \le x'_2 \le ... \le x'_n$.

Полученная совокупность

$$x'_1, x'_2, ..., x'_n \tag{2.2}$$

называется **вариационным** рядом (что аналогично подмножеству множества *Г*). Пусть в выборке (2.2) k различных элементов x_{i_r}, $r = 1,2,...,k$, причем $x_{i_1} < x_{i_2} < ... < x_{i_k}$. Элементы выборки x_{i_r} называются **признаками (вариантами)**. Обозначим через m_r число повторений признака r, тогда выборку (2.2) можно представить в виде простой статистической таблицы 2.1. Число m_r называют **абсолютной** частотой признака x_{i_r}.

Таблица 2.1

x	x_{i_1}	x_{i_2}	…	x_{i_k}
m	m_1	m_2	…	$m_к$

$$\left(\sum_{r=1}^{k} m_r = n \right)$$

Как правило, таблица 2.1 составляется для дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин используется интервальная статистическая таблица 2.2. Для этого весь диапазон значений случайной величины ξ разбивают на k интервалов (не всегда равной длины).

Таблица 2.2

$[x_{i_r}, x_{i_{r+1}})$	$[x_{i_1}, x_{i_2})$	$[x_{i_2}, x_{i_3})$	$\dots$	$[x_{i_{k-1}}, x_{i_k})$	$[x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$
W	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	$\dots$	$\frac{m_{k-1}}{n}$	$\frac{m_k}{n}$

Величина $W_r = \frac{m_r}{n}$ называется относительной частотой; безусловно, что $\sum_{r=1}^{k} W_r = 1$.

Если выборка (2.1) достаточно большого объема и репрезентативна, то для исследуемой случайной величины ξ можно построить **эмпирическую** функцию распределения $\widetilde{F}_n(x)$, которая имеет вид:

$$\widetilde{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x < x_{\min}, \\ \frac{k}{n}, & \text{для } x_{\min} < x < x_{\max}, \\ 1, & \text{для } x < x_{\min}, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $k = \sum_{x_i < x} m_i$, m_i - число элементов x_i выборки меньших x, $x_{\min} = x'_1$, $x_{\max} = x'_n$.

Если случайная величина ξ - непрерывна, то эмпирическая функция может быть определена как

$$\widetilde{F}_n(x) = \sum_{x < x_{i_r}} W_r . \tag{2.4}$$

Ясно, что $\widetilde{F}_n(x_{\max} + \varepsilon) = \sum_{r=1}^{k} W_r = 1$, $\varepsilon > 0$.

Для оценки адекватности эмпирической функции распределения $\widetilde{F}_n(x)$ теоретической $F(x)$ используют критерий А.Н. Колмогорова. [8].

Теорема: если функция $F(x)$ непрерывна, то при $n \to \infty$

$$P\left\{D_n < \frac{z}{\sqrt{n}}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} k(z),$$

где $D_n = |\widetilde{F}_n(x) - F(x)|$, $k(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \le 0, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \cdot \exp(-2k^2 \cdot z^2), & \text{при } z > 0. \end{cases}$

Функция $k(z)$ называется функцией Колмогорова [4, 8]. Ее значения табулированы и приведены в приложении 4 (см. с. 103).

Пусть требуется проверить гипотезу H_0 о том, что случайная величина ξ имеет **непрерывную** функцию $F(x)$ своей функцией распределения. Проведем *n* независимых испытаний и построим эмпирическую функцию $\widetilde{F}_n(x)$. Согласно теореме Гливенко [8] $\widetilde{F}_n(x)$ есть приближение к функции $F(x)$.

Величина D_n есть мера отклонения $\widetilde{F}_n(x)$ от $F(x)$. Пусть $\alpha > 0$ и z_0 такие, что $P\{D_n \ge \lambda_0\} = \alpha$, где $\lambda_0 \cdot \sqrt{n} = z_0$. Если можно считать, что в единичном испытании практически невозможно произойти событию, вероятность которого равна α (обычно $\alpha < 0{,}2$), то приходим к следующему критерию проверки гипотезы H_0 (критерий Колмогорова).

Выдвигаем гипотезу H_0: $F(x)$ является функцией распределения исследуемой случайной величины ξ. Далее последовательно

1) находим $D_n = \max\limits_x |\widetilde{F}_n(x) - F(x)|$;

2) вычисляем $z_0 = D_n \cdot \sqrt{n}$;

3) по таблице находим $k(z_0) = \alpha_0$;

4) если α_0 достаточно велико ($\alpha_0 > \alpha$), то гипотезу H_0 принимаем (то есть она не противоречит опытным данным).

Критерий Колмогорова обладает наглядностью и простотой, однако, для его применения необходимо знать не только вид теоретической функции распределения, но и значения всех, входящих в нее, параметров. Кроме того, его применение ограничено непрерывными распределениями.

Другим критерием проверки гипотезы о соответствии эмпирической функции распределения теоретической является **критерий** χ^2 (критерий Пирсона).

Пусть имеем таблицу 2.2 (см. с. 29). Требуется проверить согласование экспериментальных данных с гипотезой о том, что случайная величина ξ имеет теоретическое распределение $F(x)$.

Находим теоретические вероятности попадания случайной величины ξ в каждый интервал из таблицы 2.2:

$$p_1, p_2, ..., p_k.$$

Меру расхождения χ^2 вычисляем по формуле Пирсона:

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(W_i - p_i)^2}{p_i}.$$

Распределение χ^2 зависит от объема выборки *n* и числа степеней свободы *r*, $\chi^2 = \chi^2(n, r)$. Соответствующие таблицы значений распределения χ^2 приведены в приложении 5 (см. с. 105).

Во всех случаях имеем одно ограничение: $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$, значит, число степеней свободы $r = n - 1$. Если в теоретическом распределении присутствует один параметр (например, $a = M\xi$) и его значение известно, то число степеней свободы $r = n - 2$. Если - два параметра (например: $a = M\xi$, $\sigma = \sqrt{D\xi}$), то число степеней свободы $r = n - 3$ и т. д.

Замечание. Число степеней свободы может быть уменьшено на единицу и в случае, если значение параметра теоретического распределения получено из другой выборки.

Схема применения критерия χ^2:

1) определяем число степеней свободы: $r = n - s$ (s - число ограничений);

2) вычисляем меру расхождения: $\chi_0^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(W_i - p_i)^2}{p_i}$;

3) по числу степеней свободы находим наиболее близкое значение $\chi^2(r,p) > \chi_0^2$ (см. приложение 5, с. 105);

4) если табличному числу $\chi^2(r,p)$ соответствует вероятность p достаточно большая (>0,2), то гипотеза принимается как не противоречащая опытным данным.

Для применения критерия Пирсона желательно иметь достаточно большой объем выборки, его использование по сравнению с критерием Колмогорова громоздко. Тем не менее, критерий Пирсона обладает преимуществами: во-первых, он применим к любым видам распределения; во-вторых, числовые значения параметров теоретической функции распределения можно получить из имеющейся выборки, то есть заранее нам достаточно знать общий вид теоретической функции распределения. Критерий Колмогорова в этом смысле более узкий. Желательно при проверке гипотезы о соответствии теоретической функции распределения эмпирическим данным, если это возможно, применять оба критерия.

Задача нахождения теоретической функции распределения требует проведения достаточно большого числа опытов, а также, по крайней мере, знания общего вида искомой функции. Такая ситуация далеко не всегда встречается на практике.

Чаще всего имеется выборка относительно малого объема или вид теоретической функции распределения неизвестен. В этом случае обычно вычисляют числовые характеристики случайных величин (моменты, семиинварианты, вероятности и т. д.).

2.2. Точечные оценки неизвестных параметров законов распределения

В этом разделе мы рассматриваем задачи определения неизвестных параметров законов распределения случайных величин в условиях относительно малых объемов эмпирических данных. Ясно, что каким бы не был объем выборки, значение параметра, который мы оцениваем, будет приближенным. Это приближение называется **оценкой** параметра. Для того чтобы оценка была наилучшей, требуется иметь о ней наиболее полное представление.

Пусть случайная величина ξ распределена по закону, который содержит неизвестный параметр a. Требуется найти для него подходящую оценку $\widetilde{a}$ по выборке (2.1):

$$x_1, x_2, ..., x_n .$$

При выборе условий, налагаемых на оценку $\widetilde{a}$ неизвестного параметра a, прежде мы должны построить математическую модель эксперимента. Под этим мы понимаем следующее:

1) выборка является n-мерным случайным вектором

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n),$$

где случайные величины ξ_i, $i = 1,2,...,n$ определены на одной и той же генеральной совокупности и имеют, соответственно, одну и ту же функцию распределения и, тем самым, одни и те же параметры;

2) выборка репрезентативна, то есть любой элемент генеральной совокупности имеет одинаковую вероятность попасть в выборку.

Таким образом, оценка $\widetilde{a}$ параметра a есть n-мерная неслучайная функция n случайных аргументов ξ_i:

$$\widetilde{a} = \widetilde{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n).$$

Принято считать, что оценка $\widetilde{a}$ должна удовлетворять условиям:

1) **несмещенности**:

$$M(\widetilde{a}) = a,$$

практически это означает, что систематические ошибки отсутствуют;

2) **эффективности:**

оценка $\widetilde{a}$ более эффективна, чем $\widetilde{\widetilde{a}}$, если

$$M(\widetilde{a} - a)^2 < M(\widetilde{\widetilde{a}} - a)^2,$$

эффективность оценки $\widetilde{a}$ означает, что ее дисперсия меньше, чем дисперсия других оценок;

3) **состоятельности:**

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{a}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = a. \qquad (2.5)$$

Состоятельность означает, что для оценки $\widetilde{a}$ выполняется закон больших чисел (обычно это теорема Чебышева или ее следствия).

Замечание. На практике не всегда удается удовлетворить всем этим требованиям по соображениям объективного или экономического характера. Тем не менее, желательно всегда пытаться исследовать оценку на достоверность.

Итак, пусть имеем выборку (2.1). Для оценки математического ожидания $a = M\xi$ случайной величины ξ всем условиям удовлетворяет среднеарифметическая.

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (2.6)$$

Для оценки дисперсии в условиях выборок относительно большого объема используется выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\xi})^2 \qquad (2.7)$$

или

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{\xi}^2. \qquad (2.8)$$

Выборочная дисперсия не удовлетворяет условию несмещенности.

Всем трем условиям удовлетворяет исправленная дисперсия

$$\widetilde{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

или

$$\widetilde{s}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\xi})^2. \qquad (2.9)$$

Ясно, что если выборка имеет достаточный объем (n>50), то использовать можно как формулу (2.7), так и формулу (2.9).

Для оценки среднеквадратичного отклонения наилучшей оценки не найдено. Обычно рассматривают

$$s = \sqrt{s^2} \text{ или } \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}.$$

Для вычисления моментов более высокого порядка можно использовать статистические аналоги, но они с увеличением порядка снижают точность оценки и в большей мере являются качественными оценками, нежели количественными.

Таким образом, в условиях ограниченного объема выборки, мы имеем методику оценки неизвестных параметров распределения. Такая оценка называется **точечной.**

2.3. Доверительный интервал

При применении критерия Колмогорова значения всех параметров теоретической функции распределения должны быть известны. При применении критерия χ^2 для той же функции параметры, если они неизвестны, оцениваются приближенно (например, для экспоненциального распределения, через среднеарифметическое). Естественно возникает вопрос, в каких интервалах могут находиться оцениваемые параметры, чтобы гипотеза о соответствии эмпирической функции распределения теоретической была принята? Кроме того, если оцениваем только параметры, не зная функции распределения, нахождение допустимого интервала очень важно, например, для оценки ошибки принятого точечного значения параметра.

Мы приходим к задаче нахождения случайного интервала, покрывающего теоретический параметр. Прежде всего на действительной прямой следует найти точку, являющуюся серединой случайного интервала. В идеале это значение теоретического параметра, но оно нам неизвестно. Тогда берем такую точечную оценку $\tilde{a}$, которая была бы наилучшим приближением к теоретическому параметру a (например, для оценки математического ожидания берут среднеарифметическое). Затем находим границы интервала $(\tilde{a} - \varepsilon, \tilde{a} + \varepsilon)$.

Значения ε также случайны, следовательно, следует задать γ - вероятность того, что наш случайный интервал покрывает теоретический параметр a. Итак, имеем уравнение:

$$P\{|\tilde{a} - a| < \varepsilon_\gamma\} = \gamma . \tag{2.10}$$

Задача решалась бы просто, если бы был известен закон распределения оценки $\tilde{a}$, который на самом деле неизвестен. Однако если оценивается математическое ожидание и дисперсия, а число опытов $n > 20$, то для них, в силу центральной предельной теоремы [8], считают закон распределения средней арифметической $\bar{\xi}$ и дисперсии $\tilde{s}^2$ нормальным, тогда имеем из уравнения (2.10) следующее:

$$P\{|\bar{\xi} - M\xi| < \varepsilon_\gamma\} = \gamma .$$

Так как $\bar{\xi}$ распределена нормально, то

$$\gamma = 1 - 2 \cdot \Phi\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{\tilde{s}}\right), \tag{2.11}$$

где $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt .$$

В уравнении (2.11) одно неизвестное ε_γ, которое легко найти. Тогда доверительный интервал будет иметь вид:

$$\bar{\xi} - \varepsilon_\gamma < M\xi < \bar{\xi} + \varepsilon_\gamma . \tag{2.12}$$

Аналогичным образом можно получить доверительный интервал для дисперсии.

$$\tilde{s}^2 - \varepsilon_\gamma < D\xi < \tilde{s}^2 + \varepsilon_\gamma \tag{2.13}$$

В целях удобства вычисления доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии вместо уравнений (2.12) и (2.13) рассматривают интервалы:

1) $\bar{\xi} - t_\gamma \cdot \sigma_{\bar{\xi}} < M\xi < \bar{\xi} + t_\gamma \cdot \sigma_{\bar{\xi}}$; (2.14)

где $t_\gamma = \arg\Phi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$, а $\sigma_{\bar{\xi}} = \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}} = \frac{\tilde{s}}{\sqrt{n}}$ ($\arg x$ - аргумент x);

2) $\tilde{s}^2 - t_\gamma \cdot \sigma_{\tilde{s}^2} < D\xi < \tilde{s}^2 + t_\gamma \cdot \sigma_{\tilde{s}^2}$, (2.15)

где $\sigma_{\tilde{s}^2} = \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \cdot \tilde{s}$.

Итак, если число испытаний $n > 20$, то для оценки математического ожидания и дисперсии доверительные интервалы находятся по формулам (2.12) и (2.13) или (2.14) и (2.15) с удовлетворительной для практики точностью.

Более точные методы **требуют** для построения доверительных интервалов знать **заранее** вид закона распределения исследуемой случайной величины ξ.

Предположение о нормальности закона распределения произвольной случайной величины далеко не всегда оправдано даже при больших выборках. В некоторых случаях удается построить доверительный интервал относительно точно, если заменить закон распределения случайной величины ξ, содержащий неизвестные параметры, на достаточно близкий к ней закон распределения, этих параметров не содержащий. Рассмотрим подробнее случай только нормально распределенной случайной величины с неизвестными параметрами a и σ. Для этого потребуются следующие распределения:

1) **Распределение Стьюдента** (Госсетта). Плотность распределения Стьюдента (или t-распределения) с $(n-1)$ степенью свободы:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot (n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad t \in R, \tag{2.16}$$

Доказано, что если ξ - нормально распределенная случайная величина, то случайная величина $\eta = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\bar{\xi} - M\xi}{\sqrt{\tilde{s}^2}}$ подчинена закону (2.16).

2) **Распределение χ^2**. Плотность распределения χ^2 с $(n-1)$ степенью свободы:

$$\nu_{n-1}(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \left(2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1}\cdot x^{\frac{n-1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}, & \text{при } x>0.\end{cases} \qquad (2.17)$$

Данное распределение имеет случайная величина $\eta=\dfrac{(n-1)\cdot\tilde{s}^2}{D\xi}$, где $\tilde{s}^2$ - исправленная дисперсия нормально распределенной случайной величины ξ.

Легко заметить, что распределение Стьюдента (2.16) можно использовать при построении доверительного интервала для математического ожидания, а распределение χ^2 (2.17) - при построении доверительного интервала для дисперсии.

В самом деле, пусть доверительные интервалы для $M\xi$ и $D\xi$ определяются доверительной вероятностью β.

Построим доверительный интервал для $M\xi$. Возьмем его симметричным относительно $\bar{\xi}$, взяв ε_β за половину длины интервала. Ясно, что величина ε_β удовлетворяет равенству:

$$P\{|\bar{\xi}-M\xi|<\varepsilon_\beta\}=\beta.$$

Переходя от случайной величины $\bar{\xi}$ к случайной величине η, распределенной по закону Стьюдента, получим:

$$P\{|\eta|<t_\beta\}=\beta,$$

где $t_\beta=\sqrt{n}\cdot\varepsilon_\beta/\sqrt{\tilde{s}^2}$.

Значение t_β найдем из условия (с учетом четности функции $S_{n-1}(t)$):

$$2\cdot\int_0^{t_\beta}S_{n-1}(t)dt=\beta. \qquad (2.18)$$

При различных значениях доверительной вероятности β и числе испытаний n, значения t_β табулированы (см. приложение 6, с. 107).

Таким образом, из условий:

$$|\bar{\xi}-M\xi|<\varepsilon \text{ и } t_\beta=\sqrt{n}\cdot\varepsilon_\beta/\sqrt{\tilde{s}^2}$$

получаем доверительный интервал для оценки математического ожидания случайной величины ξ:

$$\bar{\xi} - t_\beta \cdot \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}} < M\xi < \bar{\xi} + t_\beta \cdot \sqrt{\frac{\tilde{s}^2}{n}} \,. \tag{2.19}$$

Для оценки дисперсии рассмотрим распределение χ^2 для случайной величины $\eta = \dfrac{(n-1) \cdot \tilde{s}^2}{D\xi}$. Зная закон распределения η, можно найти доверительный интервал, в который случайная величина η попадает с вероятностью β.

