Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности

Указания к выполнению контрольных работ по дисциплине

«МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ»

Компиляция Саблинского А.И.

Кемерово 2012

ВВЕДЕНИЕ…….3
Глава 1. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ……..….4
1.1. Общая постановка задачи……..4
1.2. Графический метод……...….5
1.3. Дробно-линейное программирование…….….10
1.4. Метод множителей Лагранжа……..17
Глава 2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ…….20
2.1. Постановка задачи……20
2.2. Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования……...21
Глава 3. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ……...34
3.1. Основные понятия сетевой модели…….34
3.2. Минимизация сети……49
Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ…...53
4.1. Формулировка задачи и характеристики СМО……..53
4.2. Входящий поток требований……...55
5.3. Время обслуживания (выходящий поток требований) ……58
4.4. Показатели эффективности……..60
4.5. Примеры моделей СМО…….61
Глава 5. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ……78
5.1. Общая постановка задачи……78
5.2. Основная модель управления запасами…….79
5.3. Модель производственных запасов……81
5.4. Модель запасов, включающая штрафы……..82
5.5. Решение экономических задач с использованием моделей управления запасами……..83
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……..86
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ…….87

ВВЕДЕНИЕ

Управление и планирование являются наиболее сложными функциями в работе предприятий, фирм, служб администраций всех уровней. Долгое время они являлись монополией человека с соответствующей подготовкой и опытом работы. Совершенствование науки, техники, разделение труда усложнили принятие решений в управлении и планировании.

Для принятия обоснованного решения необходимо иметь и обработать большое количество информации, определяемое иногда астрономическими цифрами. Принятие ответственных решений, как правило, связано с большими материальными ценностями. В настоящее время недостаточно знать путь, ведущий к достижению цели. Необходимо из всех возможных путей выбрать наиболее экономичный, который наилучшим образом соответствует поставленной задаче.

Появление цифровых вычислительных машин и персональных компьютеров создало огромные возможности для развития науки, совершенствования методов планирования и управления производством. Однако без строгих формулировок задач, без математического описания процессов современный уровень управления и планирования не может быть достигнут.

Математическая дисциплина, занимающаяся изучением задач управления, планирования и разработкой методов их решения, получила название *математического программирования*.

В данном учебном пособии рассмотрены такие разделы дисциплины как *нелинейное*, *имитационное* и *стохастическое программирование*.

В настоящее время не существует общих и достаточно эффективных методов решения задач нелинейного программирования. Лишь для определенного класса нелинейных задач, система ограничений которых линейна, а целевая функция нелинейна, но обладает свойством выпуклости, разработаны достаточно эффективные методы, получившие название методов выпуклого программирования.

Динамическое программирование — один из разделов методов оптимизации, в котором процесс принятия решения может быть разбит на отдельные этапы. В основе метода лежит принцип оптимальности, разработанный Р. Беллманом.

Сетевые модели, в основе которых лежит теория графов, позволяют проводить их оптимизацию, а также совокупность расчетных и организационных мероприятий по управлению комплексами работ при создании новых изделий и технологий.

Цель изучения системы массового обслуживания состоит в том, чтобы контролировать их характеристики для проведения оптимизации системы в целом.

Рассмотрение моделей управления запасами преследует цель выбора для предприятий оптимальных расходов на доставку, хранение комплектующих материалов и ресурсов, необходимых для изготовления изделий.

Глава 1. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Общая постановка задачи

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: найти вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, & i = \overline{1, m_1}; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

и доставляющий экстремум (наибольшее или наименьшее значение) целевой функции

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где x_j — переменные, $j = \overline{1, n}$; L, f, g_i — заданные функции от n переменных, b_i — фиксированные значения.

Нелинейное программирование применяется при прогнозировании промышленного производства, управлении товарными ресурсами, планировании обслуживания и ремонта оборудования и т.д.

Для задачи нелинейного программирования в отличие от линейных задач нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

Из нелинейного программирования наиболее разработаны задачи, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Однако даже для таких задач оптимальное решение может быть найдено для определенного класса целевых функций. Например, когда целевая функция сепарабельная, т.е. является суммой n функций $f_j(x_j)$, или квадратичная. При этом следует отметить, что в отличие от задач линейного программирования, где точками экстремума являются вершины многогранника решений, в задачах с нелинейной целевой функцией точки могут находиться внутри многогранника, на его ребре или в вершине.

При решении задач нелинейного программирования для целевой функции необходимо определить глобальный максимум или глобальный минимум. Глобальный максимум (минимум) функции — это ее наибольшее (наименьшее)

значение из локальных максимумов (минимумов).

Наличие локальных экстремумов затрудняет решение задач, так как большинство существующих методов нелинейного программирования не позволяет установить, является найденный экстремум локальным или глобальным. Поэтому имеется возможность в качестве оптимального решения принять локальный экстремум, который может существенно отличаться от глобального.

1.2. Графический метод

Рассмотрим примеры решения задач нелинейного программирования с двумя переменными, причем их целевые функции и системы ограничений могут быть заданы в линейном и нелинейном виде. Так же как и в задачах линейного программирования, они могут быть решены графически.

Задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Пример 1. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = 2x_1 + x_2$$

при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16,$$
$$x_{1,2} \geqslant 0.$$

РЕШЕНИЕ. Область допустимых решений — часть окружности с радиусом 4, которая расположена в первой четверти (рис. 1.1).

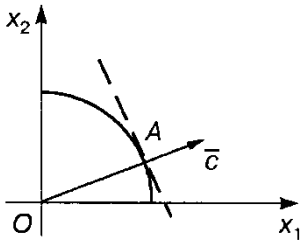


Рис. 1.1

Линиями уровня целевой функции являются параллельные прямые с угловым коэффициентом, равным -2. Глобальный минимум достигается в точке O (0, 0), глобальный максимум — в точке A касания линии уровня и окружности.

Проведем через точку A прямую, перпендикулярную линии уровня. Прямая проходит через начало координат, имеет угловой коэффициент 1/2 и уравнение $x_2 = 1/2x_1$.

Решаем систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 16, \\ x_2 = 1/2\, x_1, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 8\sqrt{5}/5$, $x_2 = 4\sqrt{5}/5$, $L = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}$.

О т в е т . Глобальный минимум, равный нулю, достигается в точке O (0, 0), глобальный максимум, равный $4\sqrt{5}$, — в точке $A(8\sqrt{5}/5, 4\sqrt{5}/5)$.

Задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений

Пример 2. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ x_{1,2} \geqslant 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Область допустимых решений — $OABD$ (рис. 1.2). Линиями уровня будут окружности с центром в

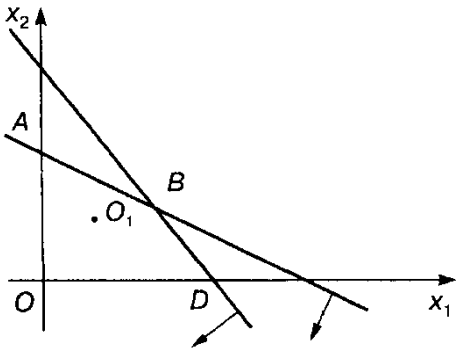


Рис. 1.2

точке O_1. Максимальное значение целевая функция имеет в точке D(9, 0), минимальное — в точке O_1 (2, 3). Поэтому

$$L(D) = (9 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 58.$$

О т в е т . Глобальный максимум, равный 58, достигается в точке D (9, 0), глобальный минимум, равный нулю, — в точке O_1 (2, 3).

Пример 3. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 15, \\ x_{1,2} \geqslant 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Область допустимых решений — *OABD* (рис. 1.3). Линии уровня представляют собой окружности с центром в точке O_1 (6, 3). Глобальный максимум находится в точке *O* (0, 0) как самой удаленной от точки O_1. Глобальный минимум расположен в точке *E,* находящейся на пересечении прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$ и перпендикуляра к этой прямой, проведенного из точки O_1.

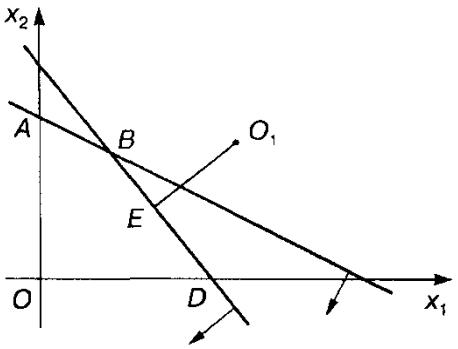


Рис. 1.3

Найдем координаты точки *E:* так как угловой коэффициент прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$ равен -3/2, то угловой коэффициент перпендикуляра O_1E равен 2/3. Из уравнения прямой, проходящей через данную точку O_2 с угловым коэффициентом 2/3, получим

$$(x_2 - 3) = \frac{2}{3}(x_1 - 6), \text{ откуда } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15, \end{cases}$$

находим координаты точки *E:* $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$, при этом *L(E)* = 1053/169.

Координаты точки *E* можно найти следующим образом: дифференцируя выражение $(x_1 — 6)^2 + (x_2 - 3)^2$ как неявную функцию по x_1, получим

$$2(x_1 - 6) + 2(x_2 - 3)x_2' = 0,$$
$$x_2' = -\frac{6 - x_1}{x_2 - 3}.$$

Приравниваем полученное значение к тангенсу угла наклона прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$:

$$-\frac{6 - x_1}{x_2 - 3} = \frac{-3}{2}, \text{ или } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15, \end{cases}$$

получим координаты точки *E:* $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$.

Ответ. Глобальный максимум, равный 52, находится в точке *O* (0, 0). Глобальный минимум, равный 1053/169, находится в точке *E* (51/13, 21/13).

Задача с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Пример 4. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16,$$
$$x_{1,2} \geqslant 0.$$

Решение. Областью допустимых решений является окружность с радиусом 4, расположенная в первой четверти (рис. 1.4). Линиями уровня будут окружности с центром в точке O_1 (2, l).

Глобальный минимум достигается в точке O_1. Глобальный максимум — в точке *A* (0, 4), при этом

$$L(A) = (0 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = 4 + 9 = 13.$$

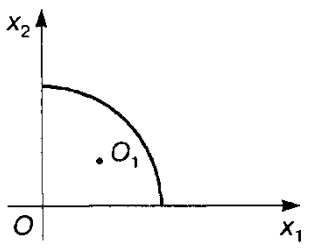


Рис. 1.4

О т в е т . Глобальныи минимум, равный нулю, достигается в точке O_1 (2, l), глобальный максимум, равный 13, находится в точке A (0, 4).

Пример 5. Найти глобальные экстремумы

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \leqslant 4, \\ x_1 + x_2 \geqslant 5, \\ x_1 \leqslant 7, \\ x_2 \leqslant 6, \\ x_{1,2} \geqslant 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Область допустимых решений не является выпуклой и состоит из двух частей (рис. 1.5). Линиями уровня являются окружности с центром в точке O (0, 0).

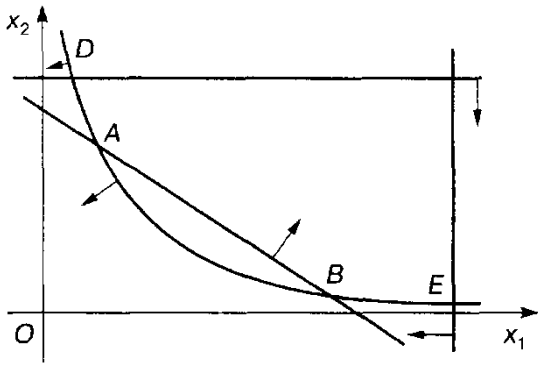


Рис. 1.5

Найдем координаты точек A и B, решая систему

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Получим A (1, 4), B (4, 1). В этих точках функция имеет глобальные минимумы, равные 17. Найдем координаты точек D и E, решая системы

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_2 = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_1 = 7, \end{cases}$$

откуда получаем D (2/3, 6) и $L(D)$ = 328/9, E (7, 4/7) и $L(E)$ = 2417/49.

О т в е т . Целевая функция имеет два глобальных минимума, равных 17, в точках A (1, 4) и B (4, 1), глобальный максимум, равный 2417/49, достигается в точке E (7, 4/7).

1.3. Дробно-линейное программирование

Математическая модель задачи

Дробно-линейное программирование относится к нелинейному программированию, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде.

Задача дробно-линейного программирования в общем виде записывается следующим образом:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$
$$x_j \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n},$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} — постоянные коэффициенты и $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$.

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования в виде

$$L = (c_1 x_1 + c_2 x_2)/(d_1 x_1 + d_2 x_2) \to \max(\min) \qquad (1.1)$$

при ограничениях:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leqslant b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_{1,2} \geqslant 0. \qquad (1.2)$$

Будем считать, что $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Для решения этой задачи найдем область допустимых решений, определяемую ограничениями (1.2). Пусть эта область не является пустым множеством.

Из выражения (1.1) найдем x_2:

$$Ld_1 x_1 + Ld_2 x_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$
$$x_2(Ld_2 - c_2) = x_1(c_1 - Ld_1),$$
$$x_2 = x_1(c_1 - Ld_1)/(Ld_2 - c_2),$$
$$x_2 = kx_1,$$

где $k = (c_1 - Ld_1)/(Ld_2 - c_2)$.

Прямая $x_2 = kx_1$ проходит через начало координат. При некотором фиксированном значении L угловой коэффициент k прямой тоже фиксирован и прямая займет определенное положение. При изменении значений L прямая $x_2 = kx_1$ будет поворачиваться вокруг начала координат (рис. 1.6).

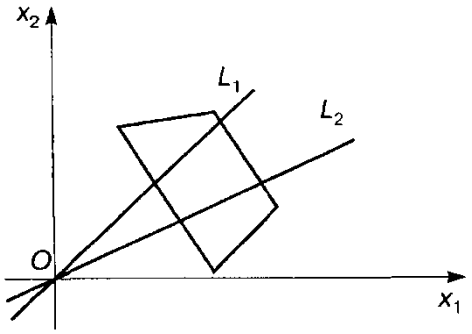


Рис. 1.6

Установим, как будет вести себя угловой коэффициент k при монотонном возрастании L. Найдем производную от k по L:

$$\frac{dk}{dL} = k' = \frac{-d_1(Ld_2 - c_2) - d_2(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)^2} = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(Ld_2 - c_2)^2}.$$

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель от L не зависит. Следовательно, производная имеет постоянный знак и при увеличении L угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет поворачиваться в одну сторону. Если угловой коэффициент прямой имеет положительное значение, то прямая вращается против часовой стрелки, при отрицательном значении k — по часовой стрелке. Установив направление вращения, находим вершину или вершины многогранника, в которых функция принимает max(min) значение, либо устанавливаем неограниченность задачи.

При этом возможны следующие случаи.

1. Область допустимых решений ограничена, максимум и минимум достигаются в ее угловых точках (рис. 1.7).
2. Область допустимых решений неограничена, однако существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения (рис. 1.8).
3. Область допустимых решений неограничена, имеется один из экстремумов. Например, минимум достигается в одной из вершин области и имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 1.9).
4. Область допустимых решений неограничена. Максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 1.10).

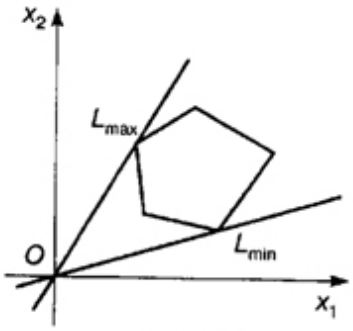


Рис. 1.7

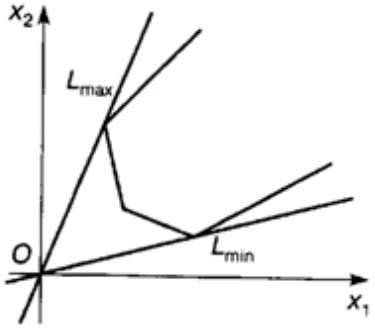


Рис. 1.8

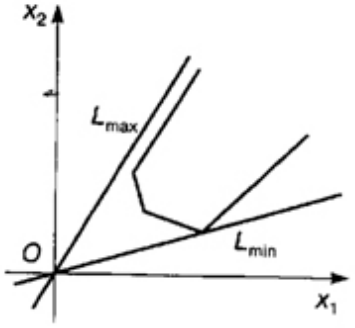


Рис. 1.9

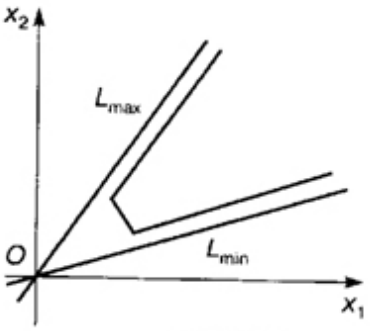


Рис. 1.10

Алгоритм решения

1. Находим область допустимых решений.
2. Определяем угловой коэффициент k и устанавливаем направление поворота целевой функции.
3. Находим точку max(min) целевой функции или устанавливаем неразрешимость задачи.

Экономическая интерпретация задач дробно-линейного программирования

Математическая модель задачи дробно-линейного программирования может быть использована для определения рентабельности затрат на производство изделий, рентабельности продаж, затрат в расчете на рубль выпускаемой продукции, себестоимости изделий.

Обозначим: r_j — прибыль предприятия от реализации единицы изделия j-го вида;

x_j — количество выпущенной продукции j-го вида;

s_j — цена единицы продукции j-го вида;

c_j — себестоимость производства единицы изделия j-го вида;

d_j — затраты на производство одного изделия j-го вида.

Задача рентабельности ($P_з$) затрат на производство изделий имеет вид

$$P_з = \sum r_j x_j / \sum c_j x_j \to \max .$$

Задача рентабельности (P_n) продаж имеет вид

$$P_n = \sum r_j x_j / \sum s_j x_j \to \max .$$

Задача определения затрат ($З_р$) в расчете на рубль товарной продукции записывается в виде

$$З_р = \sum c_j x_j / \sum s_j x_j \to \min .$$

Задача нахождения себестоимости изделия записывается как

$$c_j = \sum d_j / \sum x_j \to \min .$$

Указанные математические модели имеют системы ограничений в зависимости от условий задачи.

Применение дробно-линейного программирования для определения себестоимости изделий

Рассмотрим использование дробно-линейного программирования для нахождении себестоимости изделий.

Пример 6. Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на каждом из типов оборудования. Время обработки каждого из изделий, затраты, связанные с производством одного изделия, даны в табл. 1.1

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч соответственно, оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы средняя себестоимость одного изделия была минимальной.

Таблица 1.1

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия, ч	
	A	B
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Затраты на производство одного изделия, тыс. р.	2	3

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 — количество изделий вида A, которое следует изготовить предприятию, x_2 — количество изделий вида B. Общие затраты на их производство составят $(2x_1 + 3x_2)$ тыс. р., а средняя себестоимость одного изделия будет равна

$$(2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2).$$

Математическая модель задачи примет вид

$$L = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2) \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leqslant 26, \\ x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \leqslant 39, \\ x_{1,2} \geqslant 0. \end{cases}$$

ΔABC — область допустимых решений (рис. 1.11).

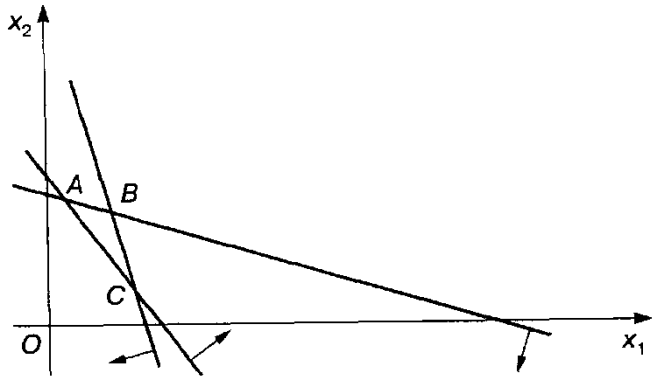


Рис. 1.11

Найдем x_2: $L = (2x_1 + 3x_2) / (x_1 + x_2)$, $2x_1 + 3x_2 = Lx_1 + Lx_2$, $x_2 (3 - L) = x_1 (L - 2)$,

$$x_2 = x_1(L - 2)/(3 - L) = kx_1.$$

Угловой коэффициент прямой равен $k = (L - 2)/(3 — l)$, тогда

$$\frac{dk}{dL} = \frac{(3 - L) - (-1)(L - 2)}{(3 - L)^2} = \frac{1}{(3 - L)^2}.$$

Так как $dk/dL > 0$, то функция $k = (L - 2)/(3 - L)$ возрастает. Это соответствует вращению прямой против часовой стрелки. Следовательно, в точке C (рис. 1.11) целевая функция будет иметь наименьшее значение (глобальный минимум).

Найдем координаты точки C. Решая систему

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 = 39, \\ x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \end{cases}$$

получим C (3, 1), $\bar{x}_{\text{опт}} = (3, 1)$, $L = 9/4$.

Следовательно, предприятию следует выпускать 3 изделия вида A и 1 изделие вида B. При этом средняя себестоимость одного изделия будет минимальной и равной 2,25 тыс. р.

Сведение экономико-математической модели дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования

Задачу дробно-линейного программирования можно свести к задаче линейного программирования и решить симплексным методом.

Обозначим

$$y_0 = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$$

и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j$.

Тогда задача примет вид

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max\,(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \\ \sum\limits_{j=0}^{n} d_j y_j = 1, \end{cases}$$

$$y_j \geqslant 0, \quad y_0 > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

После нахождения оптимального решения полученной задачи, используя вышеуказанные соотношения, найдем оптимальное решение исходной задачи дробно-линейного программирования.

Пример 7. Дана задача дробно-линейного программирования

$$L = (2x_1 - x_2)/(x_1 + 2x_2 + 1) \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 \quad 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Обозначим: $x_1 + 2x_2 + 1 = 1/y_0$, $y_0 > 0$, тогда $L = 2x_1y_0 - x_2y_0$.

Обозначим: $x_1y_0 = y_1$, $x_2y_0 = y_2$, $x_3y_0 = y_3$, $x_4y_0 = y_4$.

Преобразуем систему ограничений, умножив обе части всех ограничений на y_0, и перейдем к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4. Задача примет вид

$$L = 2y_1 - y_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, \\ -6y_0 + 2y_1 + y_2 + y_4 = 0, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1, \\ y_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,4}, \quad y_0 > 0. \end{cases}$$

Таблица 1.2

c_i	БП	0	2	−1	0	0	b_i
		y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	
	y_3	−2	1	−2	1	0	0
	y_4	−6	2	1	0	1	0
		(1)	1	2	0	0	1
0	y_3	0	(3)	2	1	0	2
0	y_4	0	8	13	0	1	6
0	y_0	1	1	2	0	0	1
	Δ_j	0	−2	1	0	0	0
2	y_1	0	1	2/3	1/3	0	2/3
0	y_4	0	0	2/3	−8/3	1	2/3
0	y_0	1	0	4/3	−1/3	0	1/3
	Δ_j	0	0	7/3	2/3	0	4/3

Получили задачу линейного программирования, решаем ее симплексным методом (табл. 1.2).

Получим

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (1/3, 2/3, 0, 0, 2/3),$$

тогда

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 2, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 0, \quad x_3 = \frac{y_3}{y_0} = 0, \quad x_4 = \frac{y_4}{y_0} = 2.$$

О т в е т : $\bar{x}_{\text{опт}} = (2, 0, 0, 2)$, $L_{\max} = 4/3$.

1.4. Метод множителей Лагранжа

Постановка задачи

Дана задача нелинейного программирования

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Предположим, что функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Ограничения заданы в виде уравнений, поэтому для решения задачи воспользуемся методом отыскания условного экстремума функции нескольких переменных.

Для решения задачи составляется функция Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где λ_i — множители Лагранжа.

Затем определяются частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Приравняв к нулю частные производные, получим систему

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Решая систему, получим множество точек, в которых целевая функция L может иметь экстремальные значения. Следует отметить, что условия рассмотренной системы являются необходимыми, но недостаточными. Поэтому не всякое полученное решение определяет точку экстремума целевой функции. Применение метода бывает оправданным, когда заранее предполагается существование глобального экстремума, совпадающего с единственным локальным максимумом или минимумом целевой функции.

Пример 8. Найти точку условного экстремума функции

$$L = x_1x_2 + x_2x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \\ +\lambda_1(x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + 2x_3 - 4).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа по переменным x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2. Приравняв к нулю полученные выражения, решим систему

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_1 = x_2 + \lambda_1 = 0, \\ \partial F/\partial x_2 = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \partial F/\partial x_3 = x_2 + 2\lambda_2 = 0, \\ \partial F/\partial \lambda_1 = x_1 - x_2 - 2 = 0, \\ \partial F/\partial \lambda_2 = x_2 + 2x_3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Откуда $\lambda_1 = -x_2$, $\lambda_2 = - x_2/2$, $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, $L = -8$.

Определим характер экстремума, изменяя полученные значения переменных. Измененные значения должны удовлетворять заданной системе ограничений. Возьмем $x_1 > -2$, например $x_1 = -1$, тогда из системы ограничений получим $x_2 = -3$, $x_3 = 7/2$, $L = -15/2$. Возьмем $x_1 < -2$, например $x_1 = -3$, тогда получим $x_2 = -5$, $x_3 = 9/2$, $L = -15/2$. Следовательно, $L = -8$ — минимальное значение функции.

О т в е т . Точка экстремума $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, при этом максимальное значение функции $L = -8$.

Расчет экономико-математической модели при нелинейных реализациях продукции

Рассмотрим применение выше приведенных методов на примере решения задачи оптимальной реализации продукции.

Пример 9. Мукомольный комбинат реализует муку двумя способами: в розницу через магазин и оптом через торговых агентов. При продаже x_1 кг муки через магазин расходы на реализацию составляют ${x_1}^2$ ден. ед., а при продаже x_2 кг муки посредством торговых агентов — ${x_2}^2$ ден. ед.

Определить, сколько килограммов муки следует продавать каждым способом, чтобы затраты на реализацию были минимальными, если в сутки выделяется для продажи 5 000 кг муки.

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи.

Найдем минимум суммарных расходов

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 = 5\,000,$$
$$x_{1,2} \geqslant 0.$$

Для расчета модели используем метод множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5\,000).$$

Найдем частные производные функции F по x_1, x_2 и λ, приравняем их к нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0, \\ 2x_2 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 5\,000 = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda = -5\,000$, $x_1 = 2\,500$, $x_2 = 2\,500$, $L = 12\,500\,000$ ден. ед.

Давая x_1 значения больше и меньше 2500, находим L и из определения экстремума функции получаем, что L при $x_1 = x_2 = 2\,500$ достигает минимума.

Таким образом, для получения минимальных расходов необходимо расходовать в сутки через магазин и торговых агентов по 2 500 кг муки, при этом расходы на реализацию составят 12 500 000 ден. ед.

Глава 2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1. Постановка задачи

Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как

дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

2.2. Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования

Оптимальная стратегия замены оборудования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость.

Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат; причем его можно заменить новым оборудованием того же вида или новым, более совершенным.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения: $r(t)$ — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P — покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $N = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до

завершения процесса, а $N = N$ — к началу процесса (рис. 2.1).

На каждом этапе N-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Рис. 2.1

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \longrightarrow \text{Замена,} \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \longrightarrow \text{Замена.} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.1) описывает N-стадийный процесс, а (2.2) — одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя — доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении (2.1) функция $r(t) - u(t)$ есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N-й стадии процесса.

Функция f_{N-1} $(t + 1)$ характеризует суммарную прибыль от $(N - 1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t + 1)$ лет.

Нижняя строка (2.1) характеризуется следующим образом: функция $s(t) - P$ представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция f_{N-1} в (2.1) представляет собой доход от оставшихся $N - 1$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t + 1)$, так как N принимает значение 1, 2,..., N. Равенство $f_0(t) = 0$ следует из определения функции $f_N(t)$.

Уравнения (2.1) и (2.2) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t + 1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до $(t + 1)$ лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до $(N — 1)$.

Расчет начинают с использования уравнения (2.1). Уравнения (2.1) и (2.2) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример 1. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: $P = 10$, $S(t) = 0$, $f(t) = r(t) — u(t)$, представленных в табл. 2.1.

Таблица 2.1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

РЕШЕНИЕ. Уравнения (2.1) и (2.2) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \max \begin{cases} f(t) + f_{N-1}(t+1), \\ -p + f(0) + f_{N-1}(1), \end{cases} \\ f_1(t) &= \max \begin{cases} f(t), \\ -p + f(0). \end{cases} \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Для $N = 1$

$$f_1(0) = \max \begin{cases} f(0) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 10 \\ -10 + 10 \end{cases} = 10,$$

$$f_1(1) = \max \begin{cases} f(1) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 9 \\ -10 + 10 \end{cases} = 9,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1(12) = \max \begin{cases} f(12) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0.$$

Для $N = 2$

$$f_2(0) = \max \begin{cases} f(0) + f_1(1) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 19,$$

$$f_2(1) = \max \begin{cases} f(1) + f_1(2) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 9 + 8 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 17,$$

.....

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $f_1(1) > f_2(2)$, т.е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчетов помещаем в таблицу, момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем (табл. 2.2).

Таблица 2.2

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N	$N-1$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9*						
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17*							
$f_4(t)$	34	30	26	24	24*								
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30*							
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35*						
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41*							
$f_8(t)$	58	54	51	48	48*								
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54*							
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60*							
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65	65*						
$f_{12}(t)$	82	78	75	73	72	72*							

Можно не решать каждый раз уравнение (2.3), а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $f_4(t)$:

$$f_4(0) = f_1(0) + f_3(1) = 10 + 24 = 34 > f_3(1) = 24,$$
$$f_4(1) = f_1(1) + f_3(2) = 9 + 21 = 30 > f_3(1),$$
$$f_4(2) = f_1(2) + f_3(3) = 8 + 18 = 26 > f_3(1),$$
$$f_4(3) = f_1(3) + f_3(4) = 7 + 17 = 24 > f_3(1),$$
$$f_4(4) = f_1(4) + f_3(5) = 6 + 17 = 23 < f_3(1).$$

Дальнейшие расчеты для $f_4(t)$ прекращаем, так как $f_4(4) = 23 < f_3(1) = 24$.

По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены

оборудования. Для данной задачи он составляет 4 года.

О т в е т . Для получения максимальной прибыли от использования оборудования в двенадцатиэтапном процессе оптимальный цикл состоит в замене оборудования через каждые 4 года.

Оптимальное распределение ресурсов

Пусть имеется некоторое количество ресурсов x, которое необходимо распределить между n различными предприятиями, объектами, работами и т.д. так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введем обозначения: x_i — количество ресурсов, выделенных i-му предприятию ($i = \overline{1,n}$);

$g_i(x_i)$ — функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса x_i, полученного i-м предприятием;

$f_k(x)$ — наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов x от первых k различных предприятий.

Сформулированную задачу можно записать в математической форме:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$.

Обозначим через x_k количество ресурса, используемого k-м способом ($0 \leq x_k \leq x$), тогда для $(k - 1)$ способов остается величина ресурсов, равная $(x - x_k)$. Наибольший доход, который получается при использовании ресурса $(x - x_k)$ от первых $(k - 1)$ способов, составит $f_{k-1}(x - x_k)$.

Для максимизации суммарного дохода от k-го и первых $(k - 1)$ способов необходимо выбрать x_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$f_1(x) = g_1(x),$$
$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2,n}.$$

Рассмотрим конкретную задачу по распределению капиталовложений между

предприятиями.

Распределение инвестиций для эффективного использования потенциала предприятия

Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.

Для расширения производства совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн р. с дискретностью 20 млн р. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в табл. 2.3.

Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить не более одной инвестиции.

Таблица 2.3

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

РЕШЕНИЕ. Разобьем решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, на которых предполагается осуществить инвестиции.

Рекуррентные соотношения будут иметь вид:
для предприятия № 1

$$f_1(x) = g_1(x_1),$$

для всех остальных предприятий

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Решение будем проводить согласно рекуррентным соотношениям в четыре этапа.

1-й этап. Инвестиции производим только первому предприятию. Тогда

$$f_1(20) = 8, \qquad f_1(40) = 16, \qquad f_1(60) = 25,$$
$$f_1(80) = 36, \qquad f_1(100) = 44, \qquad f_1(120) = 62.$$

2-й этап. Инвестиции выделяем первому и второму предприятиям. Рекуррентное соотношение для 2-го этапа имеет вид

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

Тогда
при $x = 20$ $f_2(20) = \max (8 + 0{,}0 + 10) = \max (8, 10) = 10$,
при $x = 40$ $f_2(40) = \max (16{,}8 + 10{,}20) = \max (16, 18, 20) = 20$,
при $x = 60$ $f_2(60) = \max (25{,}16 + 10, 8 + 20{,}28) = \max (25{,}26, 28{,}28) = 28$,
при $x = 80$ $f_2(80) = \max (36{,}25 + 10{,}16 + 20{,}8 + 28{,}40) = \max (36, 35, 36, 36, 40) = 40$,
при $x = 100$ $f_2(100) = \max (44{,}36 + 10{,}25 + 20{,}16 + 28{,}8 + 40{,}48) = \max (44, 46, 45, 44, 48, 48) = 48$,
при $x = 120$ $f_2(120) = \max (62{,}44 + 10{,}36 + 20{,}25 + 28{,}16 + 40{,}8 + 48{,}62) = \max (62, 54, 56, 53, 56, 56, 62) = 62$.

3-й этап. Финансируем 2-й этап и третье предприятие. Расчеты проводим по формуле

$$f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}.$$

Тогда
при $x = 20$ $f_3(20) = \max (10, 12) = 12$,
при $x = 40$ $f_3(40) = \max (20{,}10 + 12{,}21) = \max (20, 22, 21) = 22$,
при $x = 60$ $f_3(60) = \max (28{,}20 + 12{,}10 + 21{,}27) = \max (28, 32, 31, 27) = 32$,
при $x = 80$ $f_3(80) = \max (40{,}28 + 12{,}20 + 21{,}10 + 27{,}38) = \max (40, 40, 41, 37, 38) = 41$,
при $x = 100$ $f_3(100) = \max (48{,}40 + 12{,}28 + 21{,}20 + 27{,}10 + 38{,}50) = \max (48, 52, 49, 47, 48, 50) = 52$,
при $x = 120$ $f_3(120) = \max (62{,}48 + 12{,}40 + 21{,}28 + 27{,}20 + 38{,}10 + 50{,}63) = \max (62, 60, 61, 55, 58, 60, 63) = 63$.

4-й этап. Инвестиции в объеме 120 млн р. распределяем между 3-м этапом и четвертым предприятием.

При $x = 120$ $f_4(120) = \max (63{,}52 + 11{,}41 + 23{,}32 + 30{,}22 + 37{,}12 + 51{,}63) =$

max (63, 63, 64, 62, 59, 63, 63) = 64.

Получены условия управления от 1-го до 4-го этапа. Вернемся от 4-го к 1-му этапу. Максимальный прирост выпуска продукции в 64 млн р. получен на 4-м этапе как 41 + 23, т.е. 23 млн р. соответствуют выделению 40 млн р. четвертому предприятию (см. табл. 2.3). Согласно 3-му этапу 41 млн р. получен как 20 + 21, т.е. 21 млн р. соответствует выделеник 40 млн р. третьему предприятию. Согласно 2-этапу 20 млн р. получено при выделении 40 млн р. второму предприятию.

Таким образом, инвестиции в объеме 120 млн р. целесообразно выделить второму, третьему и четвертому предприятиям по 40 млн р. каждому, при этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 млн р.

Минимизация затрат на строительство и эксплуатацию предприятий

Задача по оптимальному размещению производственных предприятий может быть сведена к задаче распределения ресурсов согласно критерию минимизации с учетом условий целочисленности, накладываемых на переменные.

Пусть задана потребность в пользующемся спросом продукте на определенной территории. Известны пункты, в которых можно построить предприятия, выпускающие данный продукт. Подсчитаны затраты на строительство и эксплуатацию таких предприятий.

Необходимо так разместить предприятия, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

Введем обозначения:

x — количество распределяемого ресурса, которое можно использовать n различными способами,

x_i — количество ресурса, используемого по i-му способу ($i = \overline{1,n}$);

$g_i(x_i)$ — функция расходов, равная, например, величине затрат на производство при использовании ресурса x_i по i-му способу;

$\varphi_k(x)$ — наименьшие затраты, которые нужно произвести при использовании ресурса x первыми k способами.

Необходимо минимизировать общую величину затрат при освоении ресурса x всеми способами:

$$\varphi_n(x) = \min \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Экономический смысл переменных x_i состоит в нахождении количества предприятий, рекомендуемого для строительства в i-м пункте. Для удобства расчетов будем считать, что планируется строительство предприятий одинаковой мощности.

Рассмотрим конкретную задачу по размещению предприятий.

Пример. В трех районах города предприниматель планирует построить пять предприятий одинаковой мощности по выпуску хлебобулочных изделий, пользующихся спросом.

Необходимо разместить предприятия таким образом, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты на их строительство и эксплуатацию. Значения функции затрат $g_i(x)$ приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	11	18	35	51	76
$g_2(x)$	10	19	34	53	75
$g_3(x)$	9	20	36	54	74

В данном примере $g_i(x)$ — функция расходов в млн р., характеризующая величину затрат на строительство и эксплуатацию в зависимости от количества размещаемых предприятий в i-м районе;

$\varphi_k(x)$ — наименьшая величина затрат в млн. р., которые нужно произвести при строительстве и эксплуатации предприятий в первых k районах.

РЕШЕНИЕ. Решение задачи проводим с использованием рекуррентных соотношений: для первого района

$$\varphi_1(x) = \min g_i(x_i) = g_1(x),$$

для остальных районов

$$\varphi_k(x) = \min\{g_k(x_k) + \varphi_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2,n}.$$

Задачу будем решать в три этапа.

1-й этап. Если все предприятия построить только в первом районе, то

$$\varphi_1(1) = g_1(1) = 11, \quad \varphi_1(2) = g_1(2) = 18, \quad \varphi_1(3) = g_1(3) = 35,$$
$$\varphi_1(4) = g_1(4) = 51, \quad \varphi_1(5) = g_1(5) = 76,$$

минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 76 млн р.

2-й этап. Определим оптимальную стратегию при размещении предприятий только в первых двух районах по формуле

$$\varphi_2(x) = \min\{g_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}$$

Найдем $\varphi_2(1)$:

$$g_2(1) + \varphi_1(0) = 10 + 0 = 10,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(1) = 0 + 11 = 11,$$
$$\varphi_2(1) = \min(10, 11) = 10.$$

Вычислим $\varphi_2(2)$:

$$g_2(2) + \varphi_1(0) = 19 + 0 = 19,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(1) = 10 + 11 = 21,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(2) = 0 + 18 = 18,$$
$$\varphi_2(2) = \min(19, 21, 18) = 18.$$

Найдем $\varphi_2(3)$:

$$g_2(3) + \varphi_1(0) = 34 + 0 = 34,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(1) = 19 + 11 = 30,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(2) = 10 + 18 = 28,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(3) = 0 + 35 = 35,$$
$$\varphi_2(3) = \min(34, 30, 28, 35) = 28.$$

Определим $\varphi_2(4)$:

$$g_2(4) + \varphi_1(0) = 53 + 0 = 53,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(1) = 34 + 11 = 45,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(2) = 19 + 18 = 37,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(3) = 10 + 35 = 45,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(4) = 0 + 51 = 51,$$
$$\varphi_2(4) = \min(53, 45, 37, 45, 51) = 37.$$

Вычислим $\varphi_2(5)$:

$$g_2(5) + \varphi_1(0) = 75 + 0 = 75,$$
$$g_2(4) + \varphi_1(1) = 53 + 11 = 64,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(2) = 34 + 18 = 52,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(3) = 19 + 35 = 54,$$

$$g_2(1) + \varphi_1(4) = 10 + 51 = 61,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(5) = 0 + 76 = 76,$$
$$\varphi_2(5) = \min\,(75, 64, 52, 54, 61, 76) = 52.$$

3-й этап. Определим оптимальную стратегию при размещении пяти предприятий в трех районах по формуле

$$\varphi_3(x) = \min\{g_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\}.$$

Найдем $\varphi_3(5)$:

$$g_3(5) + \varphi_2(0) = 74 + 0 = 74,$$
$$g_3(4) + \varphi_2(1) = 54 + 10 = 64,$$
$$g_3(3) + \varphi_2(2) = 36 + 18 = 54,$$
$$g_3(2) + \varphi_2(3) = 20 + 28 = 48,$$
$$g_3(1) + \varphi_2(4) = 9 + 37 = 46,$$
$$g_3(0) + \varphi_2(5) = 0 + 52 = 52,$$
$$\varphi_3(5) = \min\,(74, 64, 54, 48, 46, 52) = 46.$$

Минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 46 млн р.

Определены затраты на строительство предприятий от 1-го до 3-го этапа. Вернемся 3-го к 1-му этапу. Минимальные затраты в 46 млн р. на 3-м этапе получены как 9 + 37, т.е. 9 млн р. соответствуют строительству одного предприятия в третьем районе (см. табл. 2.4). Согласно 2-му этапу 37 млн р. получены как 19 + 18, т.е. 19 млн р. соответствуют строительству двух предприятий во втором районе. Согласно 1-му этапу 18 млн р. соответствуют строительству двух предприятий в первом районе.

О т в е т. Оптимальная стратегия состоит в строительстве одного предприятия в третьем районе, по два предприятия во втором и первом районах, при этом минимальная стоимость строительства и эксплуатации составит 46 ден. ед.

Нахождение рациональных затрат при строительстве трубопроводов и транспортных артерий

Требуется проложить путь (трубопровод, шоссе) между двумя пунктами *A* и *B* таким образом, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальные.

РЕШЕНИЕ. Разделим расстояние между пунктами *A* и *B* на шаги (отрезки). На каждом шаге можем двигаться либо строго на восток (по оси *X),* либо строго на

север (по оси Y). Тогда путь от A в B представляет ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей. Затраты на сооружение каждого из отрезков известны (рис. 2.2) в млн р.

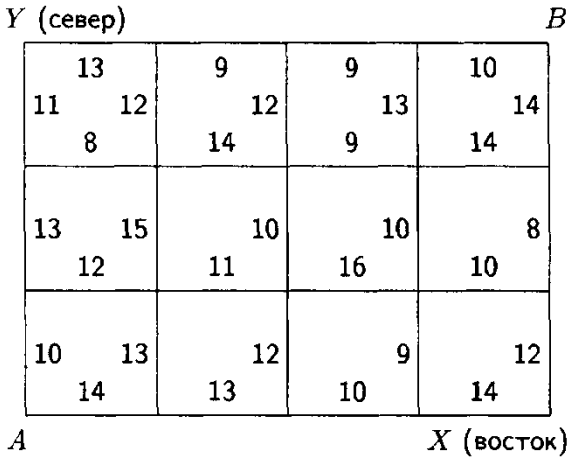


Рис. 2.2

Разделим расстояние от A до B в восточном направлении на 4 части, в северном – на 3 части. Путь можно рассматривать как управляемую систему, перемещающуюся под влиянием управления из начального состояния A в конечное B. Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя целочисленными координатами x и y. Для каждого из состояний системы (узловой точки) найдем условное оптимальное управление. Оно выбирается так, чтобы стоимость всех оставшихся шагов до конца процесса была минимальна. Процедуру условной оптимизации проводим в обратном направлении, т.е. от точки B к точке A.

Найдем условную оптимизацию последнего шага (рис. 2.3).