Плотность $v_{n-1}(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.1.

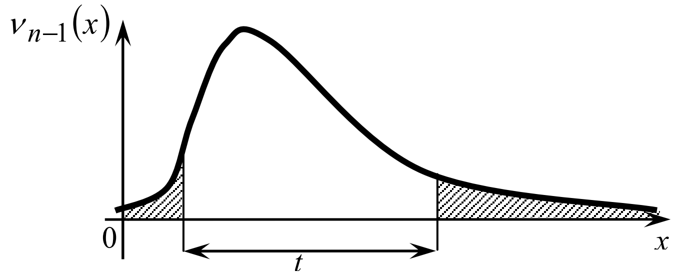

Рис. 2.1

Выбрать интервал t_β так, как для оценки математического ожидания, мы не можем, поскольку распределение χ^2 - не симметрично. Будем выбирать интервал t_β таким образом, чтобы вероятности выхода случайной величины η за пределы интервала влево и вправо (заштрихованные области на рис. 2.1) были одинаковы и равны.

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2}$$

Построение интервала с таким свойством сводится к выполнению следующего условия:

$$P\{\eta > \chi^2\} = p \,, \tag{2.20}$$

где случайная величина η имеет распределение χ^2 с r степенями свободы. При числе степеней свободы $r = n-1$ находим два значения χ^2 из уравнения:

$$\int_0^{\chi^2} v_{n-1}(x)dx = p\,,$$

1) для левого конца интервала (рис. 2.1) при $p = \alpha/2$ имеем $\chi^2 = \chi_1{}^2$;

2) для правого конца интервала при $p = 1-\alpha/2$ имеем $\chi^2 = \chi_2{}^2$.

Значения χ^2 табулированы (см. приложение 5, с. 105).

Из формулы (2.17), учитывая, что $\eta = \dfrac{(n-1)\cdot\tilde{s}^2}{D\xi}$, и (2.20), получаем:

1) для левого конца $\eta = \dfrac{(n-1)\cdot\tilde{s}^2}{D\xi} < \chi_1{}^2$;

2) для правого конца $\eta = \dfrac{(n-1)\cdot\tilde{s}^2}{D\xi} > \chi_2{}^2$.

Окончательно доверительный интервал для оценки дисперсии имеет вид:

$$\frac{(n-1)\cdot\tilde{s}^2}{\chi_1{}^2} < D\xi < \frac{(n-1)\cdot\tilde{s}^2}{\chi_2{}^2}\,. \tag{2.21}$$

2.4. Проверка статистической однородности

Теория вероятностей изучает такие события, результат которых устойчив, или, что тоже самое, статистически однороден. Как определить, достигли мы желаемого результата после проведенной серии экспериментов или нет? Следует ли провести еще одну серию, чтобы закрепить свои предположения? Ясно, что исчерпывающего ответа на эти вопросы получить нельзя.

Однако некоторые оценки сделать можно, если использовать центральную предельную теорему [8], суть которой в следующем: если даны n случайных величин, сравнимых по своему рассеиванию (со сравнимыми средними), то их сумма имеет распределение, близкое к нормальному (то есть ведет себя неслучайно).

Пусть имеем вероятностное пространство $(\Omega, F_\xi(x))$, в котором случайная величина ξ нормально распределена ($M\xi = 0$, $D\xi = 1$) и задан n-мерный случайный вектор $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, где случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ определены на том же вероятностном пространстве, что и ξ, то есть имеют одну и ту же функцию распределения $F_\xi(x)$.

Поставим задачу. Проведено две серии экспериментов: в первой серии из n_1 экспериментов событие A появилось μ_1 раз, а во второй серии из n_2 экспериментов событие A появилось μ_2 раз. Можно ли предполагать, что вероятность события A одинакова в обоих случаях?

Пусть в первой серии $P\{A\} = p_1$, а во второй $P\{A\} = p_2$. Верна ли гипотеза $H_0:\ p_1 = p_2$?

Для ответа на вопрос необходимо, чтобы разность частот $\delta = \dfrac{\mu_1}{n_1} - \dfrac{\mu_2}{n_2}$ была достаточно мала, тогда ее можно объяснить случайными причинами. Если ошибка δ в самом деле мала, то естественно предположить, что случайные величины μ_1 и μ_2 распределены нормально, то есть при $p_1 = p_2$ будем иметь $M\delta = M\left(\dfrac{\mu_1}{n_1}\right) - M\left(\dfrac{\mu_2}{n_2}\right) = 0$.

Если считать, что серии опытов независимы, то δ имеет распределение, близкое к нормальному, у которого $M\delta = 0$ и $M\delta = D\left(\dfrac{\mu_1}{n_1}\right) + D\left(\dfrac{\mu_2}{n_2}\right)$.

Если значение $D\delta$ известно, то по таблице для нормального распределения можно получить ответ на вопрос.

Серии опытов, в силу предположения, будем считать сериями испытаний Бернулли, тогда если $p_1 = p_2 = p$, то

$$D\left(\frac{\mu_1}{n_1}\right) + D\left(\frac{\mu_2}{n_2}\right) = \frac{1}{n_1^{\,2}} \cdot D\mu_1 + \frac{1}{n_2^{\,2}} \cdot D\mu_2 = \frac{p_1 \cdot (1 - p_1) \cdot n_1}{n_1^{\,2}} + \frac{p_2 \cdot (1 - p_2) \cdot n_2}{n_2^{\,2}} =$$

$$= p \cdot (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Значение p неизвестно, но, используя данные эксперимента, можно заменить p на

$$\widetilde{p} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{n_1 + n_2} \quad \widetilde{p} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{n_1 + n_2}$$

(так как это лучшее, что можно предложить в данной ситуации), тогда

$$\xi = \delta : \sqrt{\widetilde{p} \cdot (1 - \widetilde{p}) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}. \qquad (2.22)$$

Случайная величина ξ нормирована и имеет приблизительно нормальное распределение, из которого следует, что значения $|\xi| > 2 \div 3$ маловероятны.

В самом деле, например, для $\xi = -1{,}96$ по таблице для $\Phi(x)$ находим $\Phi(-1{,}96) = 0{,}0250$, а для $\xi = 1{,}96$ значение $\Phi(1{,}96) = 1 - 0{,}0250 = 0{,}9750$ (рис. 2.2).

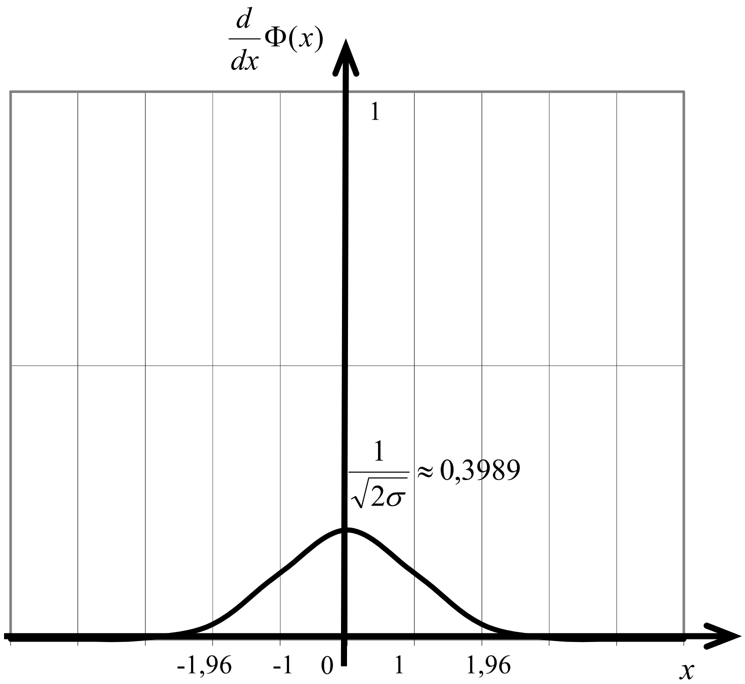

Рис. 2.2

Представим сказанное в терминах теории вероятностей, то есть определим область принятия гипотезы H_0.

Выберем малое γ (например, $\gamma = 0{,}05$), означающее, что событию с такой вероятностью произойти практически невозможно. Число γ называется **уровнем значимости**. Используются значения $\gamma \div 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}02;\ 0{,}01;\ 0{,}001$.

Пусть значение случайной величины в данной серии испытаний $\xi = \varepsilon$. Если $\varepsilon < 0$, то находим $P\{\xi < \varepsilon\} = \Phi(\varepsilon)$; если $\varepsilon > 0$, то имеем $P\{\xi > \varepsilon\} = 1 - \Phi(\varepsilon)$.

Объединяя значения вероятностей, получаем $P\{|\xi| > \varepsilon\} = 2\Phi(-\varepsilon)$ (в нашем случае $P\{|\xi| > \varepsilon\} = 2 \cdot 0{,}025 = 0{,}05$, рис. 2.2). При $2\Phi(-\varepsilon) < \gamma$ гипотеза H_0 отвергается, иначе - данные выборки не противоречат гипотезе H_0 и ее нет оснований не принять, если отсутствует субъективный фактор.

Замечание. Так как, например, в нашем случае, при $\Phi(\varepsilon) = 0{,}0250$ следует, что $\varepsilon = -1{,}96$, то область принятия гипотезы H_0 есть $\{-1{,}96 < \varepsilon < 1{,}96\}$.

Если значение вероятности равно или близко к γ, то принять гипотезу H_0 или отвергнуть зависит от изучаемого объекта и субъективного фактора.

3. Основы теории случайных процессов

Под случайной функцией понимается изменение во времени (или эквивалентному ему параметру, например, температуре) состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями. Теория случайных процессов является частью теории случайных функций.

3.1. Основные понятия

Напомним, что случайная величина ξ - функция, определенная на пространстве элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, то есть $\xi = \varphi(\omega)$, или, что то же самое, величина ξ - случайная, если для нее задан закон распределения (если случайная величина ξ - дискретна) или функция распределения $F(x)$ (если случайная величина ξ - непрерывна).

Если случайную величину рассматривать в динамике ее развития, как функцию времени, то мы приходим к понятию **случайного процесса**.

Пример. Пусть случайная величина ξ принимает два значения в соответствии с таблицей 3.1.

Таблица 3.1

ξ	0	1
p	q	p

$(p + q = 1)$

Если ξ интерпретировать как гибель бактерии, то вероятность p ее гибели будет зависеть от температуры, то есть имеем следующий закон.

ξ	0	1
p	$p(t)$	$q(t)$

$(p(t) + q(t) = 1, \ \forall t \in [0, T])$

Полученный закон представляет собой **случайный** процесс, в котором значение случайной величины ξ не зависит от времени *t*, а вероятность зависит.

Пример. Рассматривается функционирование системы *S*, заданной граф-схемой, представленной на рис. 3.1.

В момент включения система *S* из состояния C_0 с вероятностью *p* перейдет в состояние C_1 и с вероятностью *q* перейдет в состояние C_2.

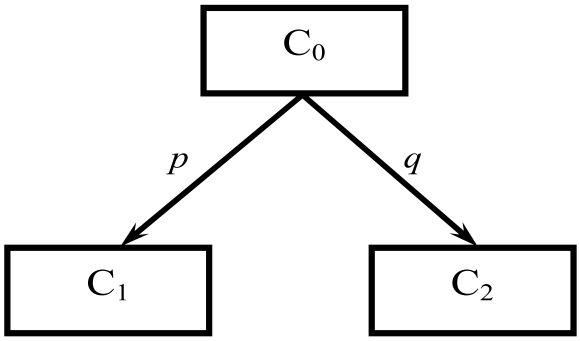

Рис. 3.1

Дальнейшее функционирование задается таблицей 3.2.

Таблица 3.2

$\xi(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
p	p	q

Значение случайной величины является функцией времени. Это также случайный процесс.

Вообще процесс, протекающий в любой системе *S*, если он случайный, представляет собой случайный переход системы из состояния в состояние в зависимости от времени. Конечно, состояние системы *S* обычно характеризуется несколькими переменными, например: температурой, давлением, скоростью и др. Их можно отнести к характеристикам случайного процесса, и все они могут зависеть от времени.

Определение. **Случайным процессом** (с.п.) $\xi(t)$ называется функция, значение которой при любом фиксированном $t = t_0$ является случайной величиной.

Из определения следует, что -.п. $\xi(t)$ есть функция двух переменных

$$\xi(t) = \varphi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in T,\ \varphi(t) \in G, \tag{3.1}$$

где $\{\omega\} = \Omega$ - пространство элементарных событий; T - множество значений аргумента t; G - множество значений с.п. $\xi(t)$.

При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\varphi(\omega, t)$ называется **траекторией** или **реализацией** с.п. $\xi(t)$. Случайный процесс называется непосредственно **заданным**, если каждый элементарный исход эксперимента ω описывается соответствующей траекторией в пространстве всех функций на множестве T со значениями в G.

В зависимости от мощности множества T значений аргумента t случайные процессы можно разделить на четыре класса:

1) процессы с дискретными состояниями и дискретным временем;
2) процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем;
3) процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем;
4) процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Как и для случайной величины ξ, для с.п. $\xi(t)$ введем функцию распределения случайного процесса

$$F(t, x) = P\{\xi(t) < x\}, \tag{3.2}$$

где $$(t, x) \in T \times R.$$

Функция (3.2) называется одномерным законом распределения с.п. $\xi(t)$.

Пусть имеем с.п. $\xi(t) = \varphi(\omega, t)$. При любом допустимом значении $t = t_1$ с.п. становится случайной величиной $\xi(t_1) = \varphi(\omega, t_1)$, для которой имеем свою функцию распределения $F_1(x) = F(x,\ t_1)$. Будем говорить, что в этом случае имеем **сечение случайного процесса**. Если фиксировать случайное событие $\omega_1 \in \Omega$, то имеем **реализацию случайного процесса**, то есть неслучайную функцию $\xi_1 = \varphi(\omega_1, t)$, являющейся функцией параметра t. Итак, при одном сечении процесса и одной реализации вся информация о процессе содержится в системе равенств

$$\begin{cases} F_1 = F(x, t_1), \\ \xi_1 = \varphi(\omega_1, t). \end{cases}$$

Интуитивно ясно, что этой информации недостаточно для изучения процесса. Чем больше сечений, тем точнее задан с.п., однако сложность его описания резко возрастает. Для n сечений мы имеем функцию $2n$ переменных. На практике более чем двумерные законы используются редко.

Рассмотрим двумерный закон распределения:

$$F(t_1,t_2,x_1,x_2)=P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2\}; \tag{3.3}$$

где t_1, t_2 - переменные фиксированные, - который составлен по двум сечениям процесса. Функция четырех переменных (3.3) является исчерпывающей характеристикой для специального типа с.п. - процессов **без последействия** или **марковских** процессов.

Марковские процессы широко используются в инженерной практике, поскольку основаны на независимости специального класса случайных событий.

Пример. Пусть имеем с.п. с непрерывным временем, тогда при $t=t_1$ случайная величина $\xi(t_1)=\varphi(\omega,t_1)$ имеет закон распределения, представленный таблицей 3.3.

Таблица 3.3

$\xi(t_1)$	$x_0(t_1)$	$x_1(t_1)$	…	$x_n(t_1)$	…
$p(t_1)$	$p_0(t_1)$	$p_1(t_1)$	…	$p_n(t_1)$	…

$\sum\limits_i p_i(t_1)=1$

Значения случайной величины $\xi(t_1)$: $x_n(t_1)=n$, а, $p_n(t_1)$ - вероятность этих значений, $n=0,1,...$. Например, при $t_1=0$ таблица 3.3 имеет следующий вид.

$\xi(0)$	0	1	2	…	n	…
$p(0)$	1	0	0	…	0	…

При $t_1=T$ получаем следующее.

$\xi(T)$	0	1	2	…	n	…
$p(T)$	$p_0(T)$	$p_1(T)$	$p_2(T)$	…	$p_n(T)$	…

Зафиксируем элементарное событие: $\omega_n = \{$за время t произошло n событий$\}$, тогда можно говорить о реализации с.п. как функции одной переменной t: $\xi_n = \xi_n(t)$, $t \in [0,\infty)$.

Пример. Пусть имеем несколько реализаций случайных процессов $\varphi(\omega,t)$: $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, представленных на рис. 3.2.

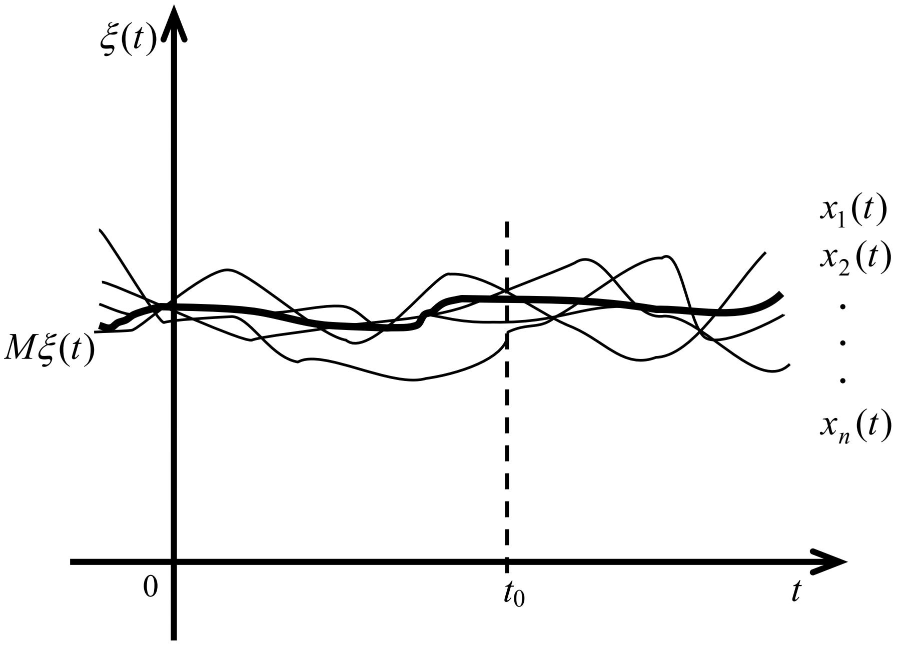

Рис. 3.2

Жирная линия $M\xi(t)$ есть функция, около которой колеблются всевозможные траектории. Эта функция называется **математическим ожиданием случайного процесса**. Для получения функции $M\xi(t)$ необходимо иметь возможные реализации с.п., что невозможно, за исключением отдельных тривиальных случаев.