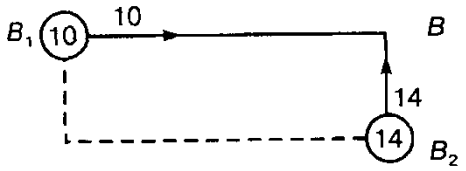


Рис. 2.3

В точку B можно попасть из B_1 или B_2. В узлах запишем стоимость пути. Стрелкой покажем минимальный путь.

Рассмотрим предпоследний шаг (рис. 2.4).

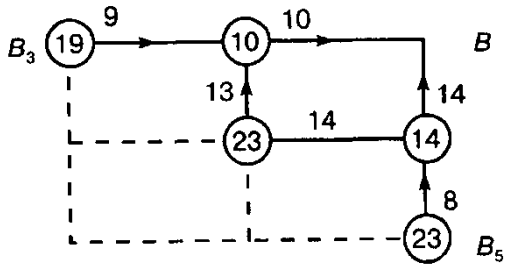


Рис. 2.4

Для точки B_3 условное управление — по оси X, а для точки B_5 — по оси Y. Управление для точки B_4 выбираем как

$$\min(13 + 10, 14 + 14) = \min(23, 28) = 23,$$

т.е. по оси Y.

Условную оптимизацию проводим для всех остальных узловых точек (рис. 2.5).

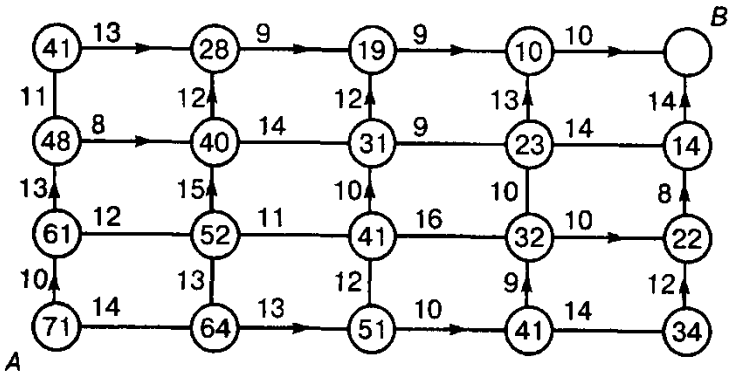


Рис. 2.5

Получим

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (c,\ c,\ в,\ c,\ в,\ в,\ в),$$

где c — север, $в$ —восток.

Минимальные затраты составляют

$$10 + 13 + 8 + 12 + 9 + 9 + 10 = 71 \text{ млн р.}$$

Если решать задачу исходя из оптимальности на каждом этапе, то решение будет следующим:

$$\bar{x} = (c,\ в,\ в,\ c,\ в,\ c,\ в)$$

Затраты составят 10 +12 + 11 + 10 + 9 + 13 +10 = 75 > 71.

О т в е т . Прокладывать путь целесообразно по схеме: $c,\ c,\ в,\ c,\ в,\ в,\ в$, при этом затраты будут минимальные и составят 71 млн р.

Глава 3. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

До появления сетевых методов планирование работ, проектов осуществлялось в небольшом объеме. Наиболее известным средством такого планирования был ленточный график Ганта, недостаток которого состоит в том, что он не позволяет установить зависимости между различными операциями.

Современное сетевое планирование начинается с разбиения программы работ на операции. Определяются оценки продолжительности операций, и строится сетевая модель (график). Построение сетевой модели позволяет проанализировать все операции и внести улучшения в структуру модели до начала ее реализации. Строится календарный график, определяющий начало и окончание каждой операции, а также взаимосвязи с другими операциями графика. Календарный график выявляет критические операции, которым надо уделять особое внимание, чтобы закончить все работы в директивный срок. Что касается некритических операций, то календарный план позволяет определить резервы времени, которые можно выгодно использовать при задержке выполнения работ или эффективном применении как трудовых, так и финансовых ресурсов.

3.1. Основные понятия сетевой модели

Сетевая модель — графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящего из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций. В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа. Граф — схема, состоящая из заданных точек (вершин), соединенных системой линий. Отрезки, соединяющие вершины, называются ребрами (дугами) графа. Ориентированным называется такой граф, на котором стрелкой указаны направления всех его ребер (дуг), что позволяет определить, какая из двух его граничных вершин является начальной, а какая — конечной. Исследование таких сетей проводится методами теории графов.

Теория графов оперирует понятием пути, объединяющим последовательность взаимосвязанных ребер. Контур означает такой путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Сетевой график — это ориентированный граф без контуров. В сетевом моделировании имеются два основных элемента — работа и событие.

Работа — это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата.

Фиктивная работа — это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие — это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Путь — это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Критический путь — это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. Работы, расположенные на критическом пути, называют критическими. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

При построении сетевых моделей необходимо соблюдать следующие правила.

1. Сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером.

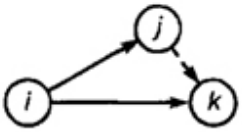


Рис. 3.1

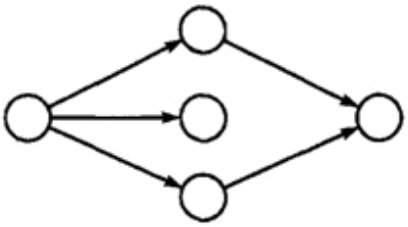


Рис. 3.2

2. Два соседних события могут объединяться лишь одной работой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа (рис. 3.1).

3. В сети не должно быть тупиков, т.е. промежуточных событий, из которых не выходит ни одна работа (рис. 3.2).

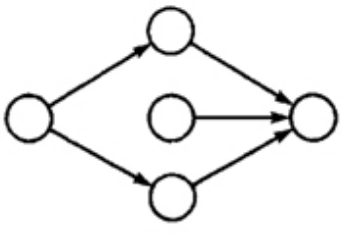


Рис. 3.3

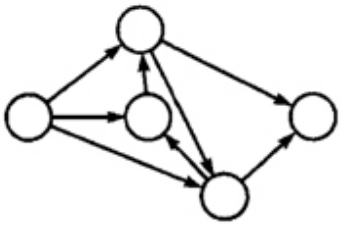


Рис. 3.4

4. В сети не должно быть промежуточных событий, которым не

предшествует хотя бы одна работа (рис. 3.3).

5. В сети не должно быть замкнутых контуров, состоящих из взаимосвязанных работ, создающих замкнутую цепь (рис. 3.4). Для правильной нумерации событий поступают следующим образом: нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1. Из исходного события 1 вычеркивают все исходящие из него работы, на оставшейся сети вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа. Этому событию дается номер 2. Затем вычеркивают работы, выходящие из события 2, и вновь находят на оставшейся части сети событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивается номер 3, и так продолжается до завершающего события. Пример нумерации сетевого графика показан на рис. 3.5.

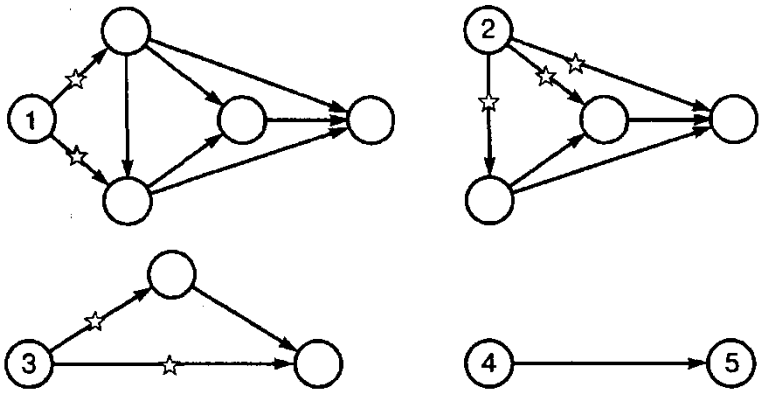


Рис. 3.5

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором — стохастическими (вероятностными).

Рассмотрим в качестве примера программу создания нового бытового прибора, пользующегося спросом у населения. Необходимые данные приведены в табл. 3.1.

На основании данных таблицы построим сетевой график создания прибора с учетом вышеизложенных рекомендаций (рис. 3.6).

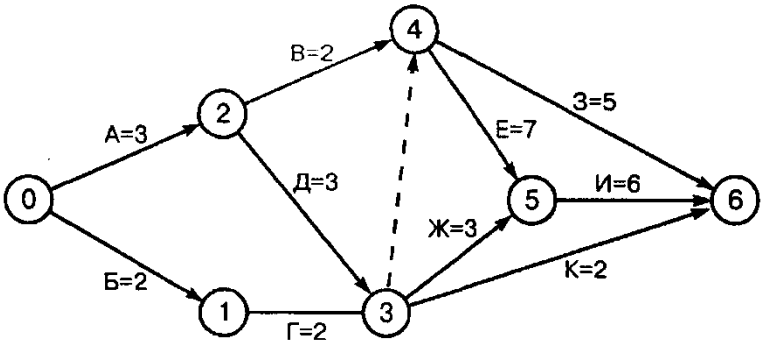


Рис. 3.6

Таблица 3.1

Операции	Наименование работы	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность, недели
А, Б	Разработка технической документации (ТД) на прибор и его электронную часть	—	А-3, Б-2
В, Г	Разработка технологической документации на электронную часть прибора и прибор	А, Б	В-2, Г-2
Д	Передача ТД на прибор	А	3
Е	Изготовление приборов	В	7
Ж	Изготовление электронной части прибора	Д, Г	3
З, К	Разработка ТД на эксплуатацию прибора и электронную часть	Г, В	З-5, К-2
И	Сборка и испытания прибора	Е, Ж	6

Расчет временных параметров сетевого графика

Основным временным параметром сетевого графика является продолжительность критического пути.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется прямым проходом. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

Рассмотрим прямой проход:

$t_i^{\text{р.н.}}$ — ранний срок начала всех операций, выходящих из события i.

Если $i = 0$, то $t_0^{\text{р.н.}} = 0$;

$t_j^{\text{р.н.}}$ — ранний срок начала всех операций, входящих в j.

Тогда

$$t_j^{\text{р.н}} = \max_i (t_i^{\text{р.н}} + t_{ij}) \text{ для всех } (i, j),$$

где t_{ij} — продолжительность операции (i,j);

$$t_1^{\text{р.н}} = t_0^{\text{р.н}} + t_{0,1} = 0 + 2 = 2; \quad t_2^{\text{р.н}} = t_0^{\text{р.н}} + t_{0,2} = 0 + 3 = 3;$$
$$t_3^{\text{р.н}} = \max_{i=1,2}\{2+2, 3+3\} = 6; \quad t_4^{\text{р.н}} = \max_{i=2,3}\{3+2, 6+0\} = 6;$$
$$t_5^{\text{р.н}} = \max_{i=3,4}\{6+3, 6+7\} = 13; \quad t_6^{\text{р.н}} = \max_{i=3,4,5}\{6+2, 6+5, 13+6\} = 19.$$

Прямой проход закончился, начинаем обратный:

$t_i^{\text{п.о}}$ — поздний срок окончания всех операций, входящих в событие *i*.

Если $i = n$, где n — завершающее событие сети, то $t_n^{\text{п.о}} = t_n^{\text{р.н.}}$ и является отправной точкой обратного прохода;

$$t_i^{\text{п.о}} = \min_j (t_j^{\text{п.о}} - t_{i,j}) \text{ для всех операций } (i,j);$$

$$t_6^{\text{п.о}} = t_6^{\text{р.н}} = 19, \qquad t_5^{\text{п.о}} = t_6^{\text{п.о}} - t_{5,6} = 19 - 6 = 13,$$
$$t_4^{\text{п.о}} = \min_{j=5,6}\{19-5, 13-7\} = 6, \quad t_3^{\text{п.о}} = \min_{j=4,5,6}\{19-2, 13-3, 6-0\} = 6,$$
$$t_2^{\text{п.о}} = \min_{j=3,4}\{6-3, 6-2\} = 3, \quad t_1^{\text{п.о}} = t_3^{\text{п.о}} - t_{1,3} = 6 - 2 = 4,$$
$$t_0^{\text{п.о}} = \min_{j=1,2}\{3-3, 4-2\} = 0.$$

Используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить операции критического пути. Операция *(i, j)* принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет условиям:

$$t_i^{\text{р.н}} = t_i^{\text{п.о}},$$
$$t_j^{\text{р.н}} = t_j^{\text{п.о}},$$
$$t_j^{\text{р.н}} - t_i^{\text{р.н}} = t_j^{\text{п.о}} - t_i^{\text{п.о}} = t_{ij}.$$

Для рассматриваемого примера критический путь включает операции (0,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6).

Операции связаны еще с двумя сроками:

$t_{ij}^{\text{п.н.}}$ — поздний срок начала работы. Он является наиболее поздним (максимальным) из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{\text{п.н}} = t_j^{\text{п.о}} - t_{ij};$$

$t_{ij}^{\text{р.о}}$ — ранний срок окончания работы. Он является наиболее ранним (минимальным) из возможных моментов окончания работы при заданной продолжительности работ:

$$t_{ij}^{\text{р.о}} = t_i^{\text{р.н}} + t_{ij}.$$

Различают два вида резервов времени: полный резерв ($r_{\text{п}}$) и свободный резерв ($r_{\text{св}}$).

Полный резерв времени показывает, на сколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ относительно критического пути. Он представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция, и ее продолжительностью (t_{ij}) и определяется как

$$t_{ij}^{\text{п.н}} - t_i^{\text{р.н}}.$$

Свободный резерв времени — максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события наступают в ранние сроки:

$$r_{\text{св}\,ij} = t_j^{\text{р.н}} - t_i^{\text{р.н}} - t_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций представлены в нижеследующей таблице. Следует отметить, что критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени, при этом свободный резерв также должен быть равен нулю.

Построение сетевого графика и распределение ресурсов

Конечным результатом выполняемых на сетевой модели расчетов является сетевой график (план). При построении сетевого графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, иногда оказывается невозможным. Именно в этом отношении представляют ценность полные резервы времени некритических операций.

Сдвигая некритическую операцию в том или ином направлении, но в пределах ее полного резерва времени, можно добиться снижения максимальной потребности в ресурсах. Оданако даже при отсутствии ограничений на ресурсы полные резервы времени обычно используются для выравнивания потребностей в ресурсах на протяжении всего срока реализации программы работ. Это означает, что работы удастся выполнить более или менее постоянным составом рабочей силы.

Таблица 3.2

Работа (i,j)	Продолжительность t_{ij}	Раннее		Позднее		Полный резерв $r_{\text{п}}$	Свободный резерв $r_{\text{св}}$
		начало $t_i^{\text{р.н}}$	окончание $t_{ij}^{\text{р.о}}$	начало $t_{ij}^{\text{п.н}}$	окончание $t_j^{\text{п.о}}$		
1	2	3	4	5	6	7	8
(0,1)	2	0	2	2	4	2	0
(0,2)	3	0	3	0	3	$0^{\text{к}}$	0
(1,3)	2	2	4	4	6	2	2
(2,3)	3	3	6	3	6	$0^{\text{к}}$	0
(2,4)	2	3	5	4	6	1	1
(3,4)	0	6	6	6	6	$0^{\text{к}}$	0
(3,5)	3	6	9	10	13	4	4
(3,6)	2	6	8	17	19	11	11
(4,5)	7	6	13	6	13	$0^{\text{к}}$	0
(4,6)	5	6	11	14	19	8	8
(5,6)	6	13	19	13	19	$0^{\text{к}}$	0

На рис. 3.7 показан график примера, рассмотренного выше. Роль полных и свободных резервов при выборе сроков объясняется двумя правилами:

1) если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием;

2) если свободный резерв меньше полного, то срок начала некритической операции можно сдвинуть по отношению к раннему сроку ее начала не более чем на величину свободного резерва.

В вышеуказанном примере правило 2 применимо к операции $(0,1)$, а сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1.

В табл. 3.2 представлены ресурсы рабочей силы для различных операций.

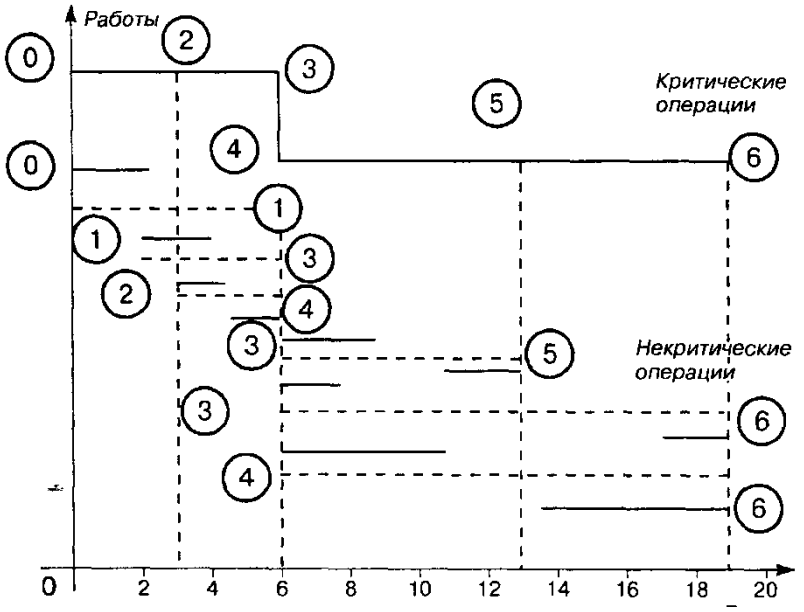


Рис. 3.7

На рис. 3.8 показана потребность в рабочей силе при условии выбора в качестве календарных сроков некритических операций начала их ранних сроков, на рис. 3.9 — потребность в рабочей силе при выборе наиболее поздних сроков.

Пунктирной линией представлена потребность критических операций, которая должна быть удовлетворена, если нужно выполнить все работы в минимально возможный срок.

Оптимальное решение задачи равномерного использования ресурсов (минимизация максимальной потребности в ресурсах) представлено на рис. 3.10, уточненный график выполнения работ указан на рис. 3.11.

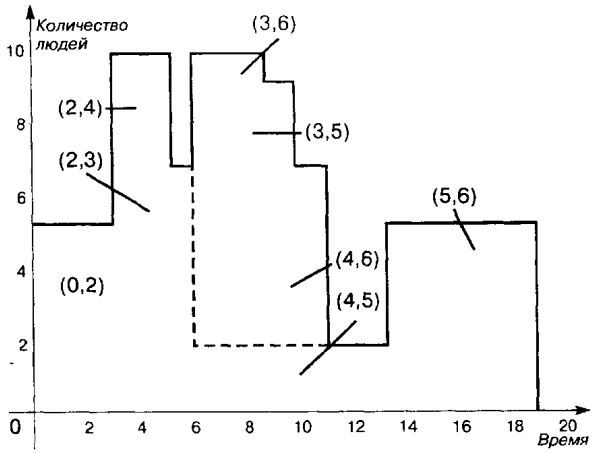


Рис. 3.8

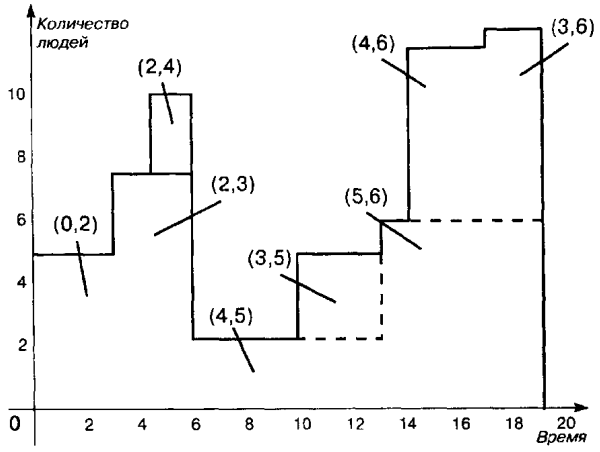


Рис. 3.9

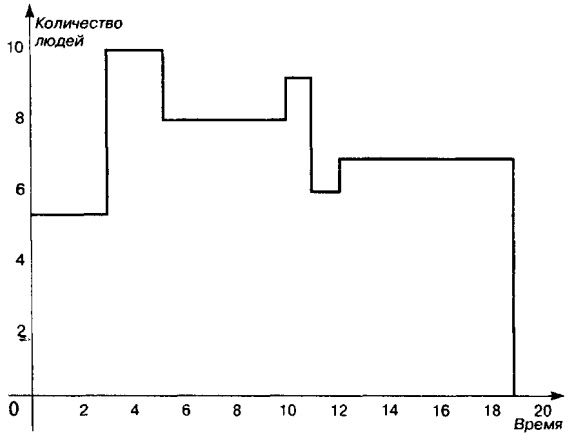


Рис. 3.10

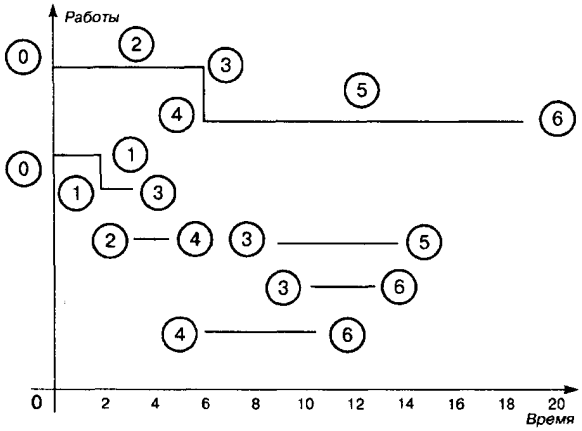


Рис. 3.11

Учет стоимостных факторов при реализации сетевого графика

Стоимостные факторы при реализации сетевого графика учитываются путем определения зависимости "затраты-продолжительность" для каждой операции. При этом рассматриваются прямые затраты, а косвенные типа

административных или управленческих расходов не принимаются во внимание.

На рис. 3.12 показана линейная зависимость стоимости операции от ее продолжительности. Точка (D_B, C_B), где D_B — продолжительность операции, а C_B — ее стоимость, соответствует нормальному режиму выполнения операции. Продолжительность операции можно уменьшить (сжать), увеличив интенсивность использования ресурсов, а следовательно, увеличив стоимость операции. Однако существует предел, называемый *минимальной продолжительностью операции.* За точкой, соответствующей этому пределу (точка максимально интенсивного режима), дальнейшее увеличение интенсивности использования ресурсов ведет лишь к увеличению затрат без сокращения продолжительности операции. Этот предел обозначен на рис. 3.12 точкой *A* с координатами (D_A, C_A).

Линейная зависимость "затраты-продолжительность" принимается из соображений удобства, так как ее можно определить для любой операции по двум точкам нормального и максимально интенсивного режимов, т.е. по точкам *A* и *B*.

Использование нелинейной зависимости "затраты-продолжительность" существенно усложняет вычисления. Поэтому иногда нелинейную зависимость можно аппроксимировать кусочно-линейной (рис. 3.13), когда операция разбивается на части, каждая из которых соответствует одному линейному отрезку. Следует отметить, что наклоны этих отрезков при переходе от точки нормального режима к точке максимально интенсивного режима возрастают. Если это условие не выполняется, то аппроксимация не имеет смысла.

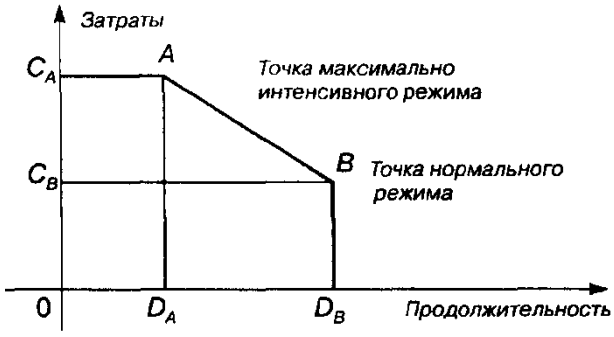


Рис. 3.12

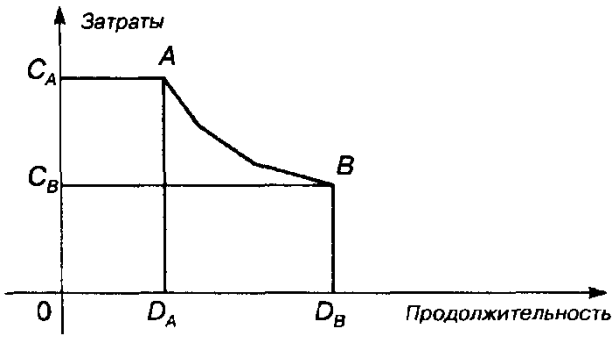


Рис. 3.13

Определив зависимость "затраты-продолжительность", для всех операций сети принимают нормальную продолжительность. Далее рассчитывается сумма затрат на все операции сети при этой продолжительности работ. На следующем этапе рассматривается возможность сокращения продолжительности работ. Этого можно достичь за счет уменьшения продолжительности какой-либо критической операции, только критические операции и следует подвергать

анализу.

Чтобы добиться сокращения продолжительности выполнения работ при минимально возможных затратах, необходимо в максимально допустимой степени сжать ту критическую операцию, у которой наклон кривой "затраты-продолжительность" наименьший. В результате сжатия критической операции получают новый календарный график, возможно, с новым критическим путем. Стоимость работ при новом календарном графике будет выше стоимости работ по предшествующему графику. На следующем этапе этот новый график вновь подвергается сжатию за счет следующей критической операции с минимальным наклоном кривой "затраты-продолжительность" при условии, что продолжительность этой операции не достигла минимального значения. Подобная процедура повторяется, пока все критические операции не будут находиться в режиме максимальной интенсивности. Полученный таким образом оптимальный календарный график соответствует минимуму прямых затрат.

Обоснование привлекательности проекта по выпуску продукции

Для финансирования проектов по строительству и наладке изготовления конкурентоспособной продукции в большинстве случаев фирмам требуются инвестиции. Включение в проект материалов с оптимизацией сетевых моделей в части обоснования сроков возврата инвестиций делает проект более привлекательным и способствует принятию инвестором положительного решения.

Пример 1. Предприятие решило для улучшения финансового состояния наладить выпуск конкурентоспособной продукции (мороженого). Для переоборудования цеха (участка) под выпуск этой продукции необходимо выполнить:

1) подготовку технического задания на переоборудование участка (30 дн.);
2) заказ и поставку нового оборудования (60 дн.);
3) заказ и поставку нового электрооборудования (50 дн.);
4) демонтаж старого и установку нового оборудования (90 дн.);
5) демонтаж старого и установку нового электрооборудования (80 дн.);
6) переобучение персонала (30 дн.);
7) испытания и сдачу в эксплуатацию оборудования для производства мороженого (20 дн.).

Ожидается, что производительность после ввода новой линии составит 20 т мороженого в смену. Прибыль от реализации 1 т продукции составит 0,5 тыс. р. в смену. Деньги на покупку и переоборудование участка в размере 2000 тыс. р. взяты в банке под 20% годовых (из расчета 1500 тыс. р. на закупку

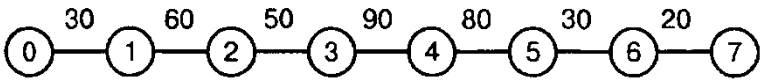
оборудования и 500 тыс. р. на работы по демонтажу старого оборудования и установке нового оборудования). Затраты на проведение работ в нормальном и максимальном режимах указаны в табл. 3.3.

Определить, через какое время может быть возвращен кредит в банк.

Таблица 3.3

Работа	Нормальный режим		Максимальный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.
1	30	20	25	30
2	60	40	45	60
3	50	30	40	40
4	90	70	70	100
5	80	60	65	70
6	30	25	20	25
7	20	20	17	25
Итого	360	265	282	350

РЕШЕНИЕ. 1. Составим график проведения работ по пуску новой линии:



На проведение переоборудования необходимо

$$30 + 60 + 50 + 90 + 80 + 30 + 20 = 360 \text{ дн.}$$

2. График можно улучшить, выполняя некоторые работы параллельно. Получим график (рис. 3. 14).

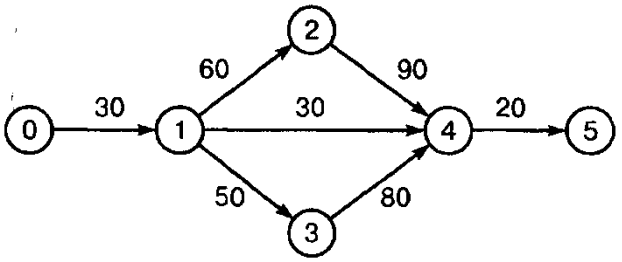


Рис. 3.14

На этом графике обозначены работы:

0,1 — подготовка технического задания;

1,2 — заказ и поставка нового оборудования;

1,3 — заказ и поставка нового электрооборудования;

2,4 — установка нового оборудования;

3,4 — установка нового электрооборудования;

1,4 — переобучение персонала;

4,5 — сдача в эксплуатацию новой линии.

По графику путь (0,1), (1,2), (2,4), (4,5) имеет продолжительность 200 дн.; (0,1), (1,3), (3,4), (4,5) — 180 дн.; (0,1), (1,4),(4,5) - 80дн.

Критическим путем графика является путь, на котором находятся работы (0,1), (1,2), (2,4), (4,5) продолжительностью

$$30 + 60 + 90 + 20 = 200 \text{ дн.}$$

График улучшился на 360 — 200 = 160 дн.

Определим, через какое время после начала выпуска мороженого может быть возвращен кредит в банк.

Через 200 дн. после начала работ предприятие истратит 1 500 тыс. р. на приобретение оборудования (согласно условию примера) и 265 тыс. р. на его установку и сдачу в эксплуатацию (см. табл. 3.3, столбец "Затраты" при нормальном режиме). В наличии у предприятия останется

$$2\,000 - 1500 - 265 = 235 \text{ тыс. р.}$$

Построим графики изменения кредита в зависимости от времени получения прибыли предприятием — от выпуска мороженого (рис. 3.15).

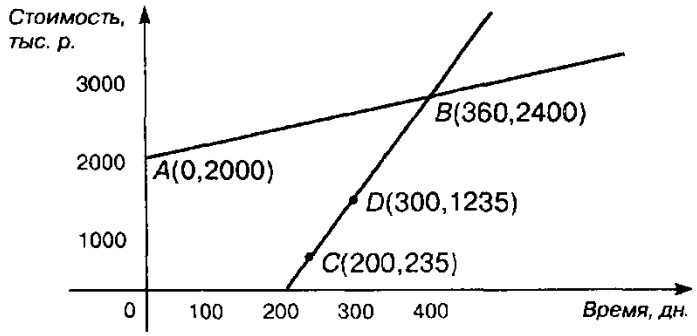


Рис. 3.15

Для построения графика изменения кредита в зависимости от времени составим уравнение. Через 360 дн. после выдачи банком кредита под 20% годовых долг предприятия составит 2 400 тыс. р. Поэтому известны две точки этой прямой: *A* (0, 2000), *B* (360, 2400). Согласно уравнению прямой, прохо-

дящей через две точки:

$$(y - y_A)/(y_B - y_A) = (x - x_A)/(x_B - x_A),$$
$$(y - 2000)/(2400 - 2000) = (x - 0)/(360 - 0).$$

Решая уравнение, получим

$$10x - 9y + 18000 = 0. \qquad (3.1)$$

Найдем уравнение прибыли предприятия. Известно, что через 200 дн. после начала работ у предприятия осталось от кредита 235 тыс. р. Через 100 дн. после начала выпуска продукции предприятие получит прибыль

$$0,5(\text{тыс. р.}) \cdot 20(\text{т}) \cdot 100(\text{дн.}) = 1000 \text{ тыс. р.}$$

и у него будет в наличии

$$1000 + 235 = 1235 \text{ тыс. р.}$$

Таким образом, для нахождения уравнения прибыли имеем две точки: *C* (200, 235), *D* (300, 1235). Тогда

$$\begin{gathered}(y - y_C)/(y_D - y_C) = (x - x_C)/(x_D - x_C),\\ (y - 235)/(1235 - 235) = (x - 200)/(300 - 200),\\ 10x - y - 1765 = 0.\end{gathered} \qquad (3.2)$$

Решая совместно уравнения (3.1) и (3.2), определим время, когда кредит может быть возвращен в банк:

$$\begin{cases} 10x - 9y + 18000 = 0,\\ 10x - y - 1765 = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем $y = 2471$, $x = 423{,}6 \approx 424$ дн.

3. График выполнения работ может быть сжат за счет выполнения некоторых операций в максимально интенсивном режиме.

Вычислим наклоны кривой "затраты-продолжительность" для каждой операции. Результаты расчетов даны в табл. 3.4.

Учитывая наклоны кривой, производим сжатие операций (0,1), (2,4), (3,4), (4,5), получим сетевой график (рис. 3.16).

Таблица 3.4

Операция	Наклон
0,1	2
1,2	1,3
1,3	1
2,4	1,5
3,4	0,7
1,4	1
4,5	1,7

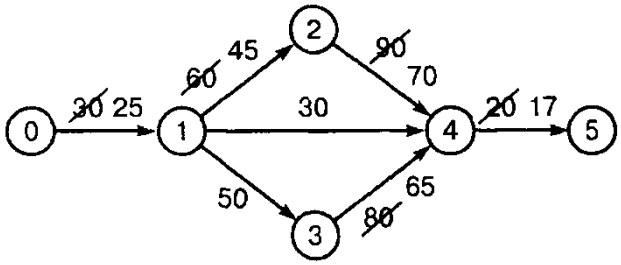


Рис. 3.16

Новый график имеет 2 критических пути: (0,1), (1,2), (2,4), (4,5) и (0,1), (1,3), (3,4), (4,5) с продолжительностью 157 дн.

Таким образом, критический путь сокращен с 200 до 157 дн., а это означает, что предприятие начнет производить мороженое через 157 дн. после начала работ.

Определим, сколько предприятию придется заплатить за "сжатие" критического пути (см. табл. 3.3):

$$
\begin{aligned}
(0,1): &\quad 30-20=10 \text{ тыс. р.};\\
(1,2): &\quad 60-40=20 \text{ тыс. р.};\\
(2,4): &\quad 100-70=30 \text{ тыс. р.};\\
(3,4): &\quad 70-60=10 \text{ тыс. р.};\\
(4,5): &\quad 25-20=5 \text{ тыс. р.}
\end{aligned}
$$

Таким образом, "сжатие" работ (0,1), (1,2), (2,4), (3,4), (4,5) обойдется предприятию в

$$10+20+30+10+5=75 \text{ тыс. р.}$$

График изменения кредита в зависимости от времени остается прежним (см. рис. 3.15). Его вид определяет уравнение

$$10x - 9y + 18000 = 0.$$

Найдем уравнение прибыли.

Через 157 дн. после начала работ у предприятия осталось от кредита

$$2000 - 1500 - 265 - 75 = 160 \text{ тыс. р.}$$

Через 100 дн. после начала выпуска продукции предприятие получит прибыль

$$20(\text{тыс. р.}) \cdot 0.5(\text{тыс. р.}) \cdot 100(\text{дн.}) = 1000 \text{ тыс. р.},$$

и у него будет в наличии

$$1000 + 160 = 1160 \text{ тыс. р.}$$

Таким образом, для нахождения уравнения прибыли предприятия имеем две точки:

$$C'(157, 160) \text{ и } D'(257, 1160).$$

Согласно уравнению прямой, проходящей через 2 точки, получим

$$\begin{gathered}(y - y_{C'})/(y_{D'} - y_{C'}) = (x - x_{C'})/(x_{D'} - x_{C'}), \\ (y - 160)/(1160 - 160) = (x - 157)/(257 - 157), \\ 10x - y - 1410 = 0.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Решая совместно уравнения (3.1) и (3.3), определим время, когда кредит может быть возвращен в банк:

$$\begin{cases} 10x - 9y + 18000 = 0, \\ 10x - y - 1410 = 0, \end{cases}$$
$$y = 2426,25,\ x = 383,6 \approx 384 \text{ дн.}$$

Таким образом, через 384 дн. предприятие может вернуть кредит в банк. По сравнению с предыдущим случаем (см. п. 2) предприятие вернет в банк деньги раньше на 424 — 384 = 40 дн.

При нормальном режиме работ критический путь составляет 200 дн., стоимость работ — 265 тыс. р.

Критический путь уменьшен до 157 дн., минимальная стоимость работ составляет 265 + 75 = 340 тыс. р. при максимальном режиме.

3.2. Минимизация сети

Задача минимизации сети состоит в нахождении ребер, соединяющих все узлы сети и имеющих минимальную суммарную длину (рис. 3.17).

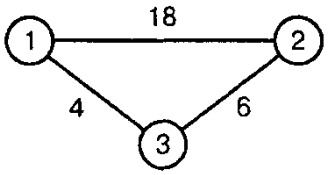


Рис. 3.17

На ребрах, соединяющих узлы 1, 2, 3, указаны длины. Узел 3 соединен с узлами 1 и 2 минимальной длиной 4 + 6 = 10. Если соединить узлы 1 и 2, то возникает цикл и получающаяся сеть не будет минимальной. Отсутствие циклов в минимальной сети дало ей название "минимальное дерево-остов".

Алгоритм решения

Начнем с любого узла и соединим его с ближайшим узлом сети. Соединенные два узла образуют связное множество, а остальные — несвязное. Далее в несвязном множестве выберем узел, который расположен ближе других к любому из узлов связного множества. Скорректируем связное и несвязное множества и будем повторять процесс до тех пор, пока в связное множество не попадут все узлы сети. В случае одинаково удаленных узлов выберем любой из них, что указывает на неоднозначность (альтернативность) "минимального дерева-остова".

Пример 2. Телевизионная фирма планирует создание кабельной сети для обслуживания 5 районов-новостроек. Числа на ребрах указывают длину кабеля (рис. 3.18). Узел 1 — телевизионный центр. Отсутствие ребра между двумя узлами означает, что соединение соответствующих новостроек либо связано с большими затратами, либо невозможно.

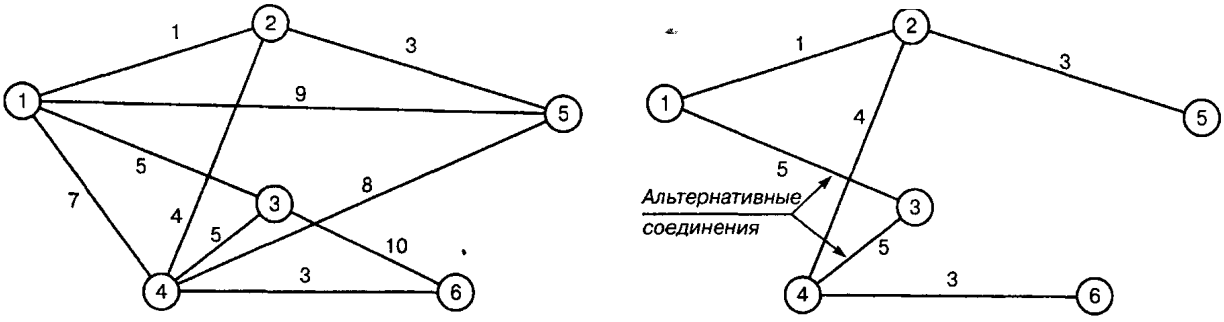


Рис. 3.18 **Рис. 3.19**

Найти такое соединение кабелем районов-новостроек, чтобы длина его была минимальной.

РЕШЕНИЕ. Минимальная длина кабеля: 1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16 (рис. 3.19).

Пример 3. На рис. 3.20 указаны длины коммуникаций, связывающих 9 установок по добыче газа в открытом море с расположенным на берегу приемным пунктом. Поскольку скважина 1 расположена ближе всех к берегу, она оснащена необходимым оборудованием для перекачки газа, идущего с остальных скважин в приемный пункт.

Построить сеть трубопровода, соединяющего все скважины с приемным пунктом и имеющего минимальную общую длину труб.

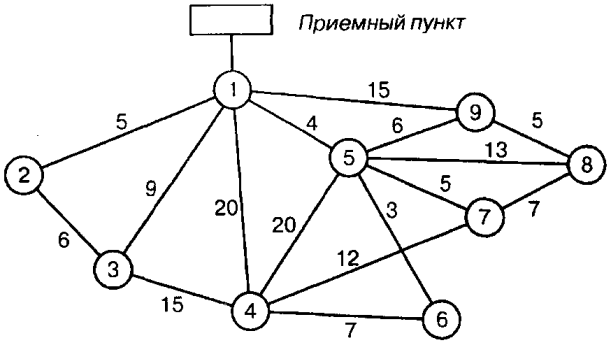


Рис. 3.20

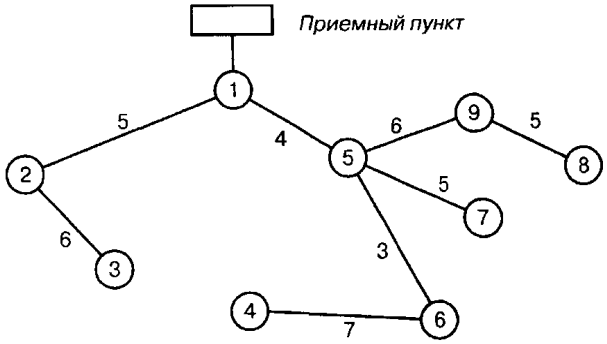


Рис. 3.21

РЕШЕНИЕ. Минимальная длина труб: 5 + 6 + 4 + 3 + 7 + 5 + 6 + 5 = 41 (рис. 3.21).

Нахождение кратчайшего пути

Задача состоит в нахождении связанных между собой дорог на транспортной сети, которые в совокупности имеют минимальную длину от исходного пункта до пункта назначения.

Введем обозначения:

d_{ij} — расстояние на сети между смежными узлами i и j;

U_j — кратчайшее расстояние между узлами i и j, $U_1 = 0$.

Формула для вычисления U_j:

$$U_j = \min_i \left\{ \begin{array}{l} \text{Кратчайшее расстоя-} \\ \text{ние до предыдущего} \\ \text{узла } i \text{ плюс расстояние} \\ \text{между текущим узлом } j \\ \text{и предыдущим узлом } i \end{array} \right\} = \min_i \{U_i + d_{ij}\}.$$

Из формулы следует, что кратчайшее расстояние U_j до узла j можно вычислить лишь после того, как определено кратчайшее расстояние до каждого предыдущего узла i, соединенного дугой с узлом j. Процедура завершается, когда получено U_i последнего звена.

Определить кратчайшее расстояние между узлами 1 и 7 (рис. 3.22).

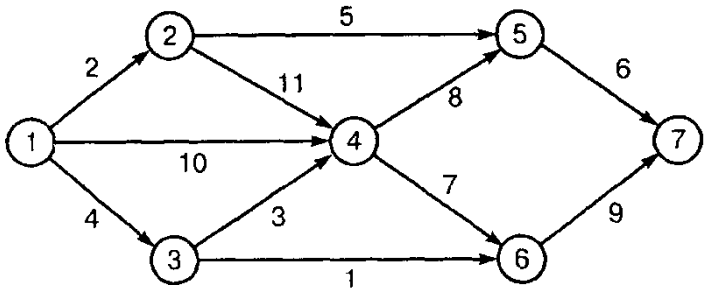


Рис. 3.22

РЕШЕНИЕ. Найдем минимальные расстояния:

$$
\begin{aligned}
&U_1 = 0,\\
&U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2,\\
&U_3 = U_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4,\\
&U_4 = \min\{U_1 + d_{14}; U_2 + d_{24}; U_3 + d_{34}\} =\\
&\quad = \min\{0 + 10; 2 + 11; 4 + 3\} = 7,\\
&U_5 = \min\{U_2 + d_{25}; U_4 + d_{45}\} = \min\{2 + 5; 7 + 8\} = 7,\\
&U_6 = \min\{U_3 + d_{36}; U_4 + d_{46}\} = \min\{4 + 1; 7 + 7\} = 5,\\
&U_7 = \min\{U_5 + d_{57}; U_6 + d_{67}\} = \min\{7 + 6; 5 + 9\} = 13.
\end{aligned}
$$

Минимальное расстояние между узлами 1 и 7 равно 13, а соответствующий маршрут: 1-2-5-7.