Из примера видно, что математическое исследование с.п. - проблема сложная. Для ее решения с.п. подразделяют на классы: 1) процессы с независимыми приращениями; 2) марковские процессы; 3) гауссовские процессы и др.

В свою очередь каждый класс с.п. подразделяют на виды, например, марковские процессы подразделяются: а) на однородные марковские процессы; б) полумарковские процессы; в) скачкообразные процессы; г) процессы с независимыми приращениями; д) ветвящиеся процессы; е) стационарные случайные процессы. Рассмотрим **однородные** марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, описываемые уравнениями гибели и размножения с непрерывным временем [5, 10].

3.2. Марковские процессы

Понятие марковской цепи принадлежит русскому математику А.А. Маркову (в статьях 1906-1908 гг. он использовал это понятие для статистического анализа распределения букв в поэме А.С. Пушкина «Евгений Онегин»). Само название «цепь Маркова» было предложено русским математиком А.Я. Хинчиным [10].

3.2.1. Дискретные цепи Маркова

Пусть имеем некоторую систему *S*, которая может находиться в одном из конечного или счетного множества несовместных состояний C_i, $i \in N$. Переход системы из состояния в состояние, вообще говоря, случаен и возможен только в фиксированные моменты времени t_n, $n = 0,1,2,...$. Опишем функционирование системы в терминах с.п.

Пусть в момент времени t_n система *S* перешла из состояния C_j в состояние C_i. Для ее описания зададим дискретный с.п. функцией $\xi_i(t_n) = \varphi(\omega_i, t_n)$. Элементарное событие ω_i отражает пребывание системы *S* в состоянии C_i. Кроме того, нам необходимо задать начальное распределение вероятностей для момента времени $t = t_0$ и в общем случае задать все сечения процесса и возможность его реализации.

Получить такую информацию о с.п. - задача трудновыполнимая, да и в ряде случаев не нужная, если использовать понятие **цепей Маркова**.

В самом деле, пусть имеем последовательность (цепь) зависимых целочисленных случайных величин $\xi_n = \xi(t_n)$. Если в момент t_n система пришла в состояние C_i, то будем считать, что $\xi_n = i$.

Определение. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ образует дискретную **цепь Маркова**, если

$$P\{\xi_n = i / \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, ..., \xi_{n-2} = i_{n-2}, \xi_{n-1} = j\} = P\{\xi_n = i / \xi_{n-1} = j\} = p_{ij}^{(n)} \quad (3.4)$$

с начальным состоянием

$$P\{\xi_0 = i\} = p_i^{(0)}, \ \sum_i p_i^{(0)} = 1. \quad (3.5)$$

Вероятности $p_{ij}^{(n)}$ называются вероятностями перехода. Свойство равенства (3.4), цепи Маркова, называется **свойством отсутствия последействия**, которое интерпретируется так: **поведение процесса в будущем зависит только от фиксированного настоящего и не зависит от его прошлого**, $j \in N$.

Определение. Цепь Маркова $\{\xi_n\}$ называется однородной, если вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$ не зависят от времени, то есть

$$\forall n, \ p_{ij}^{(n)} = p_{ij}. \quad (3.6)$$

Цепь Маркова называется неприводимой, если каждое ее состояние может быть достигнуто из любого другого, то есть для любых двух состояний системы *S*: C_i, C_j существует целое число *k*, такое, что $p_{ij}^{(k)} > 0$. Для однородной цепи имеем $p_{ij} > 0$, $\forall i, j$.

Пусть $\pi_j^{(n)} = P\{\xi_n = j\}$ - вероятность того, что в момент времени t_n система находится в состоянии C_j. Интерес представляет существование предела

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)}. \quad (3.7)$$

Нахождение распределения $\{\pi_j\}$ является основной задачей цепей Маркова. Если предел в формуле (3.7) существует, то говорят, что система *S* имеет **стационарный** режим функционирования, если $\forall j$, $\pi_j > 0$. Предельные вероятности $\{\pi_j\}$ не зависят от начальных условий, $\forall j$, π_j означает **долю времени**, в течение которого система находится в состоянии C_j и однозначно определяется равенствами:

$$\sum_i \pi_i = 1, \tag{3.8}$$

$$\pi_j = \sum_i \pi_i \cdot p_{ij}, \ \forall j. \tag{3.9}$$

Формула (3.8) называется условием нормировки.

Система алгебраических уравнений (3.9) является однородной, и для ее однозначного решения необходимо использовать уравнение (3.8), при этом любое одно уравнение из системы (3.9) можно исключить.

Матрица П, составленная из элементов p_{ij}, называется матрицей вероятностей перехода:

$$\Pi = \left(p_{ij}\right). \tag{3.10}$$

Зададим вектор вероятностей состояний системы

$$\overline{\pi} = (p_1, p_2, ..., p_n, ...),$$

тогда система (3.9) записывается в виде:

$$\overline{\pi} = \overline{\pi} \cdot \Pi. \tag{3.11}$$

Часто представляет интерес переходы системы из состояния в состояние в произвольный момент времени (переходный режим).

Для этого нужно определить распределение вероятностей $\{\pi_j^{(n)}\}$ пребывания системы в состоянии C_j в момент t_n. Зададим вектор вероятностей $\overline{\pi}^{(n)}$ в момент t_n равенством:

$$\overline{\pi}^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, ..., p_n^{(n)}, ...).$$

Используя систему (3.9) и определение вероятностей переходов (3.4) (см. с. 50), имеем

$$\overline{\pi}^{(1)} = \overline{\pi}^{(0)} \cdot \Pi,$$

где $\overline{\pi}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ..., p_n^{(0)}, ...)$ - начальное состояние системы (3.5) (см. с. 50). Отсюда для любого *n* по рекуррентной формуле получаем

$$\overline{\pi}^{(n)} = \overline{\pi}^{(n-1)} \cdot \Pi = \overline{\pi}^{(0)} \cdot \Pi^n, \ n \in N. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) дает общий метод вычисления вероятностей на n-м шаге процесса по заданной матрице переходов П и начальном распределении $\overline{\pi}^{(0)}$.

Если стационарный режим существует, то

$$\overline{\pi} = \lim_{n\to\infty} \overline{\pi}^{(n)}. \tag{3.13}$$

Пример. Рассмотрим систему S, которая находится в любой момент времени t в одном из трех несовместных состояний C_1, C_2, C_3. Переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно в фиксированные моменты времени $t_k = k$, $k \in N$, в соответствии с размеченной граф-схемой [3, 4] состояний (рис. 3.3).

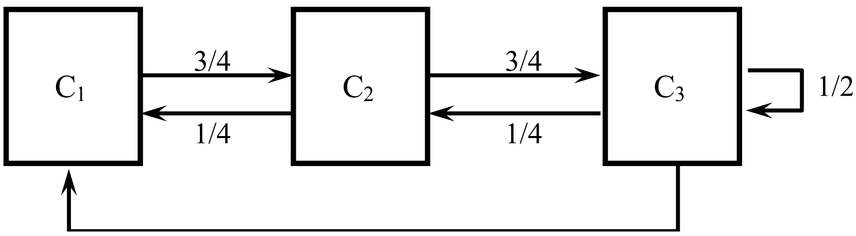

Рис. 3.3

Требуется оценить скорость сходимости к стационарному режиму и вычислить стационарное распределение вероятностей.

Решение. Вычислим стационарное распределение вероятностей, то есть найдем собственный вектор $\overline{\pi} = (p_1, p_2, p_3)$, где $p_i = P\{C_i\}$, $i = 1,2,3$.

Имеем $\overline{\pi} = \overline{\pi} \cdot \Pi$, где

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

С учетом условия нормировки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ имеем систему

$$\begin{cases} p_1 = 0 \cdot p_1 + \dfrac{1}{4} \cdot p_2 + \dfrac{1}{4} \cdot p_3, \\ p_2 = \dfrac{3}{4} \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + \dfrac{1}{4} \cdot p_3, \\ p_3 = \dfrac{1}{4} \cdot p_1 + \dfrac{3}{4} \cdot p_2 + \dfrac{1}{2} \cdot p_3, \quad * \\ 1 = p_1 + p_2 + p_3. \end{cases}$$

Решая ее (например, без уравнения помеченного *), получаем стационарное распределение вероятностей:

$$\overline{\pi} = (0{,}2;0{,}28;0{,}52).$$

Оценим скорость сходимости. Для этого вычислим вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$ по формуле (3.6) при различных начальных условиях:

1) $p^{(0)} = (1{,}0{,}0)$; результаты представлены в таблице 3.4;

Таблица 3.4

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	1	0	0,250	0,178	0,203	…	0,2
$p_2^{(n)}$	0	0,75	0,062	0,359	0,254	…	0,28
$p_3^{(n)}$	0	0,25	0,688	0,454	0,543	…	0,52

2) $p^{(0)} = (0{,}1{,}0)$; соответствующие результаты отражены в таблице 3.5;

Таблица 3.5

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	0	0	0,187	0,203	0,199	…	0,2
$p_2^{(n)}$	1	0,75	0,375	0,250	0,289	…	0,28
$p_3^{(n)}$	0	0,25	0,438	0,547	0,512	…	0,52

3) $p^{(0)} = (0{,}0{,}1)$; в итоге получаем таблицу 3.6.

Таблица 3.6

n	0	1	2	3	4	…	∞
$p_1^{(n)}$	0	0	0,187	0,203	0,199	…	0,2
$p_2^{(n)}$	0	0,75	0,313	0,266	0,285	…	0,28
$p_3^{(n)}$	1	0,25	0,500	0,531	0,516	…	0,52

Из таблиц видно, что вхождение системы в стационарный режим происходит достаточно быстро, так как уже после четырех шагов вероятности мало отличаются от предельных (независимость от начальных условий).

Замечание. Оценка скорости сходимости переходных вероятностей к стационарным зависит от **собственных** значений матрицы П и иллюстрируется **барицентрической системой координат** [3].

3.2.2. Непрерывные цепи Маркова

Если система с конечным или счетным числом состояний может переходить из одного состояния в другое в любой момент времени t, то будем говорить, что задана **цепь Маркова** с **непрерывным** временем.

Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ образует **непрерывную цепь Маркова**, если для произвольной последовательности $\{t_i\}$, $i = 1,2,...,n$, такой, что $t_0 < t_1 < ... < t_n$, выполняется

$$P\{\xi(t_n) = j / \xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, ..., \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = P\{\xi(t_n) = j / \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\}. \quad (3.14)$$

Это определение является непрерывным аналогом определения (3.5) (см. с. 50). Интерпретация та же самая: состояние системы S в будущем зависит только от текущего ее состояния (настоящего) и не зависит от того, как и когда система попала в это состояние.

Цепь Маркова с непрерывным временем называется **процессом Маркова.**

3.2.3. Потоки событий

Случайным потоком событий называется появление однородных событий в случайные моменты времени [3, 6].

Рассмотрим временную ось (рис. 3.4). Поток событий представляет собой, вообще говоря, последовательность «случайных» точек $\delta_1 < \delta_2 < ... < \delta_n$ на оси, разделенных временными интервалами $T_i = (\delta_{i+1} - \delta_i)$, $i \in N$, длина которых случайна.

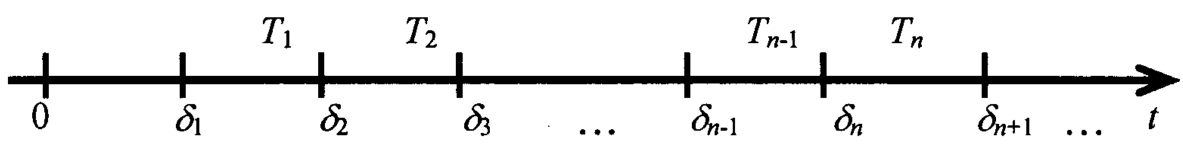

Рис. 3.4

Потоки событий различаются по законам распределения длин интервалов T_i между событиями по их зависимости или независимости, регулярности и др.

Наиболее изучены потоки, которые имеют следующие свойства:

1) **стационарность** - все его вероятностные характеристики не меняются со временем;

2) **отсутствие последействия** - для любых непересекающихся временных интервалов на временной оси число событий, находящихся на одном интервале, **не зависит** от того, сколько их и как они оказались на другом интервале;

3) **ординарность** - практическая невозможность на достаточно малом временном интервале появиться двум и более событиям.

Для формализации этих свойств введем понятие **интенсивности,** которое ранее нами использовалось неформально.

Пусть $p_i(t,\Delta t)$ - вероятность того, что за время Δt, примыкающего к моменту времени *t*, появилось *i* событий, $i = 0,1,2,\ldots$.

Рассмотрим полную группу несовместных событий, для которых по определению имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t,\Delta t) = 1\,. \tag{3.15}$$

Введем обозначение $p_{>1}(t,\Delta t) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i(t,\Delta t)$ - вероятность того, что за время Δt появилось более одного события.

Тогда формула (3.15) примет вид:

$$p_0(t,\Delta t) + p_1(t,\Delta t) + p_{>1}(t,\Delta t) = 1\,. \tag{3.16}$$

Формализуя ординарность, получаем

$$p_{>1}(t,\Delta t) = o(\Delta t)\,, \tag{3.17}$$

где $o(\Delta t)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем наименьшая из вероятностей $p_0(t,\Delta t)$ и $p_1(t,\Delta t)$.

Обозначим через $M(\xi(t,\Delta t))$ математическое ожидание числа событий, появившихся за время Δt, тогда по определению

$$M(\xi(t,\Delta t)) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i(t,\Delta t).$$

С учетом ординарности имеем

$$M(\xi(t,\Delta t)) = 0 \cdot p_0(t,\Delta t) + 1 \cdot p_1(t,\Delta t) + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot o(\Delta t)$$

или, учитывая свойства бесконечно малых,

$$M(\xi(t,\Delta t)) = p_1(t,\Delta t) + o(\Delta t).$$

Положим

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\xi(t,\Delta t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t,\Delta t)}{\Delta t}.$$

Определение. Функция $\lambda(t)$ параметра t называется **интенсивностью** (**плотностью**) ординарного потока событий в момент t:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\xi(t,\Delta t))}{\Delta t}. \tag{3.18}$$

Стандартная трактовка $\lambda(t)$ - **среднее число событий, приходящихся на единицу времени**, для участка Δt, примыкающего к моменту t.

Ясно, что $\forall t,\ \lambda(t) \geq 0$ и имеет размерность, обратную времени, - $[1/вр]$.

Пример. Среднее число событий ординарного потока на интервале длиной τ, примыкающего к t,

$$M(\xi(t,\tau)) = \int_{t}^{t+\tau} \lambda(\tau) d\tau. \tag{3.19}$$

в частности, для стационарного потока имеем

$$M(\xi(t,\tau)) = \lambda \cdot \tau, \text{ то есть } \lambda(\tau) \equiv \lambda.$$

Наконец, **отсутствие последействия** формулируется следующим образом.

Пусть $p_n(t+\tau) = p_n(t,\tau)$ - вероятность того, что за время τ, примыкающего к моменту времени t, появилось k событий при условии, что в момент времени t было $n-k$ событий. Тогда условие отсутствия последействия означает, что

$$p_n(t+\tau) = p_{n-k}(t) \cdot p_k(\tau),\ k = 0,1,\ldots,n. \tag{3.20}$$

В частности, при $\tau = \Delta t$ и $k = 1$ имеем

$$p_n(t+\Delta t) = p_{n-1}(t)\cdot p_1(\Delta t)\,. \tag{3.21}$$

Замечание. Формула (3.20) в терминах биологии может интерпретироваться как вероятность роста популяции на k единиц за время τ. Аналогично имеет смысл говорить о гибели популяции на k единиц за время τ, если в момент t популяция состояла из $(n+k)$ единиц, то есть

$$p_n(t+\tau) = p_{n+k}(t)\cdot \widetilde{p}_k(\tau)\,.$$

Определение. Поток событий называется **простейшим,** если он обладает свойством:

1) стационарности: $\lambda = const$;

2) отсутствия последействия: $p_{n+k}(t+\Delta t) = p_n(t)\cdot p_k(\Delta t)$;

3) ординарности: $p_{>1}(t+\Delta t) = o(\Delta t)$.

Покажем, что если поток событий - простейший, то распределение длин интервалов между поступлениями любой пары соседних событий - **показательное** (экспоненциальное) с плотностью

$$\rho(t) = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t},\ \lambda > 0,\ t\in[0,\infty)\,. \tag{3.22}$$

Следующие постулаты вытекают из определения простейшего потока:

1) для всякого малого $\Delta t > 0$ существует ненулевая вероятность появления события;

2) если система начинает функционировать с момента $t = 0$, то первое появление события имеет место в момент $t > 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = 1 - \int_0^t \rho(\tau)d\tau\,. \tag{3.23}$$

Если $\rho(t)$ - плотность, то $f(t) = P\,\{$первое событие появилось после момента $t\}$.