Задача замены автомобильного парка

Фирма по прокату автомобилей планирует замену автомобильного парка на очередные 5 лет. Автомобиль должен проработать не менее 1 года, прежде чем фирма поставит вопрос о его замене. На рис. 3.23 приведены стоимости замены автомобилей (усл. ед.), зависящие от времени замены и количества лет, в течение которых автомобиль находился в эксплуатации.

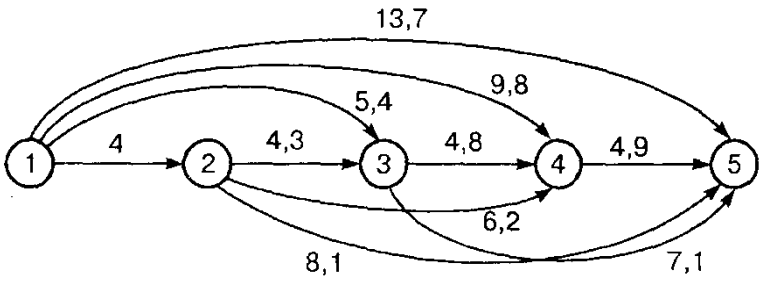


Рис. 3.23

Определить план замены автомобилей, обеспечивающий при этом минимальные расходы.

РЕШЕНИЕ. Найдем минимальные расстояния:

$$
\begin{aligned}
&U_1 = 0,\\
&U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4,\\
&U_3 = \min\{U_1 + d_{13}; U_2 + d_{23}\} = \min\{0 + 5,4; 4 + 4,3\} = 5,4,\\
&U_4 = \min\{U_1 + d_{14}; U_2 + d_{24}; U_3 + d_{34}\} =\\
&\quad = \min\{0 + 9,8; 4 + 6,2; 5,4 + 4,8\} = 9,8,\\
&U_5 = \min\{U_1 + d_{15}; U_2 + d_{25}; U_3 + d_{35}; U_4 + d_{45}\} =\\
&\quad = \min\{0 + 13,7; 4 + 8,1; 5,4 + 7,1; 9,8 + 4,9\} = 12,1.
\end{aligned}
$$

Кратчайший путь 1-2-5 со стоимостью 12,1 усл. ед. Это означает, что каждый автомобиль заменяется через 2 года, а через 5 — списывается.

Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО)

4.1. Формулировка задачи и характеристики СМО

Часто на практике приходится сталкиваться с такими ситуациями: очередь покупателей в кассах магазинов; колонна автомобилей, движение которых остановлено светофором; ряд станков, вышедших из строя и ожидающих ремонта, и т.д. Все эти ситуации объединяет то обстоятельство, что системам необходимо пребывать в состоянии ожидания. Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем, которые называют *системами массового обслуживания (СМО).*

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживающих единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы.

В промышленности СМО применяются при поступлении сырья, материалов, комплектующих изделий на склад и выдаче их со склада; обработке широкой номенклатуры деталей на одном и том же оборудовании; организации наладки и ремонта оборудования; определении оптимальной численности обслуживающих отделов и служб предприятий и т.д.

Под системой массового обслуживания (СМО) будем понимать комплекс, состоящий из: а) случайного входящего потока требований (событий), нуждающихся в «обслуживании», б) дисциплины очереди, в) механизма, осуществляющего обслуживание.

Входящий поток. Для описания входящего потока обычно задается вероятностный закон, управляющий последовательностью моментов поступления требований на обслуживание и количеством требований в каждом поступлении (то есть требования поступают либо единичные, либо групповые). Источник, генерирующий требования, считается неисчерпаемым. Требование, поступившее на обслуживание, может обслуживаться сразу, если есть свободные обслуживающие приборы, либо ждать в очереди, либо отказаться от ожидания, то есть покинуть обслуживающую систему.

СМО можно разбить на две группы:

- разомкнутые (источник входящих требований неиссякаемый - поток клиентов в парикмахерские, магазины, звонков на АТС и др.);

- замкнутые (имеют ограниченный поток требований, например, выход прибора из строя и его восстановление).

Дисциплина очереди. Это описательная характеристика. Требование, поступившее в систему обслуживается в порядке очереди – дисциплина очереди: «первым пришел – первым обслужен». Другая дисциплина очереди: «последним пришел – первым обслужен»- это обслуживание по приоритету. Наконец, обслуживание требований может быть случайным.

Механизм обслуживания. Характеризуется продолжительностью и характером процедур обслуживания. Обслуживание может осуществляться по принципу: «на одно требование – один обслуживающий прибор». Если в системе несколько приборов, то параллельно могут обслуживаться несколько требований. Часто используют групповое обслуживание, то есть требование обслуживается одновременно несколькими приборами. В некоторых случаях требование обслуживается последовательно несколькими приборами – это многофазовое обслуживание.

По окончании обслуживания требование покидает систему.

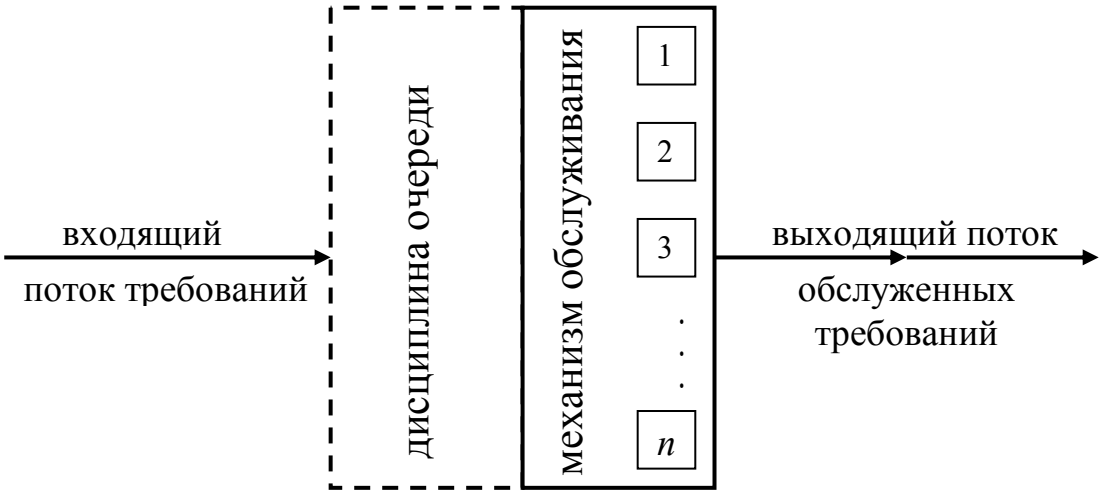


Рис. 4.1

Функционирование СМО представляется в виде связного графа ее состояний $C_i, i \in N$. Переход системы из состояния C_i в состояние C_j графически осуществляется по направленным отрезкам с заданными **интенсивностями** переходов λ_{ij}. Если переход невозможен, то $\lambda_{ij} = 0$.

В стационарном (установившемся) режиме действует принцип равновесия: сумма «входов» в любое состояние равна сумме «выходов» из него. Это позволяет записать уравнения равновесия по каждому из состояний (принцип декомпозиции).

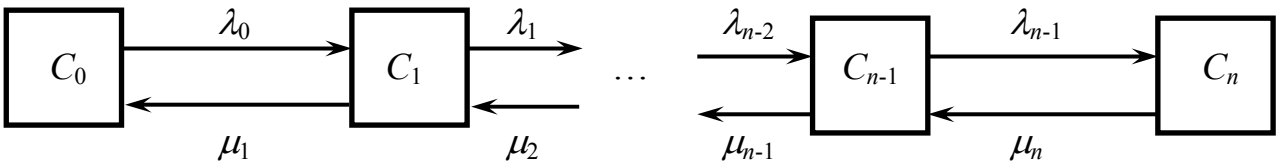


Рис. 4.2

Целью анализа системы массового обслуживания является рациональный выбор структуры обслуживания и процесса обслуживания. Для этого требуется разработать показатели эффективности систем массового обслуживания. Например, требуется знать: вероятность того, что занято или свободно k приборов; распределение вероятностей свободных или занятых приборов от обслуживания; вероятность того, что в очереди находится заданное число требований; вероятность того, что время ожидания в очереди превысит заданное. К показателям, характеризующих эффективность функционирования системы в среднем, относятся: средняя длина очереди; среднее время ожидания обслуживания; среднее число занятых приборов; среднее время простоя приборов; коэффициент загрузки системы и др. Часто вводятся экономические показатели. Разработкой математических моделей, получением числовых результатов и анализом показателей эффективности занимается теория массового обслуживания (ТМО).

4.2. Входящий поток требований

Случайным потоком событий называется появление однородных событий в случайные моменты времени.

Рассмотрим временную ось (рис. 4.3). Поток событий представляет собой, вообще говоря, последовательность «случайных» точек $\delta_1 < \delta_2 < ... < \delta_n$ на оси, разделенных временными интервалами $T_i = (\delta_{i+1} - \delta_i)$, $i \in N$, длина которых случайна.

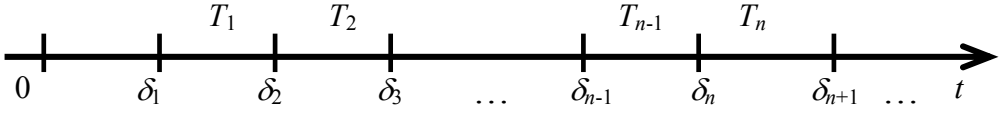


Рис. 4.3

Потоки событий различаются по законам распределения длин интервалов T_i между событиями, по их зависимости или независимости, регулярности и др.

Наиболее изучены потоки, которые обладают следующими свойствами:

а) стационарности – все его вероятностные характеристики не меняются со временем;

б) отсутствия последействия – для любых непересекающихся временных интервалов на временной оси, число событий находящихся на одном интервале, не зависит от того, сколько их и как они оказались на другом интервале;

в) ординарности – практическая невозможность на достаточно малом временном интервале появиться двум и более событиям.

Для практического анализа важно знать, к какому виду можно отнести реальные потоки требований. В анализ входит нахождение функции распределения, управляющей входящим потоком и/или оценка ее параметров. Для этого необходимо:

а) выбрать интервал времени, в течение которого поток требований практически стационарный;

б) весь интервал разделить на достаточное число полуоткрытых непересекающихся промежутков, внутри каждого из которых подсчитывается число поступивших требований;

в) построить гистограмму и найти эмпирическую функцию распределения;

г) выдвинуть гипотезу о теоретическом аналоге эмпирического распределения;

д) используя критерий χ^2 (Пирсона) и/или Колмогорова сделать вывод о соответствии или несоответствии выдвинутой гипотезы данной выборке;

е) в случае отрицательного результата либо проверяется репрезентативность выборки, или отвергается гипотеза.

1. <u>Пуассоновский поток</u>

В подавляющем большинстве работ по ТМО рассматривается пуассоновский поток требований

$$V_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t},\ k = 0,1,\ldots,$$

где параметр λ определяется как математическое ожидание числа требований, поступающих в СМО в единицу времени (или плотность потока, или интенсивность).

Основание:

а) количественная оценка качества функционирования СМО выражается в простых, относительно других видов потоков, аналитических зависимостях;

б) при расчете показателей эффективности полученные результаты, как правило, отражают наиболее сложный случай (то есть показатели

эффективности имеют более надежные значения).

Если пуассоновский поток нестационарный, то есть, $\lambda = \lambda(t)$, то для расчетов либо весь временной интервал $[0, T)$ разбивается на n временных отрезков, вообще говоря, не равных, и для каждого из них находятся $\lambda_i(t) = \lambda_i \cdot t$, где $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $\sum_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i) = T$, либо используются численные методы. В зависимости от поставленной цели выбирается аналитический подход либо численный.

2. <u>Рекуррентный поток</u>

Так называется поток с ограниченным последействием – последовательность моментов δ_k поступлений требований (рис. 4.3), образована независимыми случайными величинами ξ_k с функциями распределения $F_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$.

Если все $F_k(t)$ (за исключением может быть $F_1(t)$) совпадают, то есть, $\forall k$, $F_k(t) = F(t)$, $F(+0) < 1$, то последовательность моментов δ_k образует процесс восстановления. Следовательно, процесс восстановления – понятие более узкое, чем поток с ограниченным последействием, но шире, чем простейший поток.

Часто поток с ограниченным последействием определяют как поток, у которого случайные интервалы $T_k = [\delta_k, \delta_{k+1})$ между соседними по времени моментами поступления требований, считаются независимыми случайными величинами.

Стационарный поток с ограниченным последействием называется *потоком Пальма*. Легко понять, что для него все случайные интервалы T_k должны иметь одну и ту же функцию распределения.

Примером потока Пальма является простейший поток (для потока независимого от времени – это геометрическое распределение, для непрерывного времени – это пуассоновский поток).

Случайный стационарный поток, у которого все интервалы T_k имеют нормальное (при $t \geq 0$) распределение, является потоком Пальма (очевидно, что последействие здесь имеется).

3. <u>Потоки Эрланга</u>

Поток Пальма, у которого интервалы времени между поступлениями требований являются случайной величиной с функцией распределения Эрланга

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!},\ \lambda > 0$$

называется *потоком Эрланга порядка k*, $k = 1,2,\ldots$.

В частности, поток Эрланга 1-го порядка является простейшим потоком, то есть,

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$

Пусть требования, поступающие в систему, образуют простейший поток. Потоку Эрланга порядка k будет удовлетворять каждое k-ое из множества поступивших требований простейшего потока. То есть, поток Эрланга является «разряженным» простейшим потоком. Например, если у поступивших по закону простейшего потока в СМО требований учитывать каждое второе, то получаем поток Эрланга 2-го порядка, с функцией распределения

$$F_2(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} - (\lambda \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Следовательно, промежутки времени $T^{(2)}, T^{(3)}, \ldots$ между поступлениями соседних требований, являются случайными с функцией распределения Эрланга 2-го порядка и равны $T^{(2)} = T_1 + T_2$, $T^{(3)} = T_3 + T_4$ и т.д.

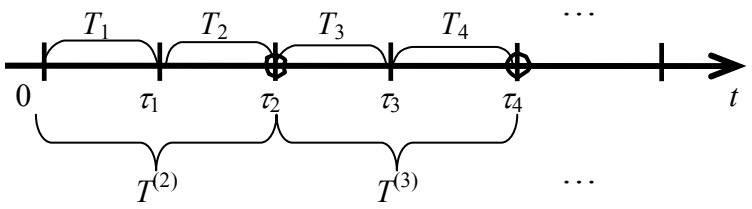


Рис. 4.4

С помощью потоков Эрланга можно моделировать потоки Пальма с различным последействием.

В самом деле, при $k = 1$ получаем простейший поток (у него нет последействия). При увеличении k (до 10÷20) получаем поток Пальма с интервалами между поступлениями требований (как показывают многочисленные эксперименты) распределенными практически нормально. При $k \to \infty$ получаем регулярный (не случайный) поток.

Требование ограниченности последействия слабее, чем отсутствие последействие и, тем самым, охватывает более широкий круг практических задач.

4.3. Время обслуживания (выходящий поток требований)

Время обслуживания $t_{обс}$ является важнейшей статистической характеристикой, поскольку определяет пропускную способность СМО. Обычно это случайная величина η с функцией распределения

$$F(t) = P\{\eta < t\}.$$

В практических приложениях наиболее распространен экспоненциальный закон обслуживания требований

$$F(t) = 1 - exp(-\beta \cdot t),$$

где интенсивность $\beta = 1 / t_{обс}$.

Время обслуживания требования $t_{обс}$ числено равно математическому ожиданию времени обслуживания.

Экспоненциальная функция распределения наиболее приближена к таким реальным случайным процессам, в которых большинство требований обслуживается быстро, что на практике не всегда выполняется.

Пусть в СМО, состоящую из *n* разнотипных приборов, поступает случайный поток требований, каждое из которых обслуживают все приборы. Если время обслуживания определяется экспоненциальным законом распределения с интенсивностью β_k и обслуживание требования заканчивается, если его обслуживание закончил первый из приборов обслуживания, то функция распределения будет экспоненциальной

$$F(t) = 1 - exp(-\beta \cdot t),$$

где $\beta = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$.

В частности, если все обслуживающие устройства одинаковые, то их суммарная интенсивность (для экспоненциального закона) $\beta = n \cdot \beta_0$, где $\beta_0 = 1 / t_{обс}$, $t_{обс}$ - среднее время обслуживания требования любым из *n* устройств. Тогда

$$F(t) = 1 - exp(-n \cdot \beta_0 \cdot t),$$

то есть, при одинаковых обслуживающих устройствах среднее время обслуживания требования уменьшается в *n* раз, а дисперсия – в n^2 раз.

Это свойство справедливо только для экспоненциального распределения. Более общим, является эрланговская функция распределения времени обслуживания $F_k(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!}$, $\lambda > 0$, $k = 1,2,...$

Для стационарного режима функционирования СМО с отказами справедливы формулы Эрланга для любых функций распределения времени обслуживания требований.

Для большинства СМО суммарное время обслуживания требований образует входящий поток, поэтому его важность для СМО не так существенна, поскольку практически не влияет на ее функционирование.

Однако входящий поток сразу становится важным, если он сам является

входящим для других приборов. Это многофазовое обслуживание: требование обслуживается последовательно, переходя от одного прибора к другому.

Если начальный поток требований пуассоновский, то, проходя последовательно через обслуживающие устройства, поток искажается, постепенно «усиливая» последействие.

4.4. Показатели эффективности

Под эффективностью функционирования СМО понимают числовые значения набора показателей (функций), характеризующих уровень выполнения заложенных в нее задач.

При анализе функционирования и определении оптимального варианта в качестве параметров используются:

n – число приборов (обслуживающих устройств);

α – интенсивность входящего потока;

β – интенсивность обслуживания требований;

λ – интенсивность отказов обслуживающего устройства;

μ – интенсивность восстановления отказавшего устройства;

m – число восстанавливающих устройств в системе и др.

1. <u>Показатели эффективности, дающие количественную оценку СМО:</u>

p_0 - вероятность того, что в системе нет требований;

p_k - вероятность того, что в системе обслуживанием занято k из n приборов;

Π - вероятность того, что в системе все приборы заняты обслуживанием;

$t_{ож}$ - среднее время, в течение которого любое требование, находящееся в очереди, ждет начала обслуживания;

A - средняя длина очереди;

B - среднее число обслуживаемых требований;

N_0 – среднее число свободных приборов;

$N_з$ – среднее число приборов, занятых обслуживанием;

R - среднее число требований в системе;

$p_{оч}$ – вероятность очереди;

$p_{отк}$ – вероятность «потери» требования;

$L = t_{ож} + t_{ср}$ - среднее время пребывания требования в системе, где $t_{ср}$ – среднее время обслуживания требования одним прибором;

$K_{пр}$ – коэффициент простоя приборов;

$K_з$ - коэффициент загрузки системы.

2. <u>Экономические показатели:</u>

$q_{об}$ − стоимость обслуживания каждого требования в системе в единицу времени;

$q_{ож}$ − стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени;

q_y − стоимость потерь, связанных с уходом требования из системы, в единицу времени;

$q_з$ − стоимость эксплуатации каждого обслуживающего устройства в единицу времени;

$q_{пр}$ − стоимость простоя обслуживающего устройства в единицу времени.

При выборе оптимальных значений параметров СМО экономические показатели могут быть достаточно эффективны.

Можно использовать функцию потерь $G_Э$ за определенный временной промежуток T (например, месяц):

а) для систем с ожиданием

$$G_Э = (q_{ож} \cdot A + q_{пр} \cdot B_{пр} + q_з \cdot B_з) \cdot T,$$

где A – средняя длина очереди, $B_{пр}$ - среднее число свободных приборов, $B_з$ - среднее число занятых приборов;

б) для систем с отказами (ограничения на длину очереди)

$$G_Э = (q_y \cdot p_n \cdot \alpha + q_з \cdot B_з) \cdot T;$$

в) для смешанных систем

$$G_Э = (q_{ож} \cdot A + q_{пр} \cdot B_{пр} + q_з \cdot B_з + q_y \cdot p_n \cdot \alpha) \cdot T.$$

Можно применить показатель экономической эффективности системы

$$E = p_{обс} \cdot \alpha \cdot c \cdot T - G_Э,$$

где c – экономический эффект, полученный при обслуживании каждого требования в единицу времени, $p_{обс}$ − вероятность обслуживания требования (для систем с отказами).

4.5. Примеры моделей СМО

<u>Модель 1 (системы с ожиданием)</u>

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований на обслуживание интенсивностью α. Время обслуживания каждого

требования случайное с экспоненциальной функцией распределения и интенсивностью обслуживания β. Если требование, поступившее в систему, застает все приборы занятыми, то оно встает в очередь и ждет до тех пор, пока прибор не освободится. В каждый момент времени любой прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать СМО.

Обозначим через p_k – вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k), $k = 0,1,...$.

В соответствие с моделью имеем размеченный граф состояний СМО:

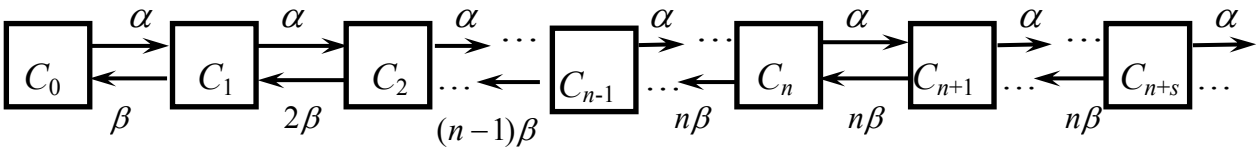


Рис. 4.5

Замечание. Для данной модели необходимо выполнение следующего условия:

$$\alpha/(n\cdot\beta)<1,$$

то есть, входящий поток меньше, чем суммарный выходящий, иначе система не будет функционировать.

Определим показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 – вероятность того, что все приборы свободны:

$$p_0=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\cdot\frac{1}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)}\right)^{-1};$$

2) p_k – вероятность того, что из n приборов занято обслуживанием k приборов (то есть, в системе находится k требований):

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{(\alpha/\beta)^k}{k!}\cdot p_0, & k=1,2,...,n-1;\\ \dfrac{(\alpha/\beta)^k}{n!\cdot n^{k-n}}\cdot p_0, & k=n,n+1,....\end{cases}$$

3) Π – вероятность того, что все приборы заняты ($k\ge n$):

$$\Pi=\frac{(\alpha/\beta)^n}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)}\cdot p_0;$$

4) p_{n+s} – вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и s требований в очереди:

$$p_{n+s}=\frac{(\alpha/\beta)^{n+s}}{n!\cdot n^s}\cdot p_0,\ s=0,1,...\ ;$$

5) $t_{ож}$ – среднее время, в течение которого требование ждет начала обслуживания:

$$t_{ож} = \frac{\Pi}{n \cdot \beta - \alpha};$$

6) вероятность того, что время ожидания в очереди больше среднего $t_{ож}$:

$$P\{\tau_1 > t_{ож}\} = \Pi \cdot \exp\left(-(n \cdot \beta - \alpha) \cdot t_{ож}\right);$$

7) A – средняя длина очереди:

$$A = \frac{(\alpha/(n \cdot \beta)) \cdot p_n}{(1 - \alpha/(n \cdot \beta))^2};$$

8) B – среднее число требований, находящихся в системе:

$$B = A + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p_k + n \cdot \Pi;$$

9) $\aleph_0$ – среднее число свободных приборов

$$\aleph_0 = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k;$$

10) $\aleph_з$ – среднее число приборов, занятых обслуживанием:

$$\aleph_з = n - \aleph_0;$$

11) R – среднее число обслуживаемых требований:

$$\mathrm{R} = \aleph_з;$$

12) $K_{пр}$ – коэффициент простоя приборов:

$$K_{пр} = \frac{\aleph_0}{n};$$

13) $K_з$ – коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{\aleph_з}{n};$$

14) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период T:

$$G_Э = T \cdot (A \cdot q_1 + \aleph_0 \cdot q_2 + \aleph_з \cdot q_3),$$

q_1 – стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди, в единицу времени;

q_2 – стоимость потерь за простой обслуживающего устройства в единицу времени;

q_3 – стоимость эксплуатации прибора при обслуживании требований в единицу времени.

Пример 1. Станция «Железная дорога» в мегаполисе принимает составы

для разгрузки угля на $n=5$ платформах. В среднем за сутки на станцию прибывают 16 составов с углем. Поступление носит случайный характер. Плотность прихода составов показала, что поступление на разгрузку удовлетворяет пуассоновскому потоку с параметром $\alpha=2/3$ состава в час. Время разгрузки состава является случайной величиной, удовлетворяющей экспоненциальному закону со средним временем разгрузки $t_{ср}=6$ час. Простой состава в сутки составляет $q_{ож}=100$ у.е; простой платформы в сутки за опоздание прихода состава – $q_{пр}=1000$ у.е; стоимость эксплуатации платформы в сутки – $q_{з}=1000$ у.е. Издержки подсчитать за сутки. Требуется провести анализ эффективности функционирования станции.

Решение. Условие существования решения $\alpha/(n\cdot\beta)=0{,}8<1$ выполнено. Имеем $n=5$, $\alpha=16$ 1/сутки, $\beta=4$ 1/сутки. В соответствие с моделью показателями эффективности являются:

1). Вероятность того, что станция свободна $p_0=0{,}013$. Это означает, что в течение суток станция свободна ≈19 мин.

2). Вероятность того, что все платформы заняты $\Pi\approx 0{,}556$. То есть, около 13 ч 20 мин. все платформы заняты.

3). Время ожидания разгрузки для каждого состава в среднем составляет $t_{ож}\approx 3$ ч.

4). Вероятность того, что время ожидания в очереди больше среднего $P\{\tau>3\}\approx 0{,}33$, то есть, каждый третий состав ожидает больше 3-х часов.

5). Средняя длина очереди $A\approx 10{,}1$. Очередь велика. Подъездные пути необходимо дублировать.

6). Среднее число занятых платформ $B\approx 4$.

7). Среднее число составов на станции $R=14{,}1$.

8). Среднее время нахождение состава на станции $L=t_{ож}+t_{ср}\approx 9{,}02$.

9). Коэффициент загрузки станции $K_3=0{,}80$.

10). Коэффициент простоя $K_{пр}=0{,}20$.

В среднем каждая платформа простаивает 20% времени.

Для изменения времени простоев будем варьировать число платформ $n=5\div 8$. Результаты расчетов сведем в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№	показатели	платформы			
		5	6	7	8
1	P_0	0,013	0,017	0,18	0,182

2	$П$	0,555	0,29	0,136	0,058
3	$t_{ож}$, ч	3,3	0,87	0,27	0,09
4	A	11,1	1,74	0,42	0,12
5	R	15,1	4,42	3,76	3,76
6	B	1	2	3	3,96
7	$K_{пр}$	0,2	0,3	0,43	0,48

Из табл. 4.1 следует, что при числе платформ $n=6$ почти в 4 раза снижается время ожидания разгрузки, а число составов, ожидающих разгрузки $10{,}1/1{,}74 \approx 5{,}8$, то есть, почти в 6 раз.

Дальнейшее увеличение числа платформ хотя и улучшает показатели, но для окончательного ответа проведем экономические расчеты. Определим суммарные потери за сутки. За лучший (суб–оптимальный) вариант примем тот, для которого издержки наименьшие.

Имеем из (3.46) $G_Э = \alpha \cdot t_{ож} \cdot q_{ож} + K_{пр} \cdot n \cdot q_{пр} + K_з \cdot n \cdot q_з$.

Результаты расчетов приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№	показатели	платформы			
		5	6	7	8
1	$t_{ож}$, ч	3,3	0,87	0,27	0,09
2	$\alpha \cdot t_{ож} \cdot q_{ож}$	6600	1740	540	180
3	$K_{пр}$	0,2	0,3	0,4	0,48
4	$K_{пр} \cdot n \cdot q_{пр}$	1000	1800	3010	3840
5	$K_з \cdot n \cdot q_з$	4000	4800	5600	6400
6	$G_Э$	1160	8340	1115	10420

Из таблицы следует, что наиболее экономичным оказался вариант с $n=6$ платформами.

Замечание. При применении экономического показателя важно правильно оценить реальные издержки, которые могут изменяться, например, от времени года, от объема запасов угля и пр. Приведенные исходные данные демонстрируют скорее метод анализа, чем претензии на соответствие реально существующим издержкам.

Модель 2 (системы с ограниченным временем ожидания).

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований двух видов на обслуживание интенсивностью α_1 и α_2, соответственно. Поступившее в систему требование 1-го вида может покинуть систему только после обслуживания, а требование 2-го вида, застав все приборы занятыми, сразу покидает систему. Время обслуживания любых требований является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью обслуживания β. В любой момент времени каждый прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать эффективность функционирования СМО.

Обозначим через p_k – вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k), $k = 0,1,2,...$.

В соответствие с моделью имеем размеченный граф состояний системы:

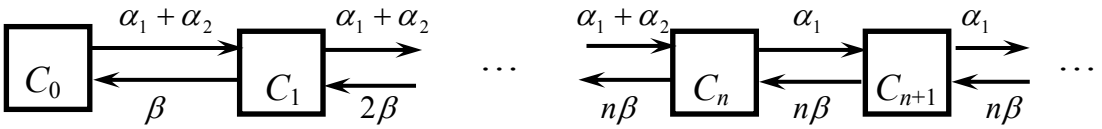


Рис. 4.6

Используя вероятности p_k, получим следующие показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 – вероятность того, что в СМО нет требований:

$$p_0 = \frac{n - \lambda_1}{(n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n(\lambda_1 + \lambda_2)) \cdot D_n(\lambda_1 + \lambda_2)};$$

где $\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}$, $\lambda_2 = \frac{\alpha_2}{\beta}$, $D_n(\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}$, $E_n(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{D_n(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot n!}$.

2) p_k – вероятность того, что k приборов занято обслуживанием, $0 < k \le n$:

$$p_k = \frac{(n - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{(n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n(\lambda_1 + \lambda_2)) \cdot D_n(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot k!};$$

3) p_k – вероятность того, что k требований находится в системе, при условии $k > n$:

$$p_k = \frac{(n - \lambda_1) \cdot E_n(\lambda_1 + \lambda_2)}{n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{n}\right)^{k-n}$$

4) $p_{оч}$ – вероятность очереди, т.е. того, что требований больше чем приборов:

$$p_{оч} = 1 - \sum_{k=0}^{n} p_k ;$$

5) $p_{отк}$ – вероятность «потери» требования:

$$p_{отк} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \frac{n \cdot E_n(\lambda_1 + \lambda_2)}{n - \lambda_1 + \lambda_1 \cdot E_n(\lambda_1 + \lambda_2)};$$

6) $t_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания требованием 1-го типа:

$$t_{ож} = \frac{p_{отк}}{\beta \cdot (n - \lambda_1)};$$

7) $P\{\tau_1 > t\}$ – вероятность того, что время ожидания τ_1 требования 1-го типа больше заданного t:

$$P\{\tau_1 > t_{ож}\} = p_{отк} \cdot \exp\left(-(n - \lambda_1) \cdot \beta \cdot t_{ож}\right);$$

8) $\aleph_з$ – среднее число занятых приборов:

$$\aleph_з = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n \cdot p_k ;$$

9) $\aleph_c$ – среднее число свободных приборов

$$\aleph_c = \sum_{k=0}^{n} (n - k) \cdot p_k ;$$

10) Среднее время нахождение требования в системе:

$$L = t_{ож} + t_{ср};$$

11) $K_{пр}$ – коэффициент простоя приборов:

$$K_{пр} = \frac{\aleph_c}{n};$$

12) $K_з$ – коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{\aleph_з}{n};$$

13) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период T:

$$G_Э = T \cdot (\alpha_2 \cdot p_{отк} \cdot q_1 + \aleph_p \cdot q_2 + \aleph_c \cdot q_3),$$

q_1 – упущенная выгода от потери требования в единицу времени;

q_2 – потери от простоя обслуживающего прибора в единицу времени;

q_3 – потери, связанные с эксплуатацией прибора в единицу времени.

Пример2. АЗС «Фин-Трейд» имеет четыре заправочных места бензином АИ-92 (две колонки по два заправочных места на каждой). Все автомобили, подъезжающие на АЗС, делятся на 2 типа:

- те, кто обязательно дождутся обслуживания, независимо от наличия и величины очереди;

- те, кто откажется от заправки из-за наличия очереди.

При проведении исследований были выбраны колонки для заправки бензином наиболее востребованной марки - АИ-92 и промежуток времени, когда АЗС испытывает наибольшую нагрузку - с 17 до 21 часа.

При помощи применения математического аппарата теории массового обслуживания изучить, насколько эффективно работает АЗС, а именно, заправочные колонки АИ-92, рассчитать и проанализировать следующие показатели эффективности функционирования:

- среднее число занятых заправочных мест;
- среднее число свободных заправочных мест;
- среднее время ожидания автомобилем обслуживания;
- вероятность «потери» клиента, вследствие очереди;
- среднее время незанятости (простоя) и занятости (загрузки) заправочных мест;
- суммарные потери АЗС за исследуемы промежуток времени;

Исходные данные:

Количество заправочных мест	- 4 шт.
Промежуток времени для анализа	- 4 часа.
Среднее число автомобилей	- 188 авт./4 часа.
Из них:	
обслужено	- 170 авт.
не стали обслуживаться	- 18 авт.
Среднее время обслуживания 1 автомобиля	- 5 мин.
Автомобиль заправляется в среднем на	- 500 руб.

Решение. Исходя из постановки задачи, для анализа работы АЗС подходит *модель для системы с ограниченным временем ожидания.*

Определим α_1, α_2 и β необходимые для расчёта модели.

В среднем за 4 часа на АЗС приезжают 190 автомобилей желающих заправиться бензином АИ-92. Все автомобили делятся на 2 типа:

1. Те, кто обязательно дождутся обслуживания независимо от очереди.

2. Те, кто, застав все заправочные места занятыми, откажутся от обслуживания.

Приезд автомобилей любого из 2-х видов носит случайный характер. Плотность приезда автомобилей показала, что их поступление на АЗС удовлетворяет пуассоновскому потоку с параметрами α_1=170 1/(4 часа) для автомобилей 1-го типа и α_2=20 1/(4 часа) для автомобилей 2-го типа.

Время обслуживания одного автомобиля (подъезд к заправочному месту, оплата, заправка, отъезд) является случайной величиной, удовлетворяющей экспоненциальному закону со средним временем обслуживания $t_{ср}$=5 мин.

Так как для анализа был выбран промежуток размером 4 часа, то интенсивность обслуживания β=48 1/(4 часа).

При расчете показателей СМО - работы АЗС с 4-мя заправочными местами для заправки бензином АИ-92 получены следующие результаты:

1) Вероятность того, что на заправочных местах нет автомобилей p_0=0,00441. Это означает, что в течение 4-х часов на заправочных местах нет автомобилей ≈ 1 минуту.

2) p_k – вероятность того, что k заправочных мест занято обслуживанием, $0 < k \le n$: p_1=0,018, p_2=0,038, p_3=0,053, p_4=0,055. Это означает, что в любой момент времени наиболее вероятно ожидать 3 автомобиля заправляющихся на заправочных местах.

3) p_k – вероятность того, что k автомобилей находятся на заправочных местах (заправляются и ожидают заправки), при условии $k > n$: p_5=0,052, p_6=0,049, p_7=0,046, p_8=0,043, p_9=0,04, p_{10}=0,038, p_{11}=0,035, p_{12}=0,033, p_{13}=0,031, p_{14}=0,029, p_{15}=0,027.

4) $p_{оч}$ – вероятность очереди, т.е. того, что автомобилей больше чем заправочных мест: $p_{оч} = 0{,}834$. Это означает, что в течение промежутка времени выбранного для исследования (4 часа), число автомобилей на АЗС больше числа заправочных мест ≈ 3 часа 30 минут.

5) Вероятность «потери» клиента: $p_{отк} = 0{,}886$. Это означает, что в течение промежутка времени выбранного для исследования (4 часа), нет свободных заправочных мест ≈ 3 часа 50 минут.

6) Среднее время ожидания обслуживания автомобилем 1-го типа $t_{ож} = 0{,}074$. Это означает, что время ожидания обслуживания для каждого автомобиля 1-го типа в среднем ≈ 18 минут.

7) Вероятность того, что время ожидания τ_1 обслуживания автомобилем 1-го типа больше среднего времени ожидания $t_{ож}: P\{\tau_1 > t_{ож}\} = 0{,}365$. Это означает, что каждый почти каждый четвёртый автомобиль ожидает больше 18-и минут.

8) Среднее число занятых заправочных мест $\aleph_з = 3{,}798$.

9) Среднее число свободных заправочных мест $\aleph_c = 0{,}202$.

10) Среднее время нахождение автомобиля на АЗС $L = 23$ минуты.

11) Коэффициент незанятости (простоя) заправочных мест $K_{пр} = 0{,}051$. В среднем каждое заправочное место не занято ≈ 5% времени (время простоя).

12) Коэффициент загрузки заправочных мест $K_з = 0{,}949$. В среднем каждое заправочное место загружено ≈ 95% времени.

13) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период Т=8 часов:

$$G_Э = T \cdot (\alpha_2 \cdot p_{отк} \cdot q_1 + \aleph_p \cdot q_2 + \aleph_c \cdot q_3),$$

q_1 – упущенная выгода от «потери» клиента в единицу времени;

q_2 – потери незанятости заправочных мест в единицу времени;

q_3 – потери, связанные с работой заправочных мест в единицу времени.

$$G_Э = 83720 \text{ руб.}$$

Конечно, вряд ли данные расходы соответствуют реально существующим издержкам. Они подойдут только для анализа.

Для уменьшения времени ожидания обслуживания и суммарных потерь будем варьировать число заправочных мест 5-х до 7-ти. Результаты расчетов сведем в табл. 4.3:

Таблица 4.3

n	4	5	6	7
p_0	0,0044	0,012	0,015	0,015
$p_{отк}$	0,886	0,521	0,284	0,142
$t_{ож}$	0,074	0,0087	0,0026	0,00091
$P\{\tau_1 > t_{ож}\}$	0,365	0,309	0,214	0,123
$\aleph_з$	3,798	3,95	4,048	4,107
$\aleph_c$	0,202	1,05	1,952	2,893
$K_{пр}$	0,051	0,21	0,325	0,413
$K_з$	0,949	0,79	0,675	0,587
$G_Э$	83720	61290	36640	40120

Исходя из полученных данных, можно сделать следующие выводы:

1) Увеличение числа заправочных мест до 5-ти ведет к следующему:

- увеличение времени простоя заправочных мест почти в 4 раза;
- уменьшение коэффициента загрузки заправочных мест в 1,2 раза;
- уменьшение издержек в 1,4 раз;
- уменьшение времени ожидания обслуживания почти в 8,5 раза;
- вероятность отказа уменьшается в 1,7 раза.

2) При увеличении числа заправочных мест до 6-ти наблюдается:

- увеличение времени простоя заправочных мест почти в 6 раз;
- уменьшение коэффициента загрузки заправочных мест в 1,4 раза;

- уменьшение издержек в 2,3 раз;

- уменьшение времени ожидания обслуживания почти в 28 раз;

- вероятность отказа уменьшается почти в 4 раза.

3) При увеличении числа заправочных мест до 7-ми так же наблюдаются улучшения некоторых характеристик, но следует отметить что:

- вновь увеличиваются издержки;

- время простоя заправочных мест увеличилось почти в 8 раз;

Выводы. Выгодным (и с экономической точки зрения, и с точки зрения эффективности работы АЗС) является увеличение заправочных мест до 5-ти или 6-ти.

Несмотря на то, что мы наблюдаем (в случае работы 6-ти заправочных мест) более значительное, по сравнению с 5-ю заправочными местами, уменьшение издержек, необходимо сделать выбор в пользу увеличения заправочных мест до 5-ти, так как не стоит забывать о следующем:

- введение новых заправочных мест ведёт к большим издержкам (расширение площади, оборудование заправочного места)

- в случае увеличения числа заправочных мест до 6-ти происходит возрастание времени простоя заправочных мест в 6 раз.

- исследования проводились для самого загруженного отрезка времени и то, что времени ожидания обслуживания уменьшается почти в 8,5 раз – это уже хороший показатель, который вместе с уменьшением издержек 1,4 раза и позволяет сделать выбор в пользу увеличения заправочных мест до 5-ти.

Модель 3 (системы с ограничением на длину очереди).

На СМО, состоящую из n приборов, поступает пуассоновский поток требований интенсивностью α. Каждое вновь поступившее требование, застав все приборы занятыми, становится в очередь, тогда и только тогда, когда в ней находится менее m требований, иначе теряется. Время обслуживания каждого требования случайное, распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью обслуживания β. В любой момент времени каждый прибор может обслуживать не более одного требования. Требуется проанализировать эффективность функционирования такой СМО.

Обозначим через p_k – вероятность того, что в СМО находится k требований (состояние C_k) $k = 0,1,2,...,n+m$.

Запишем функционирование СМО в виде размеченного графа состояний:

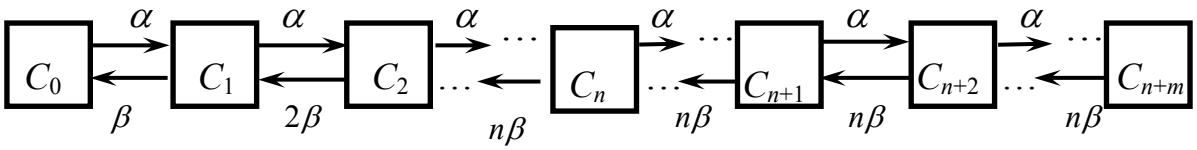


Рис. 4.7

Для стационарного режима, на основании метода декомпозиции, получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$-\alpha \cdot p_0 + \beta \cdot p_1 = 0$,

$-(\alpha + k \cdot \beta) \cdot p_k + \alpha \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \beta \cdot p_{k+1} = 0,\ 0 < k \le n-1$,

$-(\alpha + n \cdot \beta) \cdot p_{n+s} + \alpha \cdot p_{n+s-1} + n \cdot \beta \cdot p_{n+s+1} = 0,\ 0 \le s < m$

$-n \cdot \beta \cdot p_{n+m} + \alpha \cdot p_{n+m-1} = 0$.

Для того, чтобы решение системы было единственным, добавим условие нормировки, являющееся следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1.$$

Исходя из найденных значений вероятностей p_k, имеем следующие показатели эффективности функционирования СМО:

1) p_0 – вероятность того, что СМО свободна:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^k + \frac{(\alpha/\beta)^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\alpha/\beta}{n} \right)^k \right)^{-1};$$

2) p_k – вероятность того, что из n приборов занято обслуживанием k приборов:

$$p_k = \frac{(\alpha/\beta)^k}{k!} \cdot p_0,\ k = 1,2,...,n;$$

3) p_{n+s} – вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и s требований находятся в очереди:

$$p_{n+s} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+s}}{n! \cdot n^s} \cdot p_0,\ s = 0,1,...,m\ ;$$

4) $p_{отк}$ – вероятность отказа требованию в обслуживании:

$$p_{отк} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+m}}{n! \cdot n^m} \cdot p_0;$$

5) $B_з$ – среднее число требований, занятых обслуживанием:

$$B_з = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + n \cdot \sum_{k=1}^{m} p_{n+k};$$

6) B_c – среднее число свободных приборов:

$$B_c = n - B_з;$$

7) $K_з$ – коэффициент загрузки приборов:

$$K_з = \frac{B_з}{n};$$

8) $K_{пр}$ – коэффициент простоя приборов:

$$K_{пр} = \frac{B_c}{n};$$

9) A – средняя длина очереди:

$$A = \sum_{k=1}^{m} k \cdot p_{n+k};$$

10) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период T:

$$G_Э = T \cdot (\alpha \cdot p_{отк} \cdot q_0 + B_з \cdot q_з + B_c \cdot q_c),$$

q_0 – стоимость потерь, связанных с отказом требованию в обслуживании (упущенная выгода) в единицу времени;

$q_з$ – стоимость потерь, связанных с эксплуатацией прибора в единицу времени;

q_c – стоимость потерь, связанных с простоем прибора в единицу времени.