Из свойства отсутствия последействия имеем

$$f(t+\Delta t) = f(t)\cdot f(\Delta t),\ \forall t\in[0,\infty),\ \Delta t > 0\,. \tag{3.24}$$

Вычитая из обеих частей формулы (3.24) $f(t)$, получим

$$f(t+\Delta t) - f(t) = f(t)\cdot(1 - f(\Delta t))\,.$$

Разделим обе части на Δt и перейдем к пределу по Δt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = -f(t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - f(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Если пределы существуют, то полагая

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - f(\Delta t)}{\Delta t} > 0$$ (сравни с формулой (3.18), см. с. 56),

будем иметь

$$f'(t) = -\lambda \cdot f(t), \text{ где } f(0) = 1.$$

Решая это уравнение, получаем выражение:

$$f(t) = e^{-\lambda \cdot t}.$$

Подставляя его в формулу (3.22), получим

$$e^{-\lambda t} = 1 - \int_0^t \rho(\tau) d\tau$$

или

$$\int_0^t \rho(\tau) d\tau = 1 - e^{-\lambda \cdot t}. \quad (3.25)$$

Дифференцируя формулу (3.25), получаем требуемое:

$$\rho(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \blacktriangledown \quad (3.26)$$

Определим

$$V_k(t) \equiv P\{\text{в интервале } (0, t) \text{ появилось ровно } k \text{ событий}\}.$$

Учитывая условие отсутствия последействия, можем воспользоваться сверткой [4, 9]:

$$V_k(t) = \int_0^t V_{k-1}(t-\tau) \cdot \rho(\tau) d\tau = \int_0^t V_{k-1}(\tau) \cdot \rho(t-\tau) d\tau, \text{ для } k \in N. \quad (3.27)$$

Используя формулу (3.22), имеем

$$V_k(t) = \int_0^t V_{k-1}(\tau) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (t-\tau)} d\tau. \quad (3.28)$$

Из смысла $\rho(t)$ и формулы (3.27), получаем

$$V_0(t) = e^{-\lambda \cdot t}. \quad (3.29)$$

Дифференцируя формулу (3.28) по t, приходим к системе уравнений

$$\frac{dV_k(t)}{dt} = -\lambda \cdot V_k(t) + \lambda \cdot V_{k-1}(t),\ k \in N. \qquad (3.30)$$

Система рекуррентных линейных дифференциальных уравнений (3.30) легко решается, начиная с $k = 1$, если учесть формулу (3.29) и начальные условия: $V_k(0) = 0$, $k \in N$. Решение системы (3.30) имеет вид (см. приложение 7, с. 109):

$$V_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t},\ k = 0,1,\ldots. \qquad (3.31)$$

Формула (3.31) представляет **пуассоновский** процесс (или **чисто случайный процесс)** с дискретным пространством состояний и непрерывным временем.

Система уравнений (3.30) называется **процессом чистого рождения** [3].

Если в некоторой системе S переходы от одного ее состояния в любое другое удовлетворяют условиям простейшего потока, то говорят, что имеет место пуассоновский процесс с непрерывным временем. Обратное также справедливо.

Пуассоновский процесс обладает некоторыми замечательными свойствами, используя которые легко получать системы уравнений вида (3.30), часто применяемые в системах массового обслуживания.

3.3. Системы массового обслуживания

Под **системой массового обслуживания** (СМО) будем понимать комплекс, состоящий: а) из случайного **входящего потока** требований (событий), нуждающихся в обслуживании; б) **дисциплины** очереди; в) **механизма**, осуществляющего обслуживание [5].

Входящий поток. Для описания входящего потока обычно задается вероятностный закон, управляющий последовательностью моментов поступления требований на обслуживание и количеством требований в каждом поступлении (то есть требования поступают либо **единичные**, либо **групповые**). Источник, генерирующий требования, считается неисчерпаемым. Требование, поступившее на обслуживание, может обслуживаться сразу, если есть свободные обслуживающие приборы, либо ждать в очереди, либо отказаться от ожидания, то есть покинуть обслуживающую систему.

Дисциплина очереди. Это описательная характеристика. Требование, поступившее в систему, обслуживается в порядке очереди (дисциплина очереди): «**первым пришел - первым обслужен»**. Другая дисциплина очереди - «**последним пришел - первым обслужен**» - это обслуживание по приоритету. Наконец, обслуживание требований может быть **случайным**.

Механизм обслуживания характеризуется продолжительностью и характером процедур обслуживания. Обслуживание может осуществляться по принципу: «на одно требование - один обслуживающий прибор». Если в системе несколько приборов, то параллельно могут обслуживаться несколько требований. Часто используют групповое обслуживание, то есть требование обслуживается одновременно несколькими приборами. В некоторых случаях требование обслуживается последовательно несколькими приборами - это **многофазовое** обслуживание.

По окончании обслуживания требование покидает систему.

Анализ системы массового обслуживания. Целью является рациональный выбор структуры обслуживания и процесса обслуживания. Для этого требуется разработать показатели эффективности функционирования систем массового обслуживания. Например, требуется знать: вероятность того, что занято или свободно k приборов; распределение вероятностей свободных или занятых приборов от обслуживания; вероятность того, что в очереди находится заданное число требований; вероятность того, что время ожидания в очереди превысит заданное. К показателям, характеризующих эффективность функционирования системы в среднем, относятся: средняя длина очереди; среднее время ожидания обслуживания; среднее число занятых приборов; среднее время простоя приборов; коэффициент загрузки системы и др. Часто вводятся экономические показатели. Разработкой математических моделей, получением числовых результатов и анализом показателей эффективности занимается **теория массового обслуживания (ТМО)**.

Таким образом, основные элементы системы массового обслуживания укладываются в следующую схему (рис. 3.5).

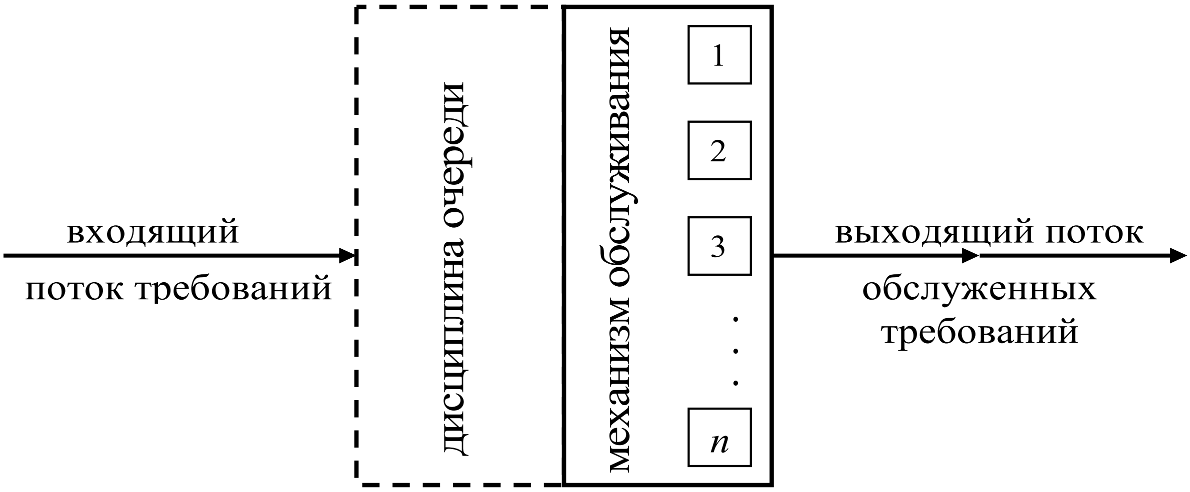

Рис. 3.5

В качестве примера построим ***Модель 1*** СМО, соответствующую рис. 3.5.

Пусть имеем СМО, состоящую из n идентичных, параллельных каналов (приборов) обслуживания [5], на которую поступает случайный поток требований интенсивностью α. Интервал времени между поступлениями соседних требований является случайной величиной ξ, образующей пуассоновский процесс:

$$V_k(t) = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

где $V_k(t)$ - вероятность того, что за время t в СМО поступит ровно k требований, α - среднее число требований, поступающих в СМО в единицу времени.

Если требование, поступившее в СМО, застает все приборы занятыми, то оно встает в очередь и ждет до тех пор, пока не освободится обслуживающий прибор. Время обслуживания требования любым прибором является случайной величиной η, удовлетворяющей экспоненциальному закону распределения.

$$F(t) = P\{\eta < t\} = 1 - \exp(-\beta \cdot t),$$

где $\beta = 1/t_{cp}$, t_{cp} - среднее время обслуживания требования.

Каждый прибор в любой момент времени $t \in [0, \infty)$ может обслуживать не более одного требования. Обслуженное требование покидает СМО. Требуется проанализировать эффективность работы системы.

Решение. Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t в системе находится k требований.

Пусть Δt – достаточно малый промежуток времени. Вероятность того, что в СМО за время Δt не поступит ни одного требования:

$$V_0(\Delta t) = e^{-\alpha \cdot \Delta t} = 1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Вероятность того, что в СМО за время Δt поступит одно требование:

$$V_1(\Delta t) = \frac{(\alpha \cdot \Delta t)}{1!} \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta t} = \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Вероятность того, что за время Δt в СМО поступит два или более требований: если $V_0(\Delta t) = e^{-\alpha \cdot \Delta t} = 1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, то

$$\sum_{k=2}^{\infty} V_k(\Delta t) = 1 - V_0(\Delta t) - V_1(\Delta t) = \frac{(\alpha \cdot \Delta t)^2}{2!} + \ldots = o(\Delta t).$$

Аналогично вероятность того, что за время Δt требование будет обслужено:

$$1 - e^{-\beta \cdot \Delta t} = \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Вероятность того, что за время Δt будет обслужено два или более требования:

$$\frac{(\beta \cdot \Delta t)^2}{2!} + \ldots = o(\Delta t).$$

Вероятность того, что за время Δt будет обслужено одно из k требований, находящихся в системе, найдем следующим образом:

$P\{$требование не будет обслужено за время $\Delta t\} = e^{-\beta \cdot \Delta t}$;

$P\{$ни одно из k требований не будет обслужено за время $\Delta t\} = (e^{-\beta \cdot \Delta t})^k = 1 -$

$- k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)$;

$P\{$будет обслужено одно из k требований за время $\Delta t\} = 1 - e^{-k \cdot \beta \cdot \Delta t} =$

$= k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

Вероятность того, что за время Δt произойдет более одного события (например, поступит требование и какое-нибудь обслужится), есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\Delta t - o(\Delta t)$.

Для $0 \le k \le n-1$ имеем разностное уравнение:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t) \cdot (1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)) \cdot (1 - k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)) +$$
$$+ p_{k-1}(t) \cdot (\alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)) + p_{k+1}(t) \cdot ((k+1) \cdot \beta + o(\Delta t)) + o(\Delta t). \quad (3.32)$$

При получении уравнения мы воспользовались формулой полной вероятности и свойствами пуассоновского процесса.

В словесной формулировке уравнение (3.32) звучит так: вероятность того, что в момент времени ($t + \Delta t$) в системе находится *к* требований ($k \le n-1$) равна вероятности того, что в момент *t* в системе находилось *к* требований и ни одного требования не поступило и не было обслужено, плюс вероятность того, что в момент времени *t* в системе находилось ($k-1$) требование и за время Δt поступило одно требование в систему, плюс вероятность того, что в момент времени *t* в системе находилось ($k+1$) требование на обслуживании и за время Δt одно из (k+1) требований было обслужено, плюс вероятность того, что за время Δt произошло более одного события.

Преобразуем уравнение (3.32) к виду:

$$p_k(t+\Delta t) - p_k(t) = -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot \Delta t \cdot p_k(t) + \alpha \cdot \Delta t \cdot p_{k-1}(t) +$$
$$+ (k+1) \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot p_{k+1}(t) + o(\Delta t).$$

Разделив обе части на Δt и перейдя к пределу, получим

$$p'_k(t) = -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot p_k(t) + \alpha \cdot p_{k-1}(t) + (k+1) \cdot \beta \cdot p_{k+1}(t), \ 1 \le k \le n-1. \quad (3.33)$$

Для $k \ge n$ заметим, что за время Δt может быть обслужено не более, чем одно из *n* требований, так как число обслуживающих приборов равно *n*.

Таким образом, для $k \ge n$ имеем уравнение:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t) \cdot (1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)) \cdot (1 - k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)) +$$
$$+ p_{k-1}(t) \cdot (\alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)) + p_{k+1}(t) \cdot (n \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t).$$

Производя выкладки, аналогичные выводу уравнения (3.32), получим

$$p'_k(t) = -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot p_k(t) + \alpha \cdot p_{k-1}(t) + n \cdot \beta \cdot p_{k+1}(t). \quad (3.34)$$

Заметим, что при $k=0$ вероятность $p_{k-1}(t)=p_{-1}(t)=0$.

Учитывая это, окончательно имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\alpha \cdot p_0(t) + \beta \cdot p_1(t); \\ p'_k(t) = -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot p_k(t) + \alpha \cdot p_{k-1}(t) + (k+1) \cdot \beta \cdot p_{k+1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \le k \le n-1; \\ p'_k(t) = -(\alpha + n \cdot \beta) \cdot p_k(t) + \alpha \cdot p_{k-1}(t) + n \cdot \beta \cdot p_{k+1}(t), k \ge n, \end{cases} \tag{3.35}$$

для которой начальные условия имеют вид:

$$p_0(0)=1,\ p_k(0)=0,\ \forall k \ge 1. \tag{3.36}$$

Решение системы дифференциальных уравнений рождения и гибели вида (3.35) в переходном режиме и начальными условиями равенства (3.36) очень громоздко, да и, в ряде случаев, не является необходимым, поскольку реальные системы достаточно быстро входят в стационарный режим функционирования [5], который описывается системой алгебраических уравнений. Кроме того, учитывая, что получение необходимых формул для стационарного режима не вызывает особых трудностей, делает его привлекательным для анализа систем.

В самом деле, если $\boldsymbol{\alpha/(n\cdot\beta)<1}$, то СМО **эргодична** [5], то есть

$$\forall k,\ (\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k > 0) \text{ и } (\lim_{t\to\infty} p'_k(t) = 0).$$

Тем самым, система (3.35) сводится к системе однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1; \\ 0 = -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot p_k + \alpha \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \beta \cdot p_{k+1},\ 1 \le k \le n-1; \\ 0 = -(\alpha + n \cdot \beta) \cdot p_k + \alpha \cdot p_{k-1} + n \cdot \beta \cdot p_{k+1}, \qquad k \ge n. \end{cases} \tag{3.37}$$

Для единственности решения системы (3.37) следует добавить условие нормировки, которое является следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \tag{3.38}$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} z_k = k \cdot \beta \cdot p_k - \alpha \cdot p_{k-1},\ \ k = 1,\ldots,n; \\ \tilde{z}_k = n \cdot \beta \cdot p_k - \alpha \cdot p_{k-1},\ \ k > n. \end{cases} \tag{3.39}$$

В новых обозначениях система (3.37) примет вид:

$$\begin{cases} z_0 = 0; \\ z_k - z_{k-1} = 0; \\ \tilde{z}_k - \tilde{z}_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\forall k$, $z_k = 0$, $\tilde{z}_k = 0$.

Возвращаясь к обозначениям системы (3.39), получаем

$$\begin{cases} k \cdot \beta \cdot p_k = \alpha \cdot p_{k-1}, \quad k = 1,...,n; \\ n \cdot \beta \cdot p_k = \alpha \cdot p_{k-1}, \quad k > n. \end{cases}$$

Выразим все вероятности через p_0. Имеем при $k = 1$

$$p_1 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot p_0,$$

при $1 < k \le n$

$$p_k = \frac{\alpha}{k \cdot \beta} \cdot p_{k-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot k! \cdot p_0, \tag{3.40}$$

при $k > n$

$$p_k = \left(\frac{\alpha}{n \cdot \beta}\right)^{n-k} \cdot p_n$$

или

$$p_k = \frac{\alpha^k}{n! \cdot n^{k-n} \cdot \beta^k} \cdot p_0. \tag{3.41}$$

Для нахождения p_0 воспользуемся условием нормировки (3.38):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot p_0 + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot p_0 = 1.$$

После элементарных преобразований получим

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n \cdot \beta}\right)^s \right)^{-1}.$$

Учитывая, что $\alpha / (n \cdot \beta) < 1$, имеем сходящийся ряд:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n \cdot \beta}\right)^s = \frac{1}{1 - \alpha / (n \cdot \beta)}.$$

Окончательно получаем:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n \cdot \frac{1}{n! \cdot (1 - \alpha / (n \cdot \beta))} \right)^{-1};$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(\alpha / \beta)^k}{k!} \cdot p_0, \ 1 \le k \le n-1; \\ \dfrac{(\alpha / \beta)^k}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot p_0, \ k \ge n, \ (\alpha / (n \cdot \beta) < 1). \end{cases}$$

Замечание. Условие $\alpha / (n \cdot \beta) < 1$ означает, что входящий поток меньше, чем суммарный выходящий, иначе ряд был бы расходящимся, то есть система не имела бы решения.