Данная модель может быть использована при анализе эффективности работы предприятий из сферы бытового обслуживания с нетерпеливыми клиентами.

Модель 4 (замкнутые системы, анализ).

СМО состоит из n идентичных приборов, каждый из которых выходит из строя в случайные моменты времени с интенсивностью λ. В случае выхода прибора из строя он начинает сразу восстанавливаться одним из m свободных восстанавливающих устройств (ВУ) с интенсивностью μ. Если все ВУ заняты, то прибор встает в очередь и ждет до тех пор, пока не освободится ВУ. Каждое ВУ в любой момент времени может восстанавливать не более одного прибора. Требуется оценить надежность работы системы и дать предложения по повышению эффективности ее функционирования.

Обозначим через p_k – вероятность того, что k приборов находятся в состоянии отказа (состояние C_k). Представим модель в виде размеченного графа состояний СМО:

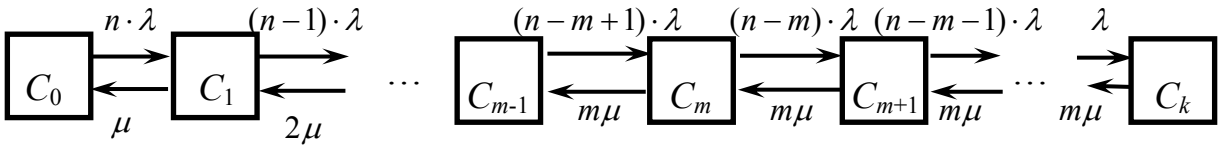


Рис. 4.8

По графу состояний записываем систему однородных алгебраических уравнений:

$n\cdot\lambda\cdot p_0-\mu\cdot p_1=0$,

$(n-k)\cdot\lambda\cdot p_{k-1}-k\cdot\mu\cdot p_k=0$, $1<k\le m$,

$(n-k\cdot\lambda)\cdot p_{k-1}-m\cdot\mu\cdot p_k=0$, $m<k<n$,

$\lambda\cdot p_{n-1}-m\cdot\mu\cdot p_n=0$

Для единственности решения системы уравнений добавим условие нормировки, являющееся следствием модели:

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=1.$$

Тогда решение системы запишется в виде:

$$p_0=\left(n!\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda/\mu)^i}{i\cdot(n-i)!}+\frac{n!}{m!}\cdot\sum_{i=m+1}^{n}\frac{(\lambda/\mu)^i}{(n-i)!\cdot m^{i-m}}\right)^{-1};$$

$$p_k=\frac{n!}{(n-k)!\cdot\delta_m^k}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\cdot p_0,\ \text{где}\ \delta_m^k=\begin{cases}k!, & k\le m;\\ m!\cdot m^{n-k}, & m<k\le n.\end{cases}$$

Отсюда получаем следующие показатели эффективности:

1) p_0 – вероятность того, что СМО свободна (все приборы работают);

2) p_k – вероятность того, что *n* приборов *k* находятся в состоянии отказа;

3) B – среднее число работающих приборов:

$$B=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\cdot p_k;$$

4) D – среднее число неработающих приборов

$$D=\sum_{k=1}^{n}k\cdot p_k;$$

5) $K_{пр}$ – коэффициент надежности системы:

$$K_{пр}=\frac{M}{n};$$

6) $G_Э$ – суммарные потери за отчетный период T:

$$G_Э=T\cdot\left(c_1\cdot\sum_{k=0}^{n-m-1}(n-k)\cdot p_k+c_2\cdot\sum_{k=n-m}^{n}(m+k-n)\cdot p_k\right),$$

где c_1 – стоимость часа полезного времени работы машины, c_2 – стоимость часа содержания восстанавливающего устройства.

Модель может быть использована для анализа и синтеза ненадежных систем, состоящих из большого числа однотипных элементов: вычислительные системы; парк автобусов, трамваев; предприятия общественного питания и магазины бытовой техники (планирование необходимого количества запасных частей для продажи, сервисных центров и т.д.).

Модель 5 (замкнутые системы, синтез).

Имеется непрерывно работающий прибор, состоящий из m модулей. В процессе работы прибора модули могут выходить из строя в случайные моменты времени. Время наработки машины на отказ является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения и параметром $\lambda = 1/t_{ср}$, $t_{ср}$ – среднее время работы машины до отказа.

В случае выхода модуля из строя он мгновенно заменяется одним из n запасных, если таковой имеется, иначе прибор останавливается. Вышедший из строя модуль попадает в ремонт, где восстанавливается одним из r восстанавливающих устройств (операторов). Время восстановления является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения и интенсивностью восстановления $\mu = 1/t_{обс}$, $t_{обс}$ - среднее время восстановления одного модуля. Восстановленные модули возвращаются в резерв. Требуется оценить эффективность работы прибора.

Пусть p_k – вероятность того, что в приборе k неисправных модулей (состояние C_k), $k = 0,1,...n$, а p_{n+1} – вероятность того, что прибор не может работать (отсутствуют исправные модули для замены вновь вышедшего – состояние C_{n+1}). Построим размеченный граф возможных состояний прибора (рис. 4.9),

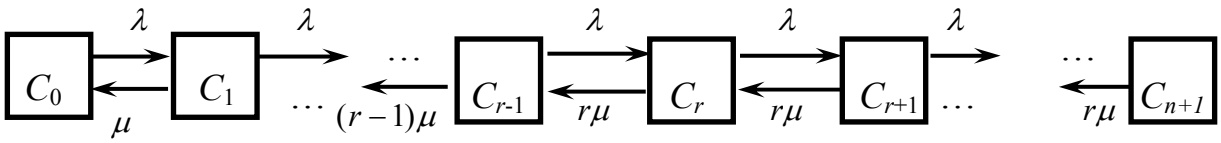


Рис. 4.9

из которого получаем систему однородных алгебраических уравнений:

$-\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0$,

$-(\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0$, $0 < k < r-1$,

$-(\lambda + r \cdot \mu) \cdot p_k + \lambda \cdot p_{k-1} + r \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0$, $r \le k < n+1$,

$-r \cdot \mu \cdot p_{n+1} + \lambda \cdot p_n = 0$.

Условие нормировки, являющееся следствием модели, имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{n+1} p_k = 1.$$

Решая систему (с учетом условия нормировки), получаем:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} \cdot \sum_{k=1}^{n-r+1} \left(\frac{\lambda}{r \cdot \mu} \right)^k \right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \cdot p_0, \; 1 \le k < r;$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^{k+r}}{r! \cdot r^{k-r}} \cdot p_0, \; r \le k \le n+1.$$

Вычислим показатели эффективности, исходя из найденных вероятностей:

1) p_0 – вероятность того, что все n занятых модулей прибора в исправном состоянии;

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} \cdot \sum_{k=1}^{n-r+1} \left(\frac{\lambda}{r \cdot \mu} \right)^k \right)^{-1}$$

2) $p_{отк}$ – вероятность того, что прибор не будет работать;

$$p_{отк} = \frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{r! \cdot r^{n-r+1}} \cdot p_0;$$

3) $\aleph$ – среднее число модулей, находящихся в ремонте, при бесперебойной работе прибора:

$$\aleph = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k;$$

4) $\aleph_o$ – среднее число операторов занятых восстановлением модулей:

$$\aleph_o = \sum_{k=1}^{r} k \cdot p_k + r \cdot \sum_{k=r+1}^{n+1} p_k;$$

5) $K_з$ – коэффициент загрузки операторов:

$$K_з = \frac{\aleph_o}{r};$$

6) M – среднее число модулей, ожидающих ремонта:

$$M = \sum_{k=r+1}^{n+1} (k-r) \cdot p_k.$$

Для определения экономически целесообразного числа запасных модулей и числа восстанавливающих устройств (операторов) воспользуемся формулой, минимизирующей потери при эксплуатации прибора:

$$min G_Э = n \cdot c_з + T_{зап} \cdot \left(r \cdot c_{оп} + c_{пр} \cdot p_{отк} \right),$$

где $c_з$ – стоимость запасных модулей;

$c_{оп}$ – стоимость содержания одного восстанавливающего устройства в единицу времени;

$c_{пр}$ – стоимость простоя прибора в единицу времени;

$T_{зап}$ – среднее время работы запасного модуля.

Если число восстанавливающих устройств фиксировано, то $c_{оп} = 0$. Тогда формула

$$min G_Э = n \cdot c_з + T_{зап} \cdot c_{пр} \cdot p_{отк}$$

определяет оптимальное число запасных модулей (обеспечивающих минимум потерь из-за простоя прибора и затрат на покупку запасных модулей).

Модель может быть использована для анализа и синтеза ненадежных систем, состоящих из большого числа однотипных элементов: вычислительные системы; парк автобусов, трамваев; предприятия общественного питания и магазины бытовой техники (планирование необходимого количества запасных частей для продажи, сервисных центров и т.д.).

Глава 5. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

5.1. Общая постановка задачи

Предприятия, фирмы имеют различные запасы: сырье, комплектующие изделия, готовую продукцию, предназначенную для продажи, и т.д. Совокупность подобных материалов, представляющих временно не используемые экономические ресурсы, называют *запасами предприятия.*

Запасы создаются по различным причинам. Одна из них состоит в том, что если в некоторый момент производства потребуется какой-то вид деталей, который поставляется другим предприятием, и он отсутствует на складе, то процесс производства может остановиться. Поэтому на складе всегда должно быть нужное количество деталей данного вида. Однако если запасы увеличить, то возрастет стоимость их хранения. Задача управления запасами состоит в выборе для предприятия целесообразного решения.

Рассмотрим простейшие математические модели управления запасами. На рис. 5.1 представлены возможные графики изменения запаса Q, имеющегося на складе, во времени t, для которого рассматривается этот запас.

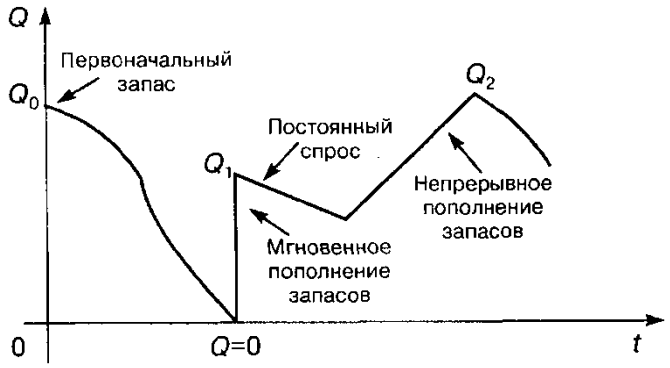


Рис. 5.1

Под Q будем понимать изделия или материалы (товары) только одного вида. Если на изделие поступает заявка, то оно отпускается и значение Q падает. Предположим, что величина спроса непрерывна во времени. Если $Q = 0$, то имеет место дефицит.

Любая математическая модель, которая применяется для изучения определенной ситуации в управлении запасами, должна учитывать факторы, связанные с издержками.

Различают *организационные издержки* — расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров, издержки *содержания запасов* — затраты, связанные с хранением. Они возникают из-за амортизации в процессе хранения (изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т.д.).

Существуют издержки, связанные с *дефицитом:* если поставка со склада не может быть выполнена, то возникают дополнительные издержки, связанные с отказом. Это может быть денежный штраф или ущерб, не осязаемый непосредственно (например, ухудшение бизнеса в будущем и потеря потребителей). Количество товара, поставляемое на склад, называют *размером партии.*

5.2. Основная модель управления запасами

Введем обозначения необходимых для составления модели величин. Данные поместим в табл. 5.1.

График изменения запасов представлен на рис. 5.2.

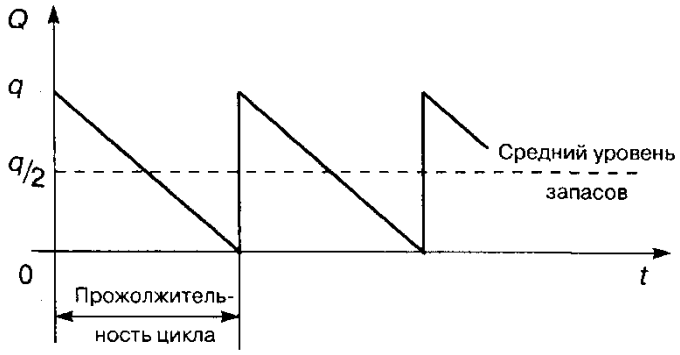


Рис. 5.2

Чтобы полностью удовлетворить годовой спрос g при размере поставки q, необходимо обеспечить g/q поставок или партий за год. Средний уровень запасов составляет $q/2$.

Таблица 5.1

Величина	Обозначение	Единица измерения	Предложения
Интенсивность спроса	g	Единиц товара в год	Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	b	Рублей за год	Издержки постоянны, не зависят от размера партии
Стоимость товара	s	Рублей за год	Цена единицы товара постоянна; рассматривается один вид товара
Издержки содержания запасов	h	Рублей за единицу товара в год	Стоимость хранения единицы товара в течение года постоянна
Размер партии	q	Единиц товара в одной партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю

Уравнение издержек будет иметь вид

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = bg/q + sg + hq/2,$$

где C_1 — общие организационные издержки; C_2 — стоимость товаров; C_3 — общие издержки содержания запасов.

За исключением q все величины в правой части уравнения постоянны и известны, т.е. $C = f(q)$. Для нахождения минимума C найдем производную dC/dq и приравняем ее к нулю:

$$dC/dq = -bg/q^2 + h/2 = 0,$$

откуда

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{2bg/h},$$

где $q_{\text{опт}}$ — оптимальный размер партии.

Иногда возникает соблазн заказывать размер партии товаров, не соответствующий оптимальному размеру. Это приводит к увеличению издержек на содержание и организацию поставок. Покажем, что это так.

Предположим, что вместо оптимального размера была заказана партия товаров, равная 0,5 $q_{\text{опт}}$. Из основного уравнения издержек

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = bg/q + sg + hq/2$$

найдем

$$C - C_2 = C - sg = bg\sqrt{h/2bg} + h\sqrt{2bg/4h} = \sqrt{2bgh}.$$

В случае заказа 0,5 $q_{\text{опт}}$ получим

$$C' - C_2' = 2bg\sqrt{h/2bg} + h\sqrt{2bg/16h} =$$
$$= \sqrt{2bgh} + \sqrt{2bgh}/4 = 5\sqrt{2bgh}/4 = 5(C - C_2)/4.$$

Таким образом, заказ партии товаров размером 0,5 $q_{\text{опт}}$ (вместо $q_{\text{опт}}$) приводит к увеличению общих издержек на содержание запасов и организацию поставок на 25%. Аналогичная картина наблюдается в случае заказа поставок больше чем $q_{\text{опт}}$.

Изобразим графически (рис. 5.3) изменение отдельных составляющих величин C.

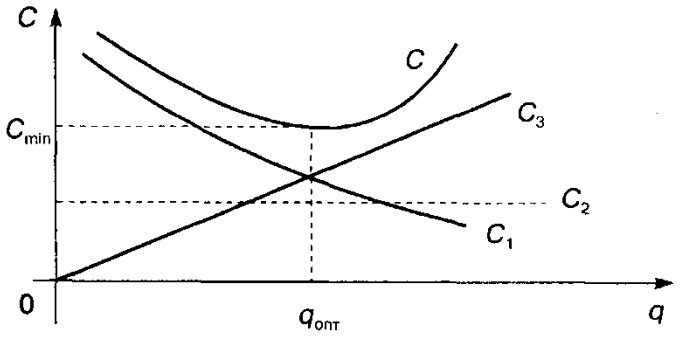


Рис. 5.3

Из рис. 5.3 следует, что увеличение q ведет к резкому снижению C_1, при этом C_3 увеличивается пропорционально $h/2$. При малых значениях q величина C падает до значения $C_{\min}$ в точке $q_{опт}$. При увеличении q величина издержек C приближается к $C_2 + C_3$.

5.3. Модель производственных запасов

В основной модели предполагали, что поступление товаров на склад происходит мгновенно, например в течение одного дня. Рассмотрим случай, когда готовые товары поступают на склад непосредственно с производственной линии. Будем считать, что поступление товаров происходит непрерывно. Модель задачи в этом случае называют моделью *производственных поставок.* Обозначим через p скорость поступающего на склад товара. Эта величина равна количеству товаров, выпускаемых производственной линией за год. Остальные обозначения и предположения те же, что и для основной модели управления запасами.

Определим оптимальный размер партии, минимизирующий общие затраты.

График изменения модели производственных запасов представлен на рис. 5.4.

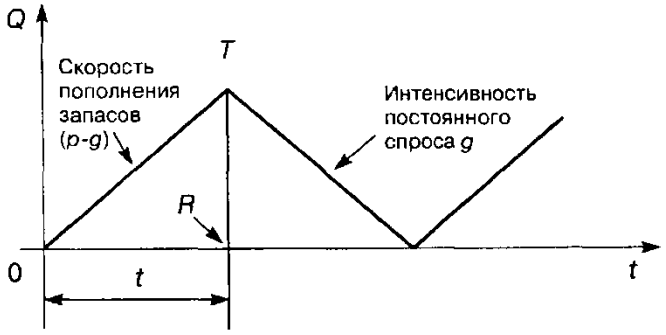


Рис. 5.4

Общие издержки в течение года, как и для основной модели, составляют

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$
$$C_1 = bg/q,$$
$$C_2 = sg.$$

Для получения среднего уровня запасов следует учесть, что

$RT = (p — g)t$ — максимальный уровень запасов,

$q = pt$ — количество товаров в одной производственной поставке.

Тогда средний уровень запасов составляет половину максимального и равен

$$(p - g)q/2p.$$

В итоге

$$C = bg/q + sg + q(p - g)/2p.$$

Решая уравнение $dC/dq = 0$, найдем оптимальный размер партии модели производственных поставок:

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{2pbg/(p - g)h}.$$

5.4. Модель запасов, включающая штрафы

Рассмотрим основную модель, допускающую возможность существования периодов дефицита, который покрывается при последующих поставках, и штрафов за несвоевременную поставку.

Пусть предприятие должно поставить q ед. товара в течение каждого промежутка времени L, за единицу времени поставляется g ед. товара $(q = Lg)$.

Предположим, что в начале каждого периода L предприятие делает запас, равный k. Это означает, что в течение периода будет наблюдаться дефицит товара и некоторое время поставки не будут осуществляться. Невыполненные заявки будут накапливаться до максимальной величины $q — k$ и будут удовлетворены, как только поступит следующая партия товаров в количестве q.

За то, что товары доставляются предприятием позже необходимого срока, на предприятие налагается штраф, который зависит от того, насколько была задержана поставка. Такая модель целесообразна, поскольку иногда выгоднее заплатить штраф, чем расходовать дополнительные средства на хранение запасов, превышающих величину k.

Задача управления запасами состоит в том, чтобы выбрать такое значение k, которое ведет к минимизации всех затрат, включая затраты на хранение и штрафы.

График изменения запасов модели представлен на рис. 5.5.

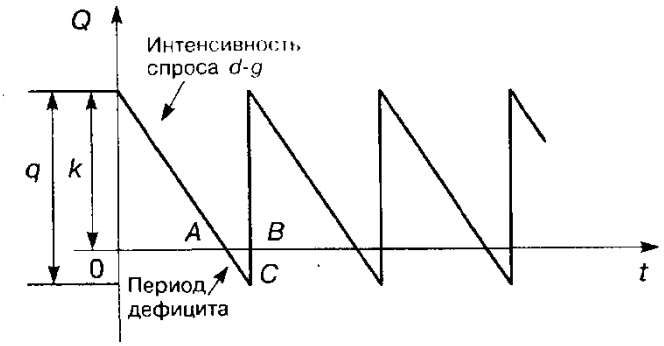


Рис. 5.5

Для определения оптимального значения *k* обозначим:

h — издержки хранения единицы товара за единицу времени;

p — затраты на штраф в расчете на единицу товара за один день отсрочки.

Найдем издержки одного цикла:

$$C = C_1 + C_2,$$

где C_1 — общие издержки содержания запасов; C_2 — общие затраты на штраф.

Так как товары находятся на складе в течение периода *OA* (см. рис. 5.5), средний уровень запасов за этот период равен *k/2*. Если продолжительность периода *OA* равна *k/g,* то

$$C_1 = h \cdot k/2 \cdot k/g = hk^2/2g.$$

Так как штраф выплачивается в течение периода *AB = (q — k)/g,* общее число "товаро-дней", на которые налагается штраф, равно площади треугольника *ABC*. Площадь составляет

$$(q - k)/g \cdot (q - k)/2,$$

откуда $C_2 = p(q — k)^2/2g$.

Окончательно

$$C = hk^2/2g + p(q - k)^2/2g.$$

Найдем *dC/dk* и, решив уравнение *dC/dk* = 0, получим оптимальное значение:

$$k_{\text{опт}} = pq/(h + p).$$

Взяв $k_{\text{опт}}$ в качестве уровня запасов в начале каждого цикла при условии, что невыполненные заявки будут удовлетворены, сведем суммарные расходы *C* к минимуму:

$$C_{\min} = q^2hp/2g(h + p).$$

5.5. Решение экономических задач с использованием моделей управления запасами

Решим задачу с применением основной модели управления запасами.