Если p_k известны, то некоторые показатели эффективности можно вывести, исходя из свойств простейшего потока и физической интерпретации вероятностей и параметров:

1) $P\{\text{в системе нет требований}\} = p_0$;

2) $P\{\text{в системе обслуживанирем занято } k \text{ приборов}/k < n\} = p_k$;

3) $\Pi = P\{\text{в системе все приборы заняты обслуживанием}\}$,

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} p_k$$

или, учитывая формулы для p_k, получим

$$\Pi = \frac{(\alpha / \beta)^n}{(n-1)! \cdot (n - \alpha / \beta)} \cdot p_0;$$

4) $P\{\tau > t_0\} = P$ {время ожидания τ любого требования, находящегося в очереди, больше заданного, $t_0 / t_0 \in [0, \infty)$};

Исходя из свойства аддитивности параметров простейшего потока [6], для стационарного режима функционирования систем экспоненциального типа параметр $n \cdot \beta - \alpha$ является интенсивностью, которая определяет скорость движения требований, находящихся в очереди за время τ, являющегося случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения. Отсюда

$\exp(-(n\cdot\beta-\alpha)\cdot t_0)$ есть вероятность того, что ни одно требование за время t_0 не будет обслужено (движения требований очереди не было).

Учитывая, что П есть вероятность существования очереди, получаем

$$P\{\tau > t_0\} = \Pi\cdot\exp(-(n\cdot\beta-\alpha)\cdot t_0).$$

5) $t_{ож}$ - среднее время, в течение которого любое требование, находящееся в очереди, ждет начала обслуживания;

В стационарном режиме функционирования систем вероятности p_k интерпретируются как доли единицы времени, в течение которого СМО находится в состоянии C_k (за единицу времени можно принять единицу измерения интенсивностей). Следовательно, доля времени существования очереди в СМО равна П. С другой стороны, $n\cdot\beta-\alpha$ - среднее число требований, попадающих из очереди на обслуживание за единицу времени. Отсюда, для времени $t_{ож}$ любого требования получаем

$$t_{ож} = \Pi/(n\cdot\beta-\alpha).$$

6) A - средняя длина очереди,

$$A = \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\cdot p_k = \frac{(\alpha/n\cdot\beta)}{(1-\alpha/n\cdot\beta)^2}\cdot p_n,$$

где $p_n = \dfrac{(\alpha/\beta)^n}{n!}\cdot p_0$;

7) B - среднее число обслуживаемых требований,

$$B = \sum_{k=0}^{n-1}k\cdot p_k + n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}p_k$$

или

$$B = p_0\cdot\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\alpha/\beta)^k}{(k-1)!} + \frac{(\alpha/\beta)^n}{(n-1)!\cdot(1-\alpha/n\cdot\beta)}\right];$$

8) R - среднее число требований в системе,

$$R = A + B;$$

9) L - среднее время пребывания требования в системе,

$$L = \Pi/(n\cdot\beta-\alpha) + 1/\beta;$$

10) K_3 - коэффициент загрузки системы,

$$K_3 = B / n .$$

Будем считать, что предложенные здесь показатели эффективности (в зарубежной литературе их называют **операционными** характеристиками) дают достаточно полное представление о функционировании СМО.

Решение для ***Модели 1*** было получено в стационарном режиме, исходя из системы (3.35). Обычно решение для стационарного режима можно записать сразу, если воспользоваться методом **декомпозиции**.

Суть метода. Функционирование СМО представляется в виде связного графа ее состояний C_i, $i \in N$. Переход системы из состояния C_i в состояние C_j графически осуществляется по направленным отрезкам с заданными **интенсивностями** переходов λ_{ij}. Если переход невозможен, то $\lambda_{ij} = 0$.

В стационарном режиме действует принцип равновесия: сумма входов в любое состояние равна сумме выходов из него. Это позволяет записать уравнения равновесия по каждому из состояний (принцип декомпозиции).

Рассмотрим применение метода декомпозиции на примере следующей задачи из теории надежности процесса **гибели** и **рождения** с конечным числом состояний [3, 4].

Пусть имеем однородный марковский процесс с конечным числом состояний C_k, $k = 0,1,...,n$. Если в момент t процесс находится в состоянии C_k, то за бесконечно малое время Δt он с вероятностью $\lambda_k \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ перейдет в состояние C_{k+1}, с вероятностью $\mu_k \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ перейдет в состояние C_{k-1} и с вероятностью $1 - (\lambda_k + \mu_k) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ останется в состоянии C_k. Если процесс находится в момент t в состоянии C_0, то за время Δt он может остаться в состоянии C_0 или перейти в состояние C_1, если же процесс находится в момент t в состоянии C_n, то за время Δt он может остаться в состоянии C_n или перейти в состояние C_{n-1}.

Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t процесс находится в состоянии $к$, $k = 0,1,...,n$. Представим наш процесс в виде графической схемы (рис. 3.6).

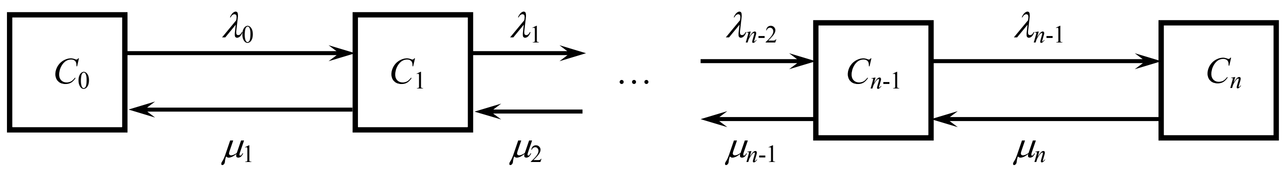

Рис. 3.6

Очевидным является то, что процесс - эргодический, следовательно, $\forall k$, $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t) = p_k > 0$. В силу условия равновесия для стационарного режима имеем (по каждому состоянию):

$$C_0 : \lambda_0 \cdot p_0 = \mu_1 \cdot p_1,$$

$$\dots$$

$$C_k : \lambda_k \cdot p_k = \mu_{k+1} \cdot p_{k+1}, \text{ для } 1 \le k \le n-1.$$

Для состояния C_n получаем уравнение, совпадающее с предыдущим уравнением при $k = n-1$.

$$C_n : \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1} = \mu_n \cdot p_n .$$

Таким образом, получаем однородную систему из n алгебраических уравнений с $(n+1)$ неизвестным p_k, $k = 0,1,...,n$:

$$\begin{cases} \lambda_0 \cdot p_0 - \mu_1 \cdot p_1 = 0; \\ \lambda_k \cdot p_k - \mu_{k+1} \cdot p_{k+1} = 0, \quad 1 \le k \le n-1, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение, если добавить условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 .$$

Окончательно получаем:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \cdot p_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1} \cdot \lambda_{k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_0}{\mu_k \cdot \mu_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mu_1} \cdot p_0 = \delta_k \cdot p_0 .$$

Учитывая условие нормировки, находим

$$p_k = \frac{\delta_k}{\sum\limits_{i=0}^{n} \delta_i}, \ \delta_0 = 1.$$

Замечание. Система уравнений вида (3.35) является частным случаем системы дифференциально-разностных уравнений Колмогорова-Чепмена (из которых получается путем предельного перехода при $\Delta t \to 0$ для однородных по времени марковских процессов [7]), уравнения которой имеют вид:

$$p_{i,k}(t+\Delta t) = \sum_m p_{i,m}(t) \cdot p_{m,k}(\Delta t), \ \Delta t > 0, \ \forall i,k, \tag{3.42}$$

где $p_{i,k}(t) = P$ {в момент t система будет содержать k требований при условии что в момент $t = 0$ в системе было i требований}.

Система уравнений рождения и гибели отличается от системы (3.42) тем, что переходы возможны только из соседних состояний:

$$\begin{cases} p_{i,k}(t+\Delta t) = p_{i,k-1}(t) \cdot p_{k-1,k}(\Delta t) + p_{i,k}(t) \cdot p_{k,k}(\Delta t) + \\ \qquad\qquad + p_{i,k+1}(t) \cdot p_{k+1,k}(\Delta t), \ (k \ge 1); \\ p_{i,0}(t+\Delta t) = p_{i,0}(t) \cdot p_{i,0}(\Delta t) + p_{i,1}(t) \cdot p_{1,0}(\Delta t). \end{cases} \tag{3.43}$$

Из системы (3.43) при $i = 0$ с точностью до обозначений предельным переходом по $\Delta t \to 0$ после соответствующих преобразований легко получить систему (3.35). Решение системы (3.35) можно найти, например, операционным методом [5] (см. приложение 8, с. 112).

3.3.1. Входящий поток требований

Пуассоновский поток

В подавляющем большинстве работ по ТМО рассматривается **пуассоновский** поток требований

$$V_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \ k = 0,1,\ldots,$$

где параметр λ определяется как математическое ожидание числа требований, поступающих в СМО в единицу времени (или плотность потока, или интенсивность).

Основание: а) количественная оценка качества функционирования СМО выражается в простых, относительно других видов потоков, аналитических зависимостях; б) при расчете показателей эффективности полученные результаты, как правило, отражают наиболее сложный случай (то есть показатели эффективности имеют более надежные значения).

Если пуассоновский поток нестационарный, то есть $\lambda = \lambda(t)$, то для расчетов либо весь временной интервал $[0, T)$ разбивается на n временных отрезков, вообще говоря, неравных, и для каждого из них находятся $\lambda_i(t) = \lambda_i \cdot t$, где $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $\sum_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i) = T$, либо используются численные методы. В зависимости от поставленной цели выбирается аналитический подход либо численный.

Пуассоновский поток является одним из основных в процессах восстановления. Процессы восстановления изучает **теория восстановления**.

Например, имеется агрегат, состоящий из неограниченного числа функционально идентичных технических устройств. Первое устройство включается в работу в момент времени $t = t_0$ и работает случайное время T_1. В момент отказа оно мгновенно восстанавливается (или заменяется идентичным) и работает случайное время T_2 и т.д.

Процесс, функция $\xi(t)$ которого численно равна числу отказов устройства за время $t \in [0, T]$, называется **процессом восстановления**. В частности, если для фиксированного t случайная величина $\xi(t)$ имеет экспоненциальное распределение $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda \cdot \tau}$, $\tau \in [0, t]$, то процесс восстановления называется **однородным** пуассоновским процессом.

В теории восстановления обычно рассматриваются следующие характеристики процесса:

1) продолжительность времени t_k до k-го отказа;

2) функция восстановления $H(t)$, определяющая среднее число отказов устройств за время t;

3) плотность восстановления $\lambda(t) = (H(t))_t{}'$;

4) «возраст» устройства, достигнутый им за время t и не связанный с потоком восстановления;

5) остаточное время «жизни» элемента до первого отказа.

Рекуррентный поток

Рекуррентным называется поток с **ограниченным последействием** [5, 6] - последовательность моментов δ_k поступлений требований (см. рис. 3.4, с. 54), которая образована независимыми случайными величинами ξ_k с функциями распределения $F_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$.

Если все $F_k(t)$ (за исключением может быть $F_1(t)$) совпадают, то есть $\forall k$, $F_k(t) = F(t)$, $F(+0) < 1$, то последовательность моментов δ_k образует **процесс восстановления**. Следовательно, процесс восстановления - понятие более узкое, чем понятие потока с ограниченным последействием, но более широкое, чем простейший поток.

Часто поток с ограниченным последействием определяют как поток, у которого случайные интервалы $T_k = [\delta_k, \delta_{k+1})$ между соседними по времени моментами поступления требований, считаются независимыми случайными величинами.

Стационарный поток с ограниченным последействием называется **потоком Пальма**. Легко понять, что для него все случайные интервалы T_k должны иметь одну и ту же функцию распределения.

Примером потока Пальма является простейший поток (для потока, независимого от времени - это геометрическое распределение, для непрерывного времени - это пуассоновский поток).

Случайный стационарный поток, у которого все интервалы T_k имеют нормальное (при $t \geq 0$) распределение, является потоком Пальма (ясно, что последействие здесь имеется).

Потоки Эрланга

Поток Пальма, у которого интервалы времени между поступлениями требований являются случайной величиной с функцией распределения Эрланга

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!}, \ \lambda > 0, \tag{3.44}$$

называется потоком Эрланга порядка k, $k = 1,2,...$.

В частности, поток Эрланга 1-го порядка является простейшим потоком, то есть

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$

Пусть требования, поступающие в систему, образуют простейший поток. Потоку Эрланга порядка k будет удовлетворять каждое k-е требование из множества поступивших требований простейшего потока. То есть поток Эрланга является разряженным простейшим потоком. Например, если у поступивших по закону простейшего потока в СМО требований учитывать каждое второе, то получаем поток Эрланга 2-го порядка с функцией распределения:

$$F_2(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} - (\lambda \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Следовательно, промежутки времени $T^{(2)}, T^{(3)}, ...$ между поступлениями соседних требований являются случайными с функцией распределения Эрланга 2-го порядка и равны $T^{(2)} = T_1 + T_2$, $T^{(3)} = T_3 + T_4$ и т.д.

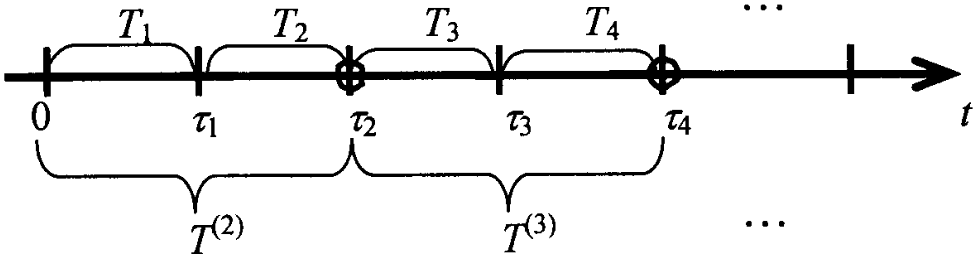

Рис. 3.7

С помощью потоков Эрланга можно моделировать потоки Пальма с различным последействием.

В самом деле, при $k = 1$ получаем простейший поток (у него нет последействия). При увеличении k (до 10÷20) получаем поток Пальма с интервалами между поступлениями требований (как показывают многочисленные эксперименты), распределенными практически нормально. При $k \to \infty$ получаем регулярный (неслучайный) поток [6].

Требование ограниченности последействия слабее, чем отсутствие последействия и, следовательно, охватывает более широкий круг практических задач.

Для практического анализа важно знать, к какому виду можно отнести реальные потоки требований. В анализ входит нахождение функции распределения, управляющей входящим потоком и/или оценка ее параметров. Для этого необходимо:

1) выбрать интервал времени, в течение которого поток требований практически стационарный;

2) весь интервал разделить на достаточное число полуоткрытых непересекающихся промежутков, внутри каждого из которых подсчитывается число поступивших требований;

3) построить гистограмму и найти эмпирическую функцию распределения;

4) выдвинуть гипотезу о теоретическом аналоге эмпирического распределения;

5) используя критерий χ^2 (Пирсона) и/или Колмогорова сделать вывод о соответствии или несоответствии выдвинутой гипотезы данной выборке;

6) в случае отрицательного результата или проверяется репрезентативность выборки, или отвергается гипотеза.

Пример. В магазин «*Кор и Дор*» приходят потенциальные покупатели. Требуется проверить гипотезу о том, что входящий поток требований (покупателей) имеет распределение Пуассона.

Для этого проведем статистическое исследование, которое состоит в нахождении параметров эмпирической функции распределения и ее построении.

Уже с 1-го этапа построение математической модели существенно зависит от начальных условий, а именно кого понимать под покупателями? Наиболее распространен случай, когда учитываются те посетители магазина, которые делают покупку. Именно его мы и рассмотрим.

Зададим временной интервал *T*, внутри которого зафиксированы моменты прихода каждого посетителя. Окончательно составляем выборку, в которой учтено только число посетителей магазина, которые сделали покупку. Используя статистические методы, временной интервал *T* делим на *n* интервалов, $t = T / n$.

Обозначим через m_i число интервалов *t*, «содержащих» *i* покупателей (то есть число временных промежутков длиной *t*, в каждый из которых пришло *i* покупателей).

Найдем среднее число покупателей, приходящихся на промежуток времени *t*:

$$\alpha t = \left(\sum_{i=1}^{r} i \cdot m_i \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \right), \tag{3.45}$$

где *r* - номер интервала, следующего за интервалом, которого нет (то есть нет интервалов с числом покупателей более, чем *r*).

Находим относительную частоту W_i числа *i* покупателей в интервале *i*:

$$W_i = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^{r} m_j}, \; i = 0,1,2,...,r.$$

Вычисляем теоретические вероятности p_i того, что за промежуток времени *t* за покупками явилось *i* покупателей. В соответствии с пуассоновским процессом имеем:

$$p_i = \frac{(\alpha t)^i}{i!} \cdot e^{-\alpha t}, \; i = 0,1,2,...,12.$$

Пусть время наблюдения составляет 300 мин. Весь интервал разобьем на $n = 100$ одинаковых полуоткрытых интервалов $t = 3$ мин.

Полученные значения сводим в таблицу 3.7. Для заполнения третьей колонки таблицы 3.7 находим математическое ожидание числа пришедших покупателей за промежуток $t = 3$ мин. Из формулы (3.45) имеем

$$\alpha t = 4{,}6.$$

Применим критерий χ^2:

$$\chi^2 = n \cdot \sum_i (W_i - p_i)^2 / p_i \approx 3{,}84.$$

Учитывая, что в распределении Пуассона один параметр, получаем степеней свободы $r = n - 1 - 1 = 12 - 1 = 11$.

По таблице для распределения χ^2 (см. приложение 5, с. 105) определяем вероятность p того, что распределение является пуассоновским из уравнения:

$$\chi^2(11, p) = 3{,}84.$$

Окончательно получаем $p = 0{,}98$. Совпадение более чем хорошее!

Таблица 3.7

№	Число покупателей в интервале $t = 3$ мин.	Число интервалов, содержащих i покупателей, m_i	Значение вероятностей пуассоновского распределения, p_i	Относительная частота, W_i
1	0	0	0,010	0
2	1	5	0,043	0,05
3	2	11	0,106	0,11
4	3	13	0,163	0,13
5	4	22	0,187	0,22
6	5	18	0,172	0,18
7	6	14	0,132	0,14
8	7	9	0,087	0,09
9	8	4	0,050	0,04
10	9	2	0,026	0,02
11	10	1	0,012	0,01
12	11	1	0,005	0,01
13	12	0	0,002	0

Вывод. Гипотеза о пуассоновском распределении прихода покупателей в магазин не противоречит опытным данным и может быть принята.

Замечание. В рассмотренном примере интенсивность входящего потока требований $\alpha t = 4{,}6$. За единицу времени принят промежуток $t = 3$ мин. Хотя обычно за временную единицу принимают стандартную, в нашем случае $\alpha = 4{,}6/3 \approx 1{,}53$ 1/мин.

3.3.2. Время обслуживания (выходящий поток требований)

Время обслуживания $t_{обс}$ является важнейшей статистической характеристикой, поскольку определяет пропускную способность СМО. Обычно это случайная величина η с функцией распределения

$$F(t) = P\{\eta < t\}.$$

В практических приложениях наиболее распространен экспоненциальный закон обслуживания требований:

$$F(t) = 1 - \exp(-\beta \cdot t),$$

где интенсивность $\beta = 1/t_{обс}$.

Время обслуживания требования $t_{обс}$ числено равно математическому ожиданию времени обслуживания.

Экспоненциальная функция распределения наиболее приближена к таким реальным случайным процессам, в которых большинство требований обслуживается быстро, что на практике не всегда выполняется.

Пусть в СМО, состоящую из *n* разнотипных приборов, поступает случайный поток требований, каждое из которых обслуживают все приборы. Если время обслуживания определяется экспоненциальным законом распределения с интенсивностью β_k и обслуживание требования заканчивается, если его обслуживание закончил первый из приборов обслуживания, то функция распределения будет экспоненциальной

$$F(t) = 1 - \exp(-\beta \cdot t),$$

где $\beta = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$.

В частности, если все обслуживающие устройства - одинаковые, то их суммарная интенсивность (для экспоненциального закона) $\beta = n \cdot \beta_0$, где $\beta_0 = 1/t_{обс}$, $t_{обс}$ - среднее время обслуживания требования любым из n устройств. Тогда

$$F(t) = 1 - \exp(-n \cdot \beta_0 \cdot t),$$

то есть при одинаковых обслуживающих устройствах среднее время обслуживания требования уменьшается в n раз, а дисперсия - в n^2 раз.

Это свойство справедливо **только** для экспоненциального распределения.

Более общим является эрланговская функция распределения времени обслуживания (3.44) (см. с. 73).

Для стационарного режима функционирования СМО с отказами справедливы формулы Эрланга для любых функций распределения времени обслуживания требований [6].

Для большинства СМО суммарное время обслуживания требований образует входящий поток, поэтому его важность для СМО не так существенна, поскольку практически не влияет на ее функционирование.

Однако входящий поток сразу становится важным, если он сам является входящим для других приборов. Это **многофазовое** обслуживание: требование обслуживается последовательно, переходя от одного прибора к другому.

Если начальный поток требований пуассоновский, то, проходя последовательно через обслуживающие устройства, поток искажается, постепенно «усиливая» последействие.

Наличие и влияние последействия в потоке поступающих требований на вероятность отказа ему в дальнейшем обслуживании (или потери) доказана [7, 10]. Смысл этих теорем в том, что на каждый следующий прибор поступает поток требований все более искаженным (неудобным для описания). Возникает вероятность потери требования за счет того, что на последующие приборы поступают все те требования, которые поступали слишком быстро - одно за другим, следовательно, потоки, которым свойственны поступления за короткий срок сразу нескольких требований, становятся все более хаотичными.

3.3.3. Показатели эффективности

Под эффективностью функционирования СМО понимают числовые значения набора показателей (функций), характеризующих уровень выполнения заложенных в нее задач.

Ранее в ***Модели 1*** (рис. 3.5, с. 61) были приведены показатели эффективности, дающие количественную оценку СМО. Во многих СМО требуется использовать экономические показатели, например:

$q_{об}$ - стоимость обслуживания каждого требования в системе в единицу времени;

$q_{ож}$ - стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени;

$q_у$ - стоимость потерь, связанных с уходом требования из системы в единицу времени;

$q_з$ - стоимость эксплуатации каждого обслуживающего устройства в единицу времени;

$q_{пр}$ - стоимость простоя обслуживающего устройства в единицу времени.

При выборе оптимальных значений параметров СМО экономические показатели могут быть достаточно эффективны.

Можно использовать функцию потерь $G_Э$ за определенный временной промежуток T (например, месяц):

1) для систем с ожиданием:

$$G_Э = (q_{ож} \cdot A + q_{пр} \cdot B_{пр} + q_з \cdot B_з) \cdot T\,, \tag{3.46}$$

где A - средняя длина очереди, $B_{пр}$ - среднее число свободных приборов, $B_з$ - среднее число занятых приборов;

2) для систем с отказами (ограничения на длину очереди):

$$G_Э = (q_у \cdot p_п \cdot \alpha + q_з \cdot B_з) \cdot T\,;$$

3) для смешанных систем:

$$G_Э = (q_{ож} \cdot A + q_{пр} \cdot B_{пр} + q_з \cdot B_з + q_у \cdot p_п \cdot \alpha) \cdot T\,.$$

Можно применить показатель экономической эффективности системы

$$E = p_{обс} \cdot \alpha \cdot c \cdot T - G_Э\,,$$

где c - экономический эффект, полученный при обслуживании каждого требования в единицу времени, $p_{обс}$ - вероятность обслуживания требования (для систем с отказами).

При анализе функционирования и определении оптимального варианта в качестве параметров используют:

n - число приборов (обслуживающих устройств);

α - интенсивность входящего потока;

β - интенсивность обслуживания требований;

λ - интенсивность отказов обслуживающего устройства;

μ - интенсивность восстановления отказавшего устройства;

m - число восстанавливающих устройств в системе и др.

4. Системы массового обслуживания с ожиданием

СМО с ожиданием можно разбить на две группы: а) разомкнутые; б) замкнутые.

Разомкнутые системы предполагают, что источник входящих требований - неиссякаемый, например, поток клиентов в парикмахерские, магазины; звонков на АТС и др. Замкнутые системы всегда имеют ограниченный поток требований, например, выход прибора из строя и его восстановление.

Рассмотрим СМО на применение ***Модели 1***, описывающую системы с ожиданием с неограниченным потоком требований (см. с. 61).

Требуется проанализировать эффективность работы СМО, то есть, вычислить показатели эффективности, сформулированной ***Модели 1***, которые дополним экономическим показателем функции потерь $G_Э$ (3.46).

Пример. Станция «Железная дорога» в мегаполисе принимает составы для разгрузки угля на $n=5$ платформах. В среднем за сутки на станцию прибывают 16 составов с углем. Поступление носит случайный характер. Плотность прихода составов показала, что поступление на разгрузку удовлетворяет пуассоновскому потоку с параметром $\alpha = 2/3$ состава в час. Время разгрузки состава является случайной величиной, удовлетворяющей экспоненциальному закону со средним временем разгрузки $t_{ср} = 6$ час. Простой состава в сутки составляет $q_{ож} = 100$ у.е; простой платформы в сутки за опоздание прихода состава - $q_{пр} = 1000$ у.е; стоимость эксплуатации платформы в сутки - $q_з = 1000$ у.е. Подсчитать издержки за сутки. Требуется провести анализ эффективности функционирования станции.

Решение. Условие существования решения $\alpha/(n\cdot\beta) = 0{,}8 < 1$ выполнено. Имеем $n=5$, $\alpha = 16$ 1/сутки, $\beta = 4$ 1/сутки. В соответствие с моделью показателями эффективности являются (см. с. 66):

1) Вероятность того, что станция свободна

$$p_0 = 0{,}013;$$

Это означает, что в течение суток станция свободна ≈19 мин.

2) Вероятность того, что все платформы заняты

$$\Pi \approx 0{,}556,$$

то есть около 13 час. 20 мин. все платформы заняты.

3) Время ожидания разгрузки для каждого состава в среднем $t_{ож} \approx 3$ час;

4) Вероятность того, что время ожидания в очереди больше среднего

$$P\{\tau > 3\} \approx 0{,}33,$$

то есть каждый третий состав ожидает больше 3-х часов.

5) Средняя длина очереди

$$A \approx 2{,}2;$$

Очередь всегда есть. Подъездные пути необходимо дублировать.

6) Среднее число занятых платформ

$$B \approx 4;$$

7) Среднее число составов на станции

$$R = 6{,}2;$$

8) Среднее время нахождение состава на станции

$$L = t_{ож} + t_{ср} \approx 9{,}02;$$

9) Коэффициент загрузки станции

$$K_3 = 0{,}80;$$

10) Коэффициент простоя

$$K_{пр} = 0{,}20.$$

В среднем каждая платформа простаивает 20 % времени.

Для изменения времени простоев будем варьировать число платформ $n = 5 \div 8$. Результаты расчетов сведем в таблицу 4.1.

Из таблицы 4.1 следует, что при числе платформ $n = 6$ почти в 4 раза снижается время ожидания разгрузки, а число составов, ожидающих разгрузки, уменьшается до 1,74.

Таблица 4.1

№	Показатели	Платформы			
		5	6	7	8
1	p_0	0,013	0,017	0,18	0,182
2	Π	0,555	0,29	0,136	0,058
3	$t_{ож}$, ч	3,3	0,87	0,27	0,09
4	A	2,2	1,74	0,42	0,12
5	R	6,2	4,42	3,76	3,76
6	B	3,96	3	2	1
7	$K_{пр}$	0,2	0,3	0,43	0,48

Дальнейшее увеличение числа платформ хотя и улучшает показатели, но для окончательного ответа проведем экономические расчеты. Определим суммарные потери за сутки. За лучший (субоптимальный) вариант примем тот, для которого издержки наименьшие.

Имеем из формулы (3.46) $G_Э = \alpha \cdot t_{ож} \cdot q_{ож} + K_{пр} \cdot n \cdot q_{пр} + K_з \cdot n \cdot q_з$. Результаты расчетов приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

№	Показатели	Платформы			
		5	6	7	8
1	$t_{ож}$, ч	3,3	0,87	0,27	0,09
2	$\alpha \cdot t_{ож} \cdot q_{ож}$	5333	1740	540	180
3	$K_{пр}$	0,2	0,3	0,4	0,48
4	$K_{пр} \cdot n \cdot q_{пр}$	1000	1800	3010	3840
5	$K_з \cdot n \cdot q_з$	4000	4800	5600	6400
6	$G_Э$	10240	8340	11150	10420

Из таблицы 4.2 следует, что наиболее экономичным оказался вариант с $n = 6$ платформами.

Замечание. При применении экономического показателя важно правильно оценить реальные издержки, которые могут изменяться, например, от времени года, объема запасов угля и др. Приведенные исходные данные демонстрируют скорее метод анализа, чем претензии на соответствие реально существующим издержкам.

5. Модели систем массового обслуживания для выполнения практической работы

5.1. Оформление и содержание работы

Работа выполняется на стандартном листе формата А4. Текст набирают на компьютере. Общий объем - не менее 10 стр. Работа включает титульный лист (1 стр.); оглавление (1 стр.); введение (1,5-2 стр.); постановку задачи (0,5 стр.); математическую модель (1,5-2 стр.); расчеты (программу) и числовые результаты (3-5 стр.); анализ результатов (1 стр.); варианты расчетов и выводы (1-2 стр.), список литературы.

Титульный лист. Образец титульного листа приведен в прил. 9 (см. с. 115).

Введение состоит из вводной части описания отрасли промышленности или сельского хозяйства, к которым относится поставленная задача. Дается ее общая характеристика. Обосновывается необходимость применения математического аппарата ТМО как одного из возможных подходов к анализу эффективности функционирования изучаемого объекта. Приводятся примеры реальных задач, в которых может быть использована выбранная модель.

Постановка задачи. По выбранной модели студент формулирует задачу, которая состоит из словесной формулировки функционального состояния объекта без математической терминологии с указанием значений параметров (числа приборов, времени обслуживания, таблиц, статистических данных и их обработки и др.). Задаются значения (в рублях) потерь от эксплуатации, простоев и прочих отдельных элементов изучаемого объекта (см. раздел 4).

Математическая модель. Для поставленной задачи выбирается подходящая математическая модель (см. раздел 5.2). Выбранная математическая модель переписывается (вместе с показателями эффективности и экономическим показателем) и дополняется числовыми значениями параметров одинаковой размерности.

Расчеты и числовые результаты. Прилагается компьютерная программа и числовые значения показателей эффективности с объяснением введенных обозначений. Если программа отсутствует, то выполняется подробный расчет показателей эффективности.

Анализ результатов. По каждому показателю эффективности необходимо привести личные комментарии о его значимости, связи с другими показателями и недостатках (см. раздел 4).

Выводы содержат расчет для других значений параметров, повышающих эффективность работы изучаемого объекта, если такое возможно. За окончательный результат взять тот, который, например, минимизирует потери. Приводится обоснование выбора.

5.2. Примеры моделей СМО

Модель 1 (системы с ожиданием)

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований на обслуживание интенсивностью α. Время обслуживания каждого требования - случайное с экспоненциальной функцией распределения и интенсивностью обслуживания β. Если требование, поступившее в систему, застает все приборы занятыми, то оно встает в очередь и ждет до тех пор, пока прибор не освободится. В каждый момент времени любой прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать СМО.

Обозначим через p_k вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k), $k = 0,1,...$.

В соответствие с моделью имеем граф состояний СМО (рис. 5.1).

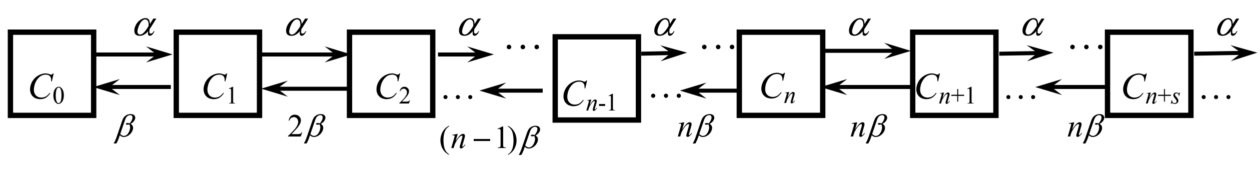

Рис. 5.1

По данной схеме получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1 = 0, \\ -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot p_k + \alpha \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \beta \cdot p_{k+1} = 0,\ 0 < k \le n-1, \\ -(\alpha + n \cdot \beta) \cdot p_n + \alpha \cdot p_{k-1} + n \cdot \beta \cdot p_{k+1} = 0,\ k \ge n. \end{cases}$$

Для того чтобы система имела единственное решение, добавим условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

которое является естественным следствием модели.

Таким образом, при естественном ограничении $\alpha/(n \cdot \beta) < 1$ решение системы линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{n! \cdot (n \cdot \beta - \alpha)} \right)^{-1};$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(\alpha/\beta)^k}{k!} \cdot p_0, & k = 1,2,\dots,n-1; \\ \dfrac{(\alpha/\beta)^k}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot p_0, & k = n, n+1, \dots. \end{cases}$$

Определим показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 - вероятность того, что все приборы свободны:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{(n-1)! \cdot (n - \alpha/\beta)} \right)^{-1},\ (\alpha/(n \cdot \beta) < 1);$$

2) p_k - вероятность того, что из *n* приборов занято обслуживанием *k* приборов (то есть, в системе находится *k* заявок):

$$p_k = (\alpha/\beta)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot p_0,\ k = 1,2,\dots,n-1;$$

3) Π - вероятность того, что все приборы системы заняты ($k \ge n$):

$$\Pi = \frac{(\alpha/\beta)^n}{(n-1)! \cdot (n - \alpha/\beta)} \cdot p_0;$$

4) p_{n+s} - вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и в очереди s заявок:

$$p_{n+s} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+s}}{n!\cdot n^s} \cdot p_0,\ s = 0,1,\ldots\ ;$$

5) $t_{ож}$ - среднее время, в течение которого требование ждет начала обслуживания:

$$t_{ож} = \frac{\Pi}{n \cdot \beta - \alpha};$$

6) вероятность того, что время ожидания в очереди больше среднего $t_{ож}$:

$$P\{\tau > t_{ож}\} = \Pi \cdot \exp\left(-(n \cdot \beta - \alpha) \cdot t_{ож}\right);$$

7) A - средняя длина очереди:

$$A = \sum_{s=1}^{\infty} s \cdot p_{n+s} \ \text{ или } \ A = \frac{(\alpha/(n \cdot \beta)) \cdot p_n}{(1 - \alpha/(n \cdot \beta))^2};$$

8) B - среднее число требований, находящихся в системе:

$$B = A + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p_k + n \cdot \Pi \ \text{ или } \ B = A + \frac{n \cdot p_n}{1 - \alpha/(n \cdot \beta)} + p_0 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\alpha/\beta)^k}{(k-1)!};$$

9) $\aleph_0$ - среднее число свободных приборов:

$$\aleph_0 = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k;$$

10) $\aleph_з$ - среднее число приборов, занятых обслуживанием:

$$\aleph_з = n - \aleph_0;$$

11) R - среднее число обслуживаемых требований:

$$R = \aleph_з;$$

12) $K_{пр}$ - коэффициент простоя приборов:

$$K_{пр} = \frac{\aleph_0}{n};$$

13) $K_з$ - коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{\aleph_з}{n};$$

14) $G_Э$ - суммарные потери за отчетный период T:

$$G_Э = T \cdot (A \cdot q_1 + \aleph_0 \cdot q_2 + \aleph_з \cdot q_3),$$

где q_1 - стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени; q_2 - стоимость потерь за простой обслуживающего устройства в единицу времени; q_3 - стоимость эксплуатации прибора при обслуживании требований в единицу времени.