Пример 1. Интенсивность равномерного спроса составляет 2000 телевизоров в год. Организационные издержки для одной партии составляют 20 тыс. р. Цена единицы товара равна 1 тыс. р., а издержки содержания телевизоров составляют 0,1 тыс. р. за один телевизор в год.

Найти оптимальный размер партии, число поставок и продолжительность цикла.

РЕШЕНИЕ. По условию задачи $g = 2000$, $b = 20$, $s = 1$, $h = 0{,}1$.

Общие издержки в течение года:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = 40\,000/q + 2000 + q/20,$$
$$dC/dq = -40\,000/q + 1/20,$$
$$q_{\text{опт}} = \sqrt{800\,000} \approx 894 \text{ ед.},$$
$$n_{\text{опт}} = 2000/q_{\text{опт}} \approx 2{,}24,$$
$$t_{\text{опт}} = 365/n_{\text{опт}} \approx 163 \text{ дн.}$$

О т в е т. Оптимальный размер партии составляет 894 телевизора, число поставок — 2,24, продолжительность цикла — 163 дня.

Рассмотрим задачу с применением модели производственных поставок.

Пример 2. Интенсивность равномерного спроса выпускаемых фирмой видеомагнитофонов составляет 2000 шт. в год. Организационные издержки равны 20 тыс. р. Цена видеомагнитофона составляет 1 тыс. р., издержки хранения равны 0,1 тыс. р. в расчете на один видеомагнитофон в год. Запасы на складе пополняются со скоростью 4000 видеомагнитофонов в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено q видеомагнитофонов.

Найти размер партии, который минимизирует все затраты. Определить число поставок в течение года, время, в течение которого продолжается поставка, продолжительность цикла, максимальный уровень запасов и средний уровень запасов при условии, что размер поставки оптимален.

РЕШЕНИЕ. Данная модель задачи является моделью производственных поставок со следующими параметрами:

$$g = 2000, \quad b = 20, \quad h = 0{,}1, \quad s = 1, \quad p = 4000.$$

График изменения запасов представлен на рис. 5.6.

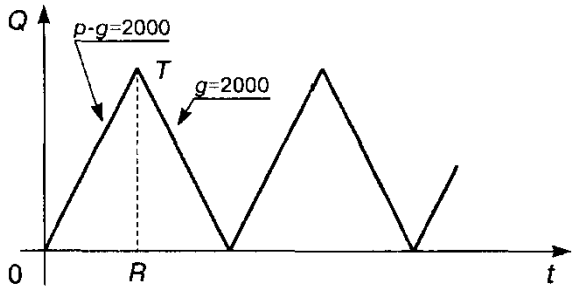


Рис. 5.6

Число партий в течение года:

$$n = g/q = 2000/q.$$

Продолжительность поставки:

$$t = q/p = q/4000.$$

Продолжительность цикла:

$$L = 1/n = q/g = q/2000.$$

Максимальный уровень запасов:

$$RT = (p - g)t = 2000 \cdot q/4000 = q/2.$$

Средний уровень запасов:

$$RT/2 = q/4.$$

Уравнение издержек:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = bn + sg + qh/4.$$

Решив уравнение $dC/dq = 0$, получим $q_{\text{опт}} = \sqrt{2 \cdot 4000 \cdot 20 \cdot 2000 / 2000 \cdot 0{,}1} = 1265$ видеомагнитофонов.

Найдем оптимальные значения поставок, продолжительность поставки, продолжительность цикла:

$$n_{\text{опт}} = 2000/1265 \approx 1{,}6 \text{ поставки},$$
$$t_{\text{опт}} = 1265/4000 \approx 115 \text{ дн.},$$
$$L_{\text{опт}} = 365/1{,}6 \approx 230 \text{ дн.}$$

О т в е т . За каждую поставку необходимо доставлять на склад 1265 видеомагнитофонов, оптимальное число поставок составляет 1,6, продолжительность поставки — 115 дней, продолжительность цикла — 230 дней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании // учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - 4-е изд., испр. . - М. : Дело, 2003. - 688 с. - 5000 экз. - ISBN 5-7749-0186-6 (в пер.).

2. Павский, В. А. Теория массового обслуживания // учеб. пособие для студ. вузов / В. А. Павский. - Кемерово : КемТИПП, 2008. - 116 с. - 600 экз. - ISBN 978-5-89289-513-2.

3. Макаров С.И. Экономико-математические методы и модели. // Учебное пособие, 2009, КноРус, 241 с., ISBN: 978-5-390-00451-7.

4. Колокольцов В. Н., Малафеев О. А. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех) // 1-е изд., 2012. - 624 с. - ISBN 978-5-8114-1276-1.

5. Орлова И. В. Экономико-математическое моделирование. // практич. пособие, 2012, ISBN: 978-5-9558-0107-0.

6. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем // учеб. пособие для студ. вузов / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2006. - 431 с. - 2000 экз. - ISBN 5-279-02940-8

7. Кудрявцев Е. М. Методы сетевого планирования и управления проектом. // Учебное пособие, 2008, ДМК Пресс, 239 с, ISBN: 5-94074-187-8.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Выполняется одна контрольная работа (задания 1 - 12), вариант следует выбирать по последней цифре номера зачетной книжки. Если номер заканчивается 0, то он соответствует 10 варианту. Не следует приступать к выполнению контрольных работ, не изучив соответствующих разделов и не разобрав приведенных в них примеров. Возникшие вопросы можно задать связавшись с кафедрой (vm@kemtipp.ru).

Контрольные работы оформляются в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента, либо в отдельном файле (в названии файла должны быть указаны предмет, город, группа, ФИО студента), если Ваш населенный пункт расположен в ином городе, чем сам ВУЗ, в котором Вы обучаетесь. Условие задачи должно быть переписано полностью. Решение выполняется в логической последовательности с пояснениями и краткими формулировками производимых действий.

Выполненные контрольные работы студентом доставляются в институт или отправляются по электронной почте на рецензирование (vm@kemtipp.ru). Получив проверенную работу, студенту необходимо исправить отмеченные ошибки и, если она не зачтена, выслать на повторное рецензирование. Контрольные работы, выполненные небрежно, без соблюдения предъявляемых требований или не своего варианта, не рассматриваются.

1. Задания по теме "Нелинейное программирование"

Задание 1. Дана задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений.

Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2, \\ x_{1,2} \geqslant 0. \end{cases}$$

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	−5	−6	−1	−2	−3	−1	−3	−2	−2	1
b	−4	−2	−1	−1	−4	−1	−1	−6	−2	−1
a_{11}	5	2	5	2	3	3	3	3	6	6
a_{12}	−4	5	−4	5	8	5	8	5	7	7
b_1	−20	20	−20	20	24	15	24	15	42	42
a_{21}	3	2	3	2	4	5	4	5	3	3
a_{22}	2	1	2	1	7	3	7	3	−2	−2
b_2	30	10	30	10	28	15	28	15	−6	−6

Задание 2. Решить задачу дробно-линейного программирования.

Для производства двух изделий A и B предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на данном типе оборудования. Время обработки каждого из изделий, затраты, связанные с производством одного изделия, даны в таблице.

Оборудование 1-го и 3-го типов предприятие может использовать не менее b_1 и b_3 ч соответственно, оборудование 2-го типа — не более b_2 ч.

Определить, сколько изделий следует изготовить предприятию, чтобы средняя себестоимость одного изделия была минимальной.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия, ч	
	A	B
1	a_{11}	a_{12}
2	a_{21}	a_{22}
3	a_{31}	a_{32}
Затраты на производство одного изделия, тыс. р.	c_1	c_2

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	1	3	1	4	1	2	5	3	2	5
c_2	2	1	4	2	3	4	3	4	5	2
a_{11}	12	12	7	8	8	8	4	11	16	12
a_{12}	4	1	4	3	6	10	8	1	4	6
b_1	48	12	28	24	48	80	32	11	32	70
a_{21}	10	10	5	1	6	12	9	4	7	8
a_{22}	5	4	10	1	9	6	5	6	5	9
b_2	50	40	45	5	54	72	45	24	35	72
a_{31}	1	5	2	2	8	3	10	1	2	1
a_{32}	1	8	11	8	1	14	2	10	7	10
b_3	6	30	22	16	8	42	20	10	14	12

Задание 3. Дана задача нелинейного программирования

$$L = ax_1x_2$$

при ограничении

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1.$$

Найти условный экстремум с использованием метода множителей Лагранжа.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	2	1	3	−1	−2	−3	1	2	−1
a_{11}	1	2	3	2	−1	1	3	1	1	3
a_{12}	1	3	1	1	3	−2	−1	3	3	−3
b_1	1	4	2	3	2	2	3	1	2	2

2. Задания по теме "Динамическое программирование"

Задание 4. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: *S(t) = 0, f(t) = r(t) — u(t).*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	12	10	14	11	13	15	16	15	14	11
a_1	12	10	14	11	13	15	16	15	14	11
a_2	10	9	12	10	12	14	15	14	13	10
a_3	8	8	10	9	11	12	13	13	12	9
a_4	6	7	8	7	9	10	11	11	10	8
a_5	4	5	6	5	7	8	8	9	7	7
a_6	2	3	4	3	4	6	5	7	4	5
a_7	0	1	1	0	1	3	2	4	1	3
a_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
a_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Задание 5. Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.

Для модернизации предприятий совет директоров инвестирует средства в объеме 250 млн р. с дискретностью 50 млн р. Прирост выпуска продукции зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в таблице.

Найти распределение инвестиций между предприятиями, обеспечивающее фирме максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить только одну инвестицию.

Инвестиции, млн. р.	**Прирост выпуска продукции, млн р.**			
	Предприятие 1	**Предприятие 2**	**Предприятие 3**	**Предприятие 4**
50	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
100	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
150	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
200	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
250	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	5	8	11	10	12	21	22	23	25	15
a_{12}	7	10	12	9	13	20	23	24	26	12
a_{13}	6	7	10	7	11	22	24	25	27	17
a_{14}	4	10	11	8	11	23	21	22	28	13
a_{21}	9	13	16	15	17	30	31	32	34	32
a_{22}	10	12	15	16	15	28	30	31	33	30
a_{23}	8	14	17	13	16	31	32	33	35	33
a_{24}	11	13	14	14	18	29	29	30	35	31
a_{31}	21	22	23	24	23	42	43	44	46	39
a_{32}	20	21	24	22	25	41	41	43	46	38
a_{33}	21	22	22	20	21	40	42	42	45	40
a_{34}	19	23	25	21	22	41	40	41	44	37
a_{41}	33	31	32	33	34	51	52	53	57	46
a_{42}	34	38	31	34	33	52	53	52	58	45
a_{43}	32	29	32	31	35	53	51	54	56	47
a_{44}	35	30	30	32	34	50	53	55	55	44
a_{51}	38	39	38	40	42	62	63	70	78	52
a_{52}	39	40	39	39	41	63	64	72	77	54
a_{53}	40	38	40	41	43	61	65	71	79	60
a_{54}	41	41	38	40	44	64	66	73	80	63

Задание 6. В трех районах города предприниматель планирует строительство пользующихся спросом одинаковых по площади мини-магазинов "Продукты". Известны места, в которых их можно построить. Подсчитаны затраты на их

строительство и эксплуатацию.

Необходимо так разместить мини-магазины, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

x	1	2	3	4
$g_1(x)$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$g_2(x)$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$g_3(x)$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	10	5	22	15	8	26	18	12	19	24
a_{12}	21	9	35	25	13	44	29	21	36	43
a_{13}	32	16	47	41	21	67	42	28	53	62
a_{14}	45	21	61	53	28	89	57	37	67	79
a_{21}	8	6	20	13	9	25	17	11	20	25
a_{22}	22	11	37	26	14	46	30	22	37	41
a_{23}	30	17	46	40	20	65	41	27	54	64
a_{24}	46	20	58	55	27	91	55	35	65	78
a_{31}	9	4	23	17	7	24	20	13	18	24
a_{32}	20	8	36	24	15	47	32	20	35	44
a_{33}	31	15	50	39	22	64	44	29	55	60
a_{34}	44	19	59	52	30	93	59	39	69	81

3. Задания по теме "Сетевые модели"

Задание 7. Районной администрацией принято решение о газификации одного из небольших сел района, имеющего 10 жилых домов.

Расположение домов указано на рис. 1. Числа в кружках обозначают условный номер дома. Узел 11 является газопонижающей станцией.

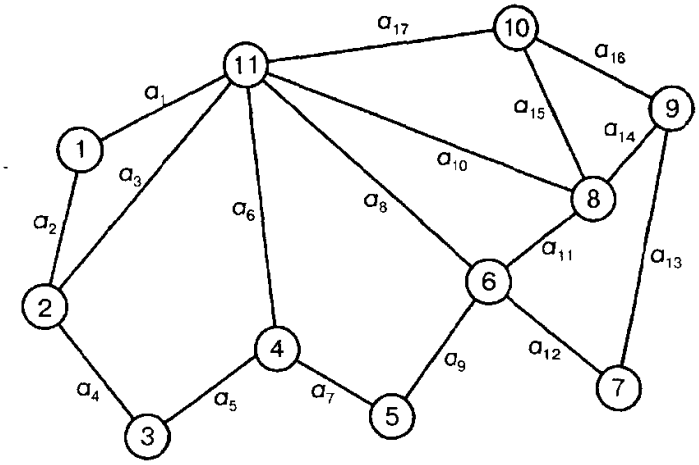


Рис. 1

Разработать такой план газификации села, чтобы общая длина трубопроводов была наименьшей.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	200	180	220	150	170	190	230	160	210	240
a_2	60	70	50	40	80	70	30	100	90	40
a_3	250	270	290	220	230	240	280	250	260	300
a_4	110	130	120	140	100	150	200	170	190	180
a_5	150	140	110	100	120	130	160	150	140	110
a_6	300	320	310	350	330	360	340	310	290	370
a_7	80	90	70	100	60	50	70	40	50	90
a_8	350	370	360	390	340	380	330	390	360	400
a_9	120	130	140	190	150	180	170	160	140	160
a_{10}	400	440	420	430	470	450	410	460	440	470
a_{11}	210	190	200	210	220	180	230	170	180	190
a_{12}	40	50	30	60	80	70	90	80	50	40
a_{13}	120	130	150	120	100	170	160	70	90	110
a_{14}	30	40	50	60	30	50	80	70	90	40
a_{15}	70	50	40	60	30	80	70	90	40	50
a_{16}	20	40	30	50	30	70	20	60	40	50
a_{17}	550	580	570	590	530	520	560	630	600	610

Задание 8. Транспортному предприятию требуется перевезти груз из пункта 1 в пункт 14. На рис. 2 показана сеть дорог и стоимость перевозки единицы груза между отдельными пунктами.

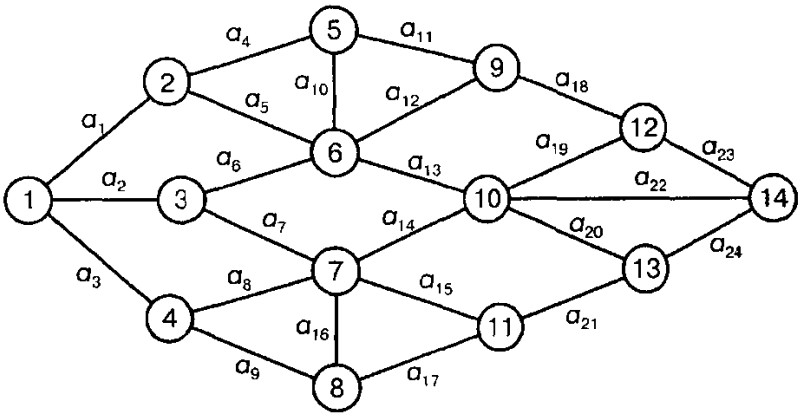


Рис. 2

Определить маршрут доставки груза, которому соответствуют наименьшие затраты.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	20	18	22	15	17	19	23	16	21	24
a_2	18	19	21	16	18	21	20	15	19	22
a_3	19	17	20	17	16	20	22	17	20	23
a_4	11	13	12	14	10	15	20	17	19	18
a_5	15	14	11	10	12	13	16	15	16	17
a_6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
a_7	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
a_8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20
a_9	12	18	14	16	15	17	15	18	14	21
a_{10}	24	21	20	18	17	16	19	16	22	23
a_{11}	21	19	20	21	22	18	23	17	18	19
a_{12}	20	22	19	23	18	17	24	16	20	21
a_{13}	22	21	18	22	21	19	20	18	19	18
a_{14}	23	23	21	20	19	16	22	15	21	20
a_{15}	24	18	17	24	20	15	21	19	22	22
a_{16}	20	21	23	19	22	18	20	16	17	21
a_{17}	22	17	19	23	18	17	19	22	20	21
a_{18}	31	32	30	35	37	36	33	36	31	34
a_{19}	32	33	29	31	36	37	34	35	32	33
a_{20}	35	37	32	33	34	38	36	31	36	30
a_{21}	37	36	31	34	36	35	40	37	39	38
a_{22}	45	41	43	42	44	40	46	45	47	45
a_{23}	28	32	30	25	26	28	33	31	29	27
a_{24}	30	31	32	24	25	29	32	33	30	29

Задание 9. Составить сетевой график выполнения работ и рассчитать временные параметры по данным, представленным в таблице.

Содержание работы	Обозначение	Предыдущая работа	Продолжительность, дн.
Исходные данные на изделие	a_1		t_1
Заказ комплектующих деталей	a_2	a_1	t_2
Выпуск документации	a_3	a_1	t_3
Изготовление деталей	a_4	a_3	t_4
Поставка комплектующих деталей	a_5	a_2	t_5
Сборка изделия	a_6	a_4, a_5	t_6
Выпуск документации на испытание	a_7	a_3	t_7
Испытание и приемка изделия	a_8	a_6, a_7	t_8

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_1	30	33	36	35	25	20	15	30	25	20
t_2	7	9	8	6	8	11	10	5	9	7
t_3	15	17	18	14	16	20	12	13	20	19
t_4	35	33	32	34	31	35	30	37	39	38
t_5	25	24	21	20	22	23	26	25	18	21
t_6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
t_7	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
t_8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20

Задание 10. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ до сжатия. Найдите критический путь и минимальную стоимость работ после сжатия.

Операция	Нормальный режим		Максимальный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.
1, 2	a_{11}	b_{11}	a_{12}	b_{12}
2, 3	a_{21}	b_{21}	a_{22}	b_{22}
2, 4	a_{31}	b_{31}	a_{32}	b_{32}
2, 5	a_{41}	b_{41}	a_{42}	b_{42}
3, 5	a_{51}	b_{51}	a_{52}	b_{52}
4, 5	a_{61}	b_{61}	a_{62}	b_{62}
5, 6	a_{71}	b_{71}	a_{72}	b_{72}

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	20	18	22	15	17	19	23	16	21	24
a_{21}	28	29	31	36	28	31	30	25	29	32
a_{31}	19	17	20	17	16	20	22	17	20	23
a_{41}	21	23	22	24	20	25	30	27	29	28
a_{51}	25	24	21	20	22	23	26	25	26	27
a_{61}	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
a_{71}	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
b_{11}	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20
b_{21}	12	18	14	16	15	17	15	18	14	21
b_{31}	24	21	20	18	17	16	19	16	22	23
b_{41}	21	19	20	21	22	18	23	17	18	19
b_{51}	20	22	19	23	18	17	24	16	20	21
b_{61}	22	21	18	22	21	19	20	18	19	18
b_{71}	23	23	21	20	19	16	22	15	21	20
a_{12}	17	15	18	13	14	15	18	13	16	18
a_{22}	23	24	24	30	22	26	24	21	25	27
a_{32}	16	14	16	15	13	17	18	22	16	19
a_{42}	17	20	18	21	16	21	25	22	24	24
a_{52}	20	21	18	17	18	19	21	21	22	23
a_{62}	11	13	8	10	11	12	14	15	14	13
a_{72}	10	13	8	9	7	11	15	12	12	16
b_{12}	17	21	15	16	14	23	24	25	22	25
b_{22}	15	22	17	20	19	22	21	23	18	27
b_{32}	30	26	25	23	24	20	25	21	27	29
b_{42}	26	25	24	27	28	23	29	22	23	24
b_{52}	25	28	14	29	22	23	30	20	27	29
b_{62}	28	27	15	29	26	15	26	24	23	22
b_{72}	29	30	26	25	24	21	29	20	27	26

4. Задания по теме "Система массового обслуживания"

Задание 11. Приходная касса городского района с временем работы *A* часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от *B* человек в день.

В приходной кассе работают *C* операторов-кассиров. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет *D* мин.

Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	3	5	6	7	8	9	10
A	11	10	10	9	8	9	8	11	7	7
B	220	220	300	300	280	270	240	300	200	240
C	2	2	3	3	4	4	3	3	2	4
D	4	3	4	3	4	3	5	5	2	5

Задание 12. Салон парикмахерских услуг имеет *A* мест для обслуживания клиентов. Среднее время обслуживания одного клиента - *D* мин.

В среднем за рабочую смену (8 часов) салон посещает В потенциальных клиентов. Из них, в среднем, С клиентов отказывается от услуг из-за отсутствия свободных мастеров.

1. Требуется изучить, насколько эффективно работает салон-парикмахерская, рассчитать и проанализировать следующие показатели эффективности функционирования салона:

- вероятность простоя салона;
- среднее число занятых специалистов-парикмахеров;
- среднее число свободных специалистов;
- вероятность очереди, т.е. того, что клиентов больше чем специалистов;
- среднее время ожидания клиентом обслуживания;
- вероятность «потери» клиента, вследствие очереди;
- среднее время незанятости (простоя) и занятости (загрузки) специалистов;

2. Рассчитать показатели эффективности функционирования салона для (А+1) и (А+2) рабочего места (результаты представить в виде таблицы). Проанализировать, является ли целесообразным увеличение числа рабочих мест в салоне. Сделать выводы.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	2	3	4	2	4	3	2	3	4
B	35	23	23	30	15	33	25	17	21	45
C	7	5	5	8	4	7	6	4	4	9
D	50	50	60	60	60	70	70	70	80	50