***Модель 2* (системы с ограниченным временем ожидания)**

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований двух видов на обслуживание интенсивностью α_1 и α_2 соответственно. Поступившее в систему требование 1-го вида может покинуть систему только после обслуживания, а требование 2-го вида, застав все приборы занятыми, сразу покидает систему. Время обслуживания любых требований является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью обслуживания β. В любой момент времени каждый прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать эффективность функционирования СМО.

Обозначим через p_k вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k), $k = 0,1,2,...$.

В соответствие с моделью имеем размеченный граф состояний системы (рис. 5.2).

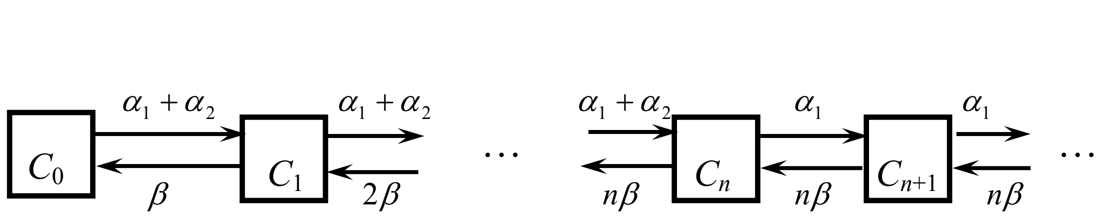

Рис. 5.2

Для нахождения вероятностей p_k из графа состояний получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -(\alpha_1+\alpha_2)\cdot p_0+\beta\cdot p_1=0, \\ -(\alpha_1+\alpha_2+k\cdot\beta)\cdot p_k+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot p_{k-1}+(k+\beta)\cdot p_{k+1}=0,\ 0<k\le n, \\ -(\alpha_1+n\cdot\beta)\cdot p_n+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot p_{n-1}+n\cdot\beta\cdot p_{n+1}=0, \\ -(\alpha_1+n\cdot\beta)\cdot p_k+\alpha_1\cdot p_{k-1}+n\cdot\beta\cdot p_{k+1}=0,\ k>n. \end{cases}$$

Условие нормировки, являющееся следствием модели, имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Система уравнений с учетом условия нормировки имеет единственное решение:

$$p_0=\frac{n-\lambda_1}{(n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2))\cdot D_n(\lambda_1+\lambda_2)};$$

$$p_k=\begin{cases} \dfrac{(n-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)^k\cdot D_n(\lambda_1+\lambda_2)}{n-\lambda_1+\lambda_2\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)\cdot k!}, & 0<k\le n; \\ \dfrac{(n-\lambda_1)\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}{n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\left(\dfrac{\lambda_1}{n}\right)^{k-n}, & k>n, \end{cases}$$

где $\lambda_1=\alpha_1/\beta$, $\lambda_2=\alpha_2/\beta$,

$$D_n(\lambda_1+\lambda_2)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!},\ E_n(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{D_n(\lambda_1+\lambda_2)\cdot n!}.$$

Используя вероятности p_k, получим следующие показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 - вероятность того, что в СМО нет требований,

$$p_0=\frac{n-\lambda_1}{(n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2))\cdot D_n(\lambda_1+\lambda_2)};$$

2) p_k - вероятность того, что *k* приборов занято обслуживанием, $0<k\le n$,

$$p_k=\frac{(n-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)^k\cdot D_n(\lambda_1+\lambda_2)}{(n-\lambda_1+\lambda_2\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2))\cdot k!};$$

3) p_k - вероятность того, что *k* требований находится в системе при условии $k>n$,

$$p_k = \frac{(n-\lambda_1)\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}{n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{n}\right)^{k-n};$$

4) $p_{отк}$ - вероятность потери требования,

$$p_{отк} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \frac{n\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}{n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)};$$

5) $P\{\tau_1 > t\}$ - вероятность того, что время ожидания τ_1 требования 1-го типа больше заданного t,

$$P\{\tau_1 > t\} = p_{отк}\cdot\exp\bigl(-(n-\lambda_1\alpha)\cdot\beta\cdot t\bigr);$$

6) $t_{ож}$ - среднее время ожидания обслуживания требованием 1-го типа,

$$t_{ож} = \frac{p_{отк}}{\beta\cdot(n-\lambda_1)};$$

7) $\aleph_з$ - среднее число занятых приборов,

$$\aleph_з = \sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n\cdot p_k;$$

8) $\aleph_c$ - среднее число свободных приборов,

$$\aleph_c = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\cdot p_k;$$

9) $K_{пр}$ - коэффициент простоя приборов,

$$K_{пр} = \frac{\aleph_c}{n};$$

10) $K_з$ - коэффициент загрузки приборов,

$$K_з = \frac{\aleph_з}{n};$$

11) $G_Э$ - суммарные потери за отчетный период T,

$$G_Э = T\cdot(\alpha_2\cdot p_{отк}\cdot q_1 + \aleph_p\cdot q_2 + \aleph_c\cdot q_3),$$

где q_1 - упущенная выгода от потери требования в единицу времени; q_2 - потери от простоя обслуживающего прибора в единицу времени; q_3 - потери, связанные с эксплуатацией прибора в единицу времени.

Модель 3 **(системы с ограничением на длину очереди)**

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований интенсивностью α. Каждое вновь поступившее требование, застав все приборы занятыми, становится в очередь тогда и только тогда, когда в ней находится менее m требований, иначе теряется. Время обслуживания каждого требования - случайное, распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью обслуживания β. В любой момент времени каждый прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать эффективность функционирования такой СМО.

Обозначим через p_k вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k) $k = 0,1,2,...,n+m$.

Запишем функционирование СМО в виде размеченного графа состояний (рис. 5.3).

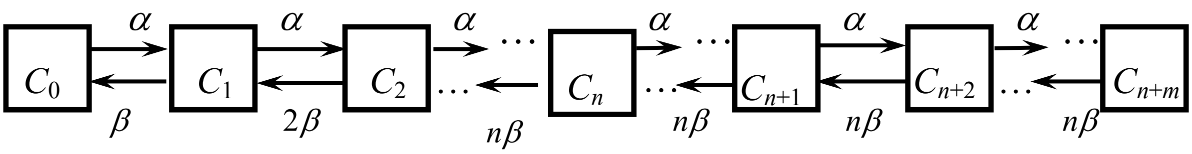

Рис. 5.3

Для стационарного режима на основании метода декомпозиции получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1 = 0, \\ -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot p_k + \alpha \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \beta \cdot p_{k+1} = 0,\ 0 < k \le n-1, \\ -(\alpha + n \cdot \beta) \cdot p_{n+s} + \alpha \cdot p_{n+s-1} + n \cdot \beta \cdot p_{n+s+1} = 0,\ 0 \le s < m \\ -n \cdot \beta \cdot p_{n+m} + \alpha \cdot p_{n+m-1} = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы решение системы было единственным, добавим условие нормировки, являющееся следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1.$$

Исходя из найденных значений вероятностей p_k, имеем следующие показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 - вероятность того, что СМО свободна,

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^k + \frac{(\alpha/\beta)^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\alpha/\beta}{n} \right)^k \right)^{-1};$$

2) p_k - вероятность того, что из n приборов занято обслуживанием k приборов,

$$p_k = \frac{(\alpha/\beta)^k}{k!} \cdot p_0, \ k = 1,2,...,n;$$

3) p_{n+s} - вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и s требований находятся в очереди,

$$p_{n+s} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+s}}{n! \cdot n^s} \cdot p_0, \ s = 0,1,...,m;$$

4) $p_{отк}$ - вероятность отказа требованию в обслуживании,

$$p_{отк} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+m}}{n! \cdot n^m} \cdot p_0;$$

5) $B_з$ - среднее число требований, занятых обслуживанием,

$$B_з = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + n \cdot \sum_{k=1}^{m} p_{n+k};$$

6) B_c - среднее число свободных приборов,

$$B_c = n - B_з;$$

7) $K_з$ - коэффициент загрузки приборов,

$$K_з = \frac{B_з}{n};$$

8) $K_{пр}$ - коэффициент простоя приборов,

$$K_{пр} = \frac{B_c}{n};$$

9) A - средняя длина очереди,

$$A = \sum_{k=1}^{m} k \cdot p_{n+k} \ ;$$

10) $G_Э = T \cdot (\alpha \cdot p_{отк} \cdot q_0 + B_з \cdot q_з + B_c \cdot q_c)$,

где - q_0 - стоимость потерь, связанных с отказом требованию в обслуживании (упущенная выгода) в единицу времени; $q_з$ - стоимость потерь, связанных с эксплуатацией прибора в единицу времени; q_c - стоимость потерь, связанных с простоем прибора в единицу времени; T - отчетный период (обычно месяц).

Данная модель может быть использована при анализе эффективности работы предприятий сферы бытового обслуживания с нетерпеливыми клиентами.

Модель 4 (замкнутые системы, анализ)

СМО состоит из n идентичных приборов, каждый из которых выходит из строя в случайные моменты времени с интенсивностью λ. В случае выхода прибора из строя он начинает сразу восстанавливаться одним из m свободных восстанавливающих устройств (ВУ) с интенсивностью μ. Если все ВУ заняты, то прибор встает в очередь и ждет до тех пор, пока не освободится ВУ. Каждое ВУ в любой момент времени может восстанавливать не более одного прибора. Требуется оценить надежность работы системы и дать предложения по повышению эффективности ее функционирования.

Обозначим через p_k вероятность того, что k приборов находятся в состоянии отказа (состояние C_k). Представим модель в виде размеченного графа состояний СМО (рис. 5.4).

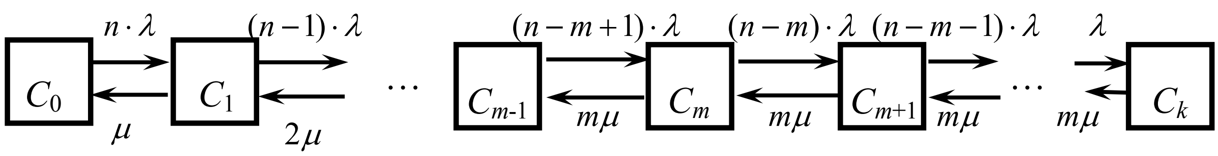

Рис. 5.4

По графу состояний записываем систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} n \cdot \lambda \cdot p_0 - \mu \cdot p_1 = 0, \\ (n-k) \cdot \lambda \cdot p_{k-1} - k \cdot \mu \cdot p_k = 0,\ 1 < k \le m, \\ (n - k \cdot \lambda) \cdot p_{k-1} - m \cdot \mu \cdot p_k = 0,\ m < k < n, \\ \lambda \cdot p_{n-1} - m \cdot \mu \cdot p_n = 0. \end{cases}$$

Для единственности решения системы уравнений добавим условие нормировки, являющееся следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

Тогда решение системы запишется в виде:

$$p_0 = \left(n! \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i \cdot (n-i)!} + \frac{n!}{m!} \cdot \sum_{i=m+1}^{n} \frac{(\lambda/\mu)^i}{(n-i)! \cdot m^{i-m}} \right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot \delta_m^k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \cdot p_0, \text{ где } \delta_m^k = \begin{cases} k!, & k \le m; \\ m! \cdot m^{n-k}, & m < k \le n. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующие показатели эффективности:

1) p_0 - вероятность того, что СМО свободна (все приборы работают);

2) p_k - вероятность того, что n приборов k находятся в состоянии отказа;

3) B - среднее число работающих приборов,

$$B = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot p_k;$$

4) D - среднее число неработающих приборов,

$$D = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k;$$

5) $K_{пр}$ - коэффициент надежности системы,

$$K_{пр} = \frac{M}{n};$$

6) $G_Э$ - суммарные потери за отчетный период T,

$$G_Э = T \cdot \left(c_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-m-1} (n-k) \cdot p_k + c_2 \cdot \sum_{k=n-m}^{n} (m+k-n) \cdot p_k \right),$$

где c_1 - стоимость часа полезного времени работы машины; c_2 - стоимость часа содержания восстанавливающего устройства.

Модель 5 (замкнутые системы, синтез)

Имеется непрерывно работающий прибор, состоящий из m модулей. В процессе работы прибора модули могут выходить из строя в случайные моменты времени. Время наработки машины на отказ является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения и параметром $\lambda = 1/t_{ср}$, $t_{ср}$ - среднее время работы машины до отказа.

В случае выхода модуля из строя он мгновенно заменяется одним из n запасных, если такой имеется, иначе прибор останавливается. Вышедший из строя модуль попадает в ремонт, где восстанавливается одним из r восстанавливающих устройств (операторов). Время восстановления является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения и интенсивностью восстановления $\mu = 1/t_{обс}$, $t_{обс}$ - среднее время восстановления одного модуля. Восстановленные модули возвращаются в резерв. Требуется оценить эффективность работы прибора.

Пусть p_k вероятность того, что в приборе k неисправных модулей (состояние C_k), $k = 0,1,...n$, а p_{n+1} вероятность того, что прибор не может работать (отсутствуют исправные модули для замены вновь вышедшего - состояние C_{n+1}). Построим размеченный граф возможных состояний прибора (рис. 5.5).

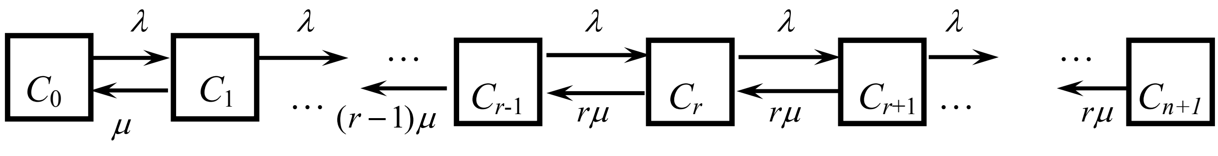

Рис. 5.5

Получаем систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0, \\ -(\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0,\ 0 < k < r-1, \\ -(\lambda + r \cdot \mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + r \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0,\ r \le k < n+1, \\ -r \cdot \mu \cdot p_{n+1} + \lambda \cdot p_n = 0. \end{cases}$$

Условие нормировки, являющееся следствием модели, имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_k = 1.$$

Решая систему (с учетом условия нормировки), получаем:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} \cdot \sum_{k=1}^{n-r+1} \left(\frac{\lambda}{r \cdot \mu} \right)^k \right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \cdot p_0,\ 1 \le k < r;$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^{k+r}}{r! \cdot r^{k-r}} \cdot p_0,\ r \le k \le n+1.$$

Вычислим показатели эффективности, исходя из найденных вероятностей:

1) p_0 - вероятность того, что все n занятые модули прибора в исправном состоянии;

2) $p_{отк}$ - вероятность того, что прибор не будет работать,

$$p_{отк} = \frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{r! \cdot r^{n-r+1}} \cdot p_0;$$

3) $\aleph$ - среднее число модулей, находящихся в ремонте, при бесперебойной работе прибора,

$$\aleph = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k;$$

4) $\aleph_o$ - среднее число операторов, занятых восстановлением модулей,

$$\aleph_o = \sum_{k=1}^{r} k \cdot p_k + r \cdot \sum_{k=r+1}^{n+1} p_k;$$

5) $K_з$ - коэффициент загрузки операторов,

$$K_з = \frac{\aleph_o}{r};$$

6) M - среднее число модулей, ожидающих ремонта,

$$M = \sum_{k=r+1}^{n+1} (k-r) \cdot p_k .$$

Для определения экономически целесообразного числа запасных модулей и числа восстанавливающих устройств (операторов) воспользуемся формулой, минимизирующей потери при эксплуатации прибора:

$$\min G_Э = n \cdot c_з + T_{зап} \cdot \left(r \cdot c_{оп} + c_{пр} \cdot p_{отк} \right),$$

где $c_з$ - стоимость запасных модулей; $c_{оп}$ - стоимость содержания одного восстанавливающего устройства в единицу времени; $c_{пр}$ - стоимость простоя прибора в единицу времени; $T_{зап}$ - среднее время работы запасного модуля.

Если число восстанавливающих устройств фиксировано, то $c_{оп} = 0$. Тогда формула:

$$\min G_Э = n \cdot c_з + T_{зап} \cdot c_{пр} \cdot p_{отк}$$

определяет оптимальное число запасных модулей (обеспечивающих минимум потерь из-за простоя прибора и затрат на покупку запасных модулей).

Модель может быть использована для анализа и синтеза ненадежных систем, состоящих из большого числа однотипных элементов (вычислительные системы; парк автобусов, трамваев; предприятия общественного питания и магазины бытовой техники (планирование необходимого количества запасных частей для продажи, сервисных центров и т.д.)).

Библиографический список

1. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами / Н. Прабху. - М.: Эдиториал УРСС, 1984. - 499 с.
2. Павский, В.А. Моделирование процесса очистки природных и сточных вод : монография / В.А. Павский, Ю.Л. Сколубович, Т.А. Краснова. - Новосибирск: НГАСУ, 2005. - 144 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. - М.: Машиностроение, 1979. - 432 с.
4. Павский, В.А. Лекции по теории вероятностей и элементам математической статистики : учеб. пособие для студентов технолог. специальностей / В.А. Павский; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. - Кемерово, 2005. - 184 с.
5. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т.Л. Саати. - М.: Сов. радио, 1971. - 520 с.
6. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Наука, 1991. - 384 с.
7. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Эдиториал УРСС, 2005. - 400 с.
8. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей : учебник / Б.В. Гнеденко. - М.: Едиториал УРСС, 2005. - 448 с.
9. Боровков, А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А.А. Боровков. - М.: Наука, 1972. - 368 с.
10. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания /А.Я. Хинчин; под ред. Б.В. Гнеденко. - М.: Наука, 1963. - 528 с.
11. Павский, В.А. Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач / В.А. Павский, К.В. Павский, В.Г. Хорошевский // Искусственный интеллект. - 2006. - № 4. - С. 28-34.

Приложение 1

Значения функции $V_k = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ (распределение Пуассона)

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004

k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001

k \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058

Приложение 2

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,1	0,3968	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3907	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3809	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3677	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3514	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3325	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3115	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2890	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2654	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2413	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2173	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1937	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1709	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1494	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1292	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1107	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0939	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0788	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0655	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0539	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0439	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0354	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 3

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt$

$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, для $x < -3{,}98 \Rightarrow \Phi(x) = 0$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2	0,0139	0,0139	0,0132	0,0139	0,0125	0,0119	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007

Окончание прил. 3

-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 4

Значения $K(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \cdot e^{-2k^2 \cdot z^2}$, $z>0$ (распределение Колмогорова)

(для $z<0{,}28 \Rightarrow K(z)=0$ $K(z)$=0, для $z>3 \Rightarrow K(z)=1$)

z	$K(z)$	z	$K(z)$	z	$K(z)$
0,28	0,000001	0,75	0,372833	1,22	0,898104
0,29	0,000004	0,76	0,389640	1,23	0,902972
0,30	0,000009	0,77	0,406372	1,24	0,907648
0,31	0,000021	0,78	0,423002	1,25	0,912132
0,32	0,000046	0,79	0,439505	1,26	0,916432
0,33	0,000091	0,80	0,455857	1,27	0,920556
0,34	0,000171	0,81	0,472041	1,28	0,924505
0,35	0,000303	0,82	0,488030	1,29	0,928288
0,36	0,000511	0,83	0,503808	1,30	0,931908
0,37	0,000826	0,84	0,519366	1,31	0,935370
0,38	0,001285	0,85	0,534682	1,32	0,938682
0,39	0,001929	0,86	0,549744	1,33	0,941848
0,40	0,002808	0,87	0,564546	1,34	0,944872
0,41	0,003972	0,88	0,579070	1,35	0,947756
0,42	0,005476	0,89	0,593316	1,36	0,950512
0,43	0,007377	0,90	0,607270	1,37	0,953142
0,44	0,009730	0,91	0,620928	1,38	0,955650
0,45	0,012590	0,92	0,634286	1,39	0,958040
0,46	0,016005	0,93	0,647338	1,40	0,960318
0,47	0,020022	0,94	0,660082	1,41	0,962486
0,48	0,024682	0,95	0,672516	1,42	0,964552
0,49	0,030017	0,96	0,684636	1,43	0,966516
0,50	0,036055	0,97	0,696444	1,44	0,968382
0,51	0,042814	0,98	0,707940	1,45	0,970158
0,52	0,050306	0,99	0,719126	1,46	0,971846
0,53	0,058534	1,00	0,730000	1,47	0,973448
0,54	0,067497	1,01	0,740566	1,48	0,974970
0,55	0,077183	1,02	0,750826	1,49	0,976412
0,56	0,087577	1,03	0,760780	1,50	0,977782
0,57	0,098656	1,04	0,770434	1,51	0,979080
0,58	0,110395	1,05	0,779794	1,52	0,980310
0,59	0,122760	1,06	0,788860	1,53	0,981476
0,60	0,135718	1,07	0,797636	1,54	0,982578
0,61	0,149229	1,08	0,806128	1,55	0,983622
0,62	0,163225	1,09	0,814342	1,56	0,984610
0,63	0,177753	1,10	0,822282	1,57	0,985544
0,64	0,192677	1,11	0,829950	1,58	0,986426
0,65	0,207987	1,12	0,837356	1,59	0,987260
0,66	0,223637	1,13	0,844502	1,60	0,988048
0,67	0,239582	1,14	0,851394	1,61	0,988791
0,68	0,255780	1,15	0,858038	1,62	0,989492
0,69	0,272189	1,16	0,864442	1,63	0,990154
0,70	0,288765	1,17	0,870612	1,64	0,990777
0,71	0,305471	1,18	0,876548	1,65	0,991364

Окончание прил. 4

0,72	0,322265	1,19	0,882258	1,66	0,991917
0,73	0,339113	1,20	0,887750	1,67	0,992438
0,74	0,355981	1,21	0,893030	1,68	0,992928
1,69	0,993389	2,00	0,999329	2,31	0,999954
1,70	0,993828	2,01	0,999380	2,32	0,999958
1,71	0,994230	2,02	0,999428	2,33	0,999962
1,72	0,994612	2,03	0,999474	2,34	0,999965
1,73	0,994972	2,04	0,999516	2,35	0,999968
1,74	0,995309	2,05	0,999552	2,36	0,999970
1,75	0,995625	2,06	0,999588	2,37	0,000073
1,76	0,995922	2,07	0,999620	2,38	0,000076
1,77	0,996200	2,08	0,999650	2,39	0,000078
1,78	0,996460	2,09	0,999680	2,40	0,000080
1,79	0,996704	2,10	0,999705	2,41	0,999982
1,80	0,996932	2,11	0,999723	2,42	0,999984
1,81	0,997146	2,12	0,999750	2,43	0,999986
1,82	0,997346	2,13	0,999770	2,44	0,999987
1,83	0,997533	2,14	0,999790	2,45	0,999988
1,84	0,997707	2,15	0,999806	2,46	0,999989
1,85	0,997870	2,16	0,999822	2,47	0,999990
1,86	0,998023	2,17	0,999838	2,48	0,999991
1,87	0,998145	2,18	0,999852	2,49	0,999992
1,88	0,998297	2,19	0,999864	2,50	0,9999925
1,89	0,998421	2,20	0,999874	2,55	0,9999956
1,90	0,998536	2,21	0,999886	2,60	0,9999974
1,91	0,998644	2,22	0,999896	2,65	0,9999984
1,92	0,998744	2,23	0,999904	2,70	0,9999990
1,93	0,998837	2,24	0,999912	2,75	0,9999994
1,94	0,998924	2,25	0,999920	2,80	0,9999997
1,95	0,999004	2,26	0,999926	2,85	0,99999982
1,96	0,999079	2,27	0,999934	2,90	0,99999990
1,97	0,999149	2,28	0,999940	2,95	0,99999994
1,98	0,999213	2,29	0,999944	3,00	0,99999997
1,99	0,999273	2,30	0,999949		

Приложение 5

Значения χ^2 решения уравнения

$$2^{(1-n)/2}\cdot\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\int\limits_0^{\chi^2} x^{((n-1)/2-1)}\cdot\exp(-x/2)dx = p\,,$$

для левого конца интервала при $2p = 1-\beta$ значение $\chi^2 = \chi_1^2$,

для правого конца интервала при $p = 1-(1-\beta)/2$ значение $\chi^2 = \chi_1^2$

r \ p	**0,99**	**0,98**	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	.8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3

Окончание прил. 5

21	8,90	9,24	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Приложение 6

Значения t_β, удовлетворяющие равенству $2\int_0^{t_\beta} S_n(t)dt = \beta$, в зависимости от β и $n-1$

n-1 \ β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	134	271	414	569	741	941	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	132	267	408	559	727	920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	131	265	404	553	718	906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	4,71	5,96
7	130	263	402	549	711	896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	130	262	399	546	706	889	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	129	261	398	543	703	883	1,100	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	129	260	397	542	700	879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	129	260	396	540	697	876	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	128	259	395	539	695	873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	128	259	394	538	694	870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	128	258	393	537	692	868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	128	258	393	536	691	866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	128	258	392	535	690	865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	128	257	392	534	689	863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	127	257	392	534	688	862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	127	257	391	533	688	861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88

Окончание прил. 6

β / n-1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
20	127	257	391	533	687	860	1,064	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	127	257	391	532	686	859	1,063	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	127	256	390	532	686	858	1,061	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	127	256	390	532	685	858	1,060	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	127	256	390	531	685	857	1,059	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	127	256	390	531	684	856	1,058	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	127	256	390	531	684	856	1,058	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	127	256	389	531	684	855	1,057	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	127	256	389	530	683	855	1,056	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	127	256	389	530	683	854	1,055	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	127	256	389	530	683	854	1,055	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	126	255	388	529	681	851	1,050	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	126	254	387	527	679	848	1,046	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	126	254	386	526	677	845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

Приложение 7

Операционное исчисление (основные понятия)

Пусть $f(t)$ - непрерывная функция действительного переменного $t \geq 0$, удовлетворяющая условию

$$|f(t)| < M \cdot e^{-r_0 \cdot t}, \ \forall t \in [0, \infty), \tag{3}$$

где M, r_0 - постоянные числа.

Функция $F(s)$ комплексного переменного s называется **изображением Лапласа**, если она определена формулой:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt, \tag{4}$$

функция $f(t)$ называется **оригиналом.**

Стандартная запись изображения:

$$L\{f(t)\} = F(s) \text{ или } f(t) \leftarrow F(s). \tag{5}$$

Рассмотрим несколько необходимых изображений функций.

1) Изображение функции Хевисайда:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, \text{ для } t < 0; \\ 1, \text{ для } t \geq 0. \end{cases}$$

$$L\{\chi(t)\} = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} dt = \frac{1}{s},$$

то есть

$$1 \leftarrow \frac{1}{s};$$

2) Изображение функции $e^{-\alpha \cdot t}$:

$$L\{e^{-\alpha \cdot t}\} = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot e^{-\alpha \cdot t} dt = \frac{1}{s + \alpha},$$

то есть

$$e^{-\alpha \cdot t} \leftarrow \frac{1}{s + \alpha}.$$

3) Изображение функции $t^{k-1} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$:

$$L\{t^{k-1} \cdot e^{-\alpha \cdot t}\} = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\alpha \cdot t} dt = \frac{(k-1)!}{(s+\alpha)^k},\ k \in N.$$

4) Изображение производных.

Пусть $F(s) \to f(t)$, тогда

$$\frac{d}{dt} f(t) \leftarrow (s \cdot F(s) - f(0)).$$

В самом деле, имеем

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f'(t) dt = e^{-\cdot st} \cdot f(t) \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt.$$

В силу условия (3) $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) = 0$, отсюда

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + s \cdot F(s).$$

Свойства преобразования Лапласа:

1) Линейность:

если $F_i(s) = L\{f_i(t)\}$, то $\forall \alpha_i \in R$, $i = 1,2,...,n$,

$$L\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot F_i(s);$$

2) Смещение:

если $F(s) = L\{f(t)\}$, то

$$F(s+\lambda) \to e^{-\lambda \cdot t} \cdot f(t),\ \forall \lambda,\ \lambda - const;$$

3) Свертывание:

если $F_1(s) = L\{f_1(t)\}$, $F_2(s) = L\{f_2(t)\}$, то

$$F_1(s) \cdot F_2(s) \to f_1 * f_2(t),$$

где

$$f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau. \tag{6}$$

4) Запаздывание:

если $F(s) = L\{f(t)\}$, то

$$e^{-s \cdot \cdot \tau} \cdot F(s) \leftarrow f_\tau(t),$$

где $f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \tau > 0; \\ f(t-\tau), & t \ge \tau. \end{cases}$

Замечание. Выражение (6) называется сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ [5] и играет большую роль при изучении многомерных распределений (сравни с формулой (3.27), с. 58).

Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом

Метод наиболее эффективен при решении рекуррентных систем уравнений. Продемонстрируем его на примере системы (3.30) (см. с. 59).

Имеем

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot V_0(t), \; \frac{dV_k(t)}{dt} = -\lambda \cdot V_k(t) + \lambda \cdot V_{k-1}(t), \; k \in N,$$

при $V_0(0) = 1$, $V_k(0) = 0$.

Пусть $F_k(s) \to V_k(t)$. Взяв преобразование Лапласа, с учетом изображения производных и свойства линейности, получаем:

$$s \cdot F_0(s) - 1 = -\lambda \cdot F_0(s), \; s \cdot F_k(s) - 1 = -\lambda \cdot F_k(s) + \lambda \cdot F_{k-1}(s).$$

После элементарных преобразований получаем:

$$F_0(s) = \frac{1}{s+\lambda}, \; F_k(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot F_{k-1}(s)..$$

Отсюда

$$F_k(s) = \frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^{k+1}}.$$

Для нахождения оригинала воспользуемся изображением функции $t^{k-1} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$, (см. с. 110). Окончательно получаем

$$V_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \; k = 0,1,\ldots \; .$$

Приложение 8

Производящие функции

Метод производящих функций относится к операционным методам. Производящие функции являются дискретным аналогом более общего класса функций - характеристических [10]. Широко используются в теории вероятностей. Впервые были применены для решения уравнений А. Муавром и П.С. Лапласом.

Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_k(t)\}$, $k = 0,1,...$. Производящей назовем функцию

$$F(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot f_k(t).$$

Если $F(z,t)$ известна, то

$$f_k(t) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(0,t)}{\partial z^k}.$$

Пусть имеем распределение вероятностей $\{p_k(t)\}$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$, $p_0(0) = 1$, $p_k(0) = 0$ и пусть $F(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot p_k(t)$.

С учетом условий, наложенных на $p_k(t)$, имеем

$$F(0,t) = p_0(t),\ F(1,t) = 1,\ F(z,0) = 1,\ p_k(t) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(0,t)}{\partial z^k}.$$

Математическое ожидание находится по формуле:

$$M(t) = \frac{\partial F(1,t)}{\partial z}.$$

Применим производящие функции для нахождения решения системы дифференциальных уравнений в переходном режиме ***Модели 4*** для случая $m = n$.

Пусть $p_k(t)$ - вероятность того, что в момент времени t в СМО k приборов из n находятся в состоянии отказа при условии, что в начальный момент времени все приборы были исправны, то есть

$$p_0(0)=1,\; p_k(0)=0,\; k=1,2,...,n.$$

Система дифференциальных уравнений, составленная по ***Модели 4***, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p_0(t) = -n\cdot\lambda\cdot p_0(t)+\mu\cdot p_1(t), \\ \dfrac{d}{dt}p_k(t) = -[(n-k)\cdot\lambda+k\cdot\mu]\cdot p_k(t)+(n-k+1)\cdot\lambda\cdot p_{k-1}(t)+ \\ +(k+1)\cdot\mu\cdot p_{k+1}(t), \qquad\qquad 1\le k<n, \\ \dfrac{d}{dt}p_n(t) = -n\cdot\mu\cdot p_n(t)+\lambda\cdot p_{n-1}(t). \end{cases} \tag{1}$$

Для решения введем производящую функцию

$$F(z,t)=\sum_{k=0}^{n} z^k\cdot p_k(t).$$

Умножая уравнения системы (1), $k=0,1,...,n$, на z^k, суммируя их и приводя подобные члены с учетом того, что

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{n} z^k\cdot\frac{d}{dt}p_k(t),\quad \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=\sum_{k=0}^{n} k\cdot z^{k-1}\cdot p_k(t),$$

получаем уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}+(z-1)\cdot(\lambda\cdot z+\mu)\cdot\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}=n\cdot\lambda\cdot(z-1)\cdot F(z,t),\; F(z,0)=1.$$

Решим его методом характеристик [5].

Имеем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{(z-1)(\lambda\cdot z+\mu)}=\frac{dF(z,t)}{n\cdot\lambda\cdot(z-1)\cdot F(z,t)}.$$

Решая любые два из них, получаем:

$$F(z,t)\cdot(\lambda\cdot z+\mu)^{-n}=q\left(\frac{\lambda\cdot z+\mu}{1-z}\cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot t}\right),$$

где $q(x)$ - произвольная дифференцируемая функция (представляющая семейство поверхностей $q(z,t)=c$).

Учитывая начальные условия, $F(z,0)=1$, получаем

$$F(z,t) = [1 - r(t)\cdot(1-z)]^n .$$

Далее имеем

$$p_k(t) = \frac{1}{k!}\cdot\frac{\partial^k}{\partial z^k}(1 - r(t)\cdot(1-z))^n,\ M(t) = \left.\frac{\partial(1 - r(t)\cdot(1-z))^n}{\partial z}\right|_{z=1} .$$

Отсюда:

$$p_0(t) = (1 - r(t))^n ;$$

$$p_k(t) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+)1}{k!}\cdot r^k(t)\cdot(1-r(t))^{n-k} ;$$

$$M(t) = n\cdot r(t) ,$$

где $r(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot(1 - \exp(-(\lambda+\mu)\cdot t))$.

Более глубокие исследования позволяют с помощью производящих функций найти дисперсию и другие моменты высших порядков [11].

Приложение 9

Образец титульного листа

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫЩЛЕННОСТИ

Кафедра «Высшая математика»

АНАЛИЗ РАБОТЫ КАССОВЫХ АППАРАТОВ
В МАГАЗИНЕ САМООБСЛУЖИВАНИЯ «ПОЛЯНКА»
(ТМО)

Выполнил: студент гр. ЭУз-64у

Емельянова А.В.

Шифр зачетной книжки: 0000

Проверил: доц. Иванов И.И.

Кемерово 2008

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Павский Валерий Алексеевич

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Для студентов вузов

Зав. редакцией *И.Н. Журина*
Редактор *Н.В. Шишкина*
Технические редакторы: *Т.В. Васильева, Я.Я. Демарчек*
Художественный редактор *Л.П. Токарева*

ЛР № 020524 от 02.06.97
Подписано в печать 20.12.08. Формат 60х84 1/16
Бумага типографская. Гарнитура Times
Уч.-изд. л. 7,25. Тираж 600 экз.
Заказ № 68

Оригинал-макет изготовлен в редакционно-издательском отделе
Кемеровского технологического института пищевой промышленности
650056, г. Кемерово, б-р Строителей, 47

ПЛД № 44-09 от 10.10.99
Отпечатано в лаборатории множительной техники
Кемеровского технологического института пищевой промышленности
650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52