МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
(УНИВЕРСИТЕТ)

О.М. БУЛГАКОВА, В.М. КУБРАК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Для студентов вузов

Кемерово 2015

УДК 517 (075)
Б 90
ББК 22.1я73

Рецензенты:

Л.Е. Мякишева, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики КузГТУ

Рекомендовано к размещению на сайте КемТИПП
(*университет*)

Булгакова, О.М., Кубрак, В.М.
Б 90 Высшая математика. Часть 1: учебное пособие / О.М. Булгакова, В.М. Кубрак; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности (университет). – Кемерово, 2015. – 107 с.
ISBN

Учебное пособие составлено в соответствии с программой дисциплины «Высшая математика» и предназначено для студентов вузов.

УДК 517 (075)
ББК 22.1я73

ISBN

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей, но может быть полезно для других студентов, изучающих математику. Содержит основные понятия, определения и формулы курса высшей математики согласно рабочей программе, утвержденной Федеральным агентством по образованию Российской федерации.

В пособие включены следующие темы: множества, линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, функция, теория пределов, дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Каждая тема пособия содержит основные определения, формулировки теорем, необходимые формулы. Приведены подробные решения типовых задач. Предлагаются примеры с ответами для самостоятельного решения.

Приведены образцы вариантов контрольных работ, а также расчетно-графическое задание. Сформулированы теоретические вопросы, которые являются основой для самостоятельной подготовки студента к экзамену.

Включены справочные материалы курса элементарной и высшей математики.

Пособие может быть использовано для самостоятельного изучения курса математики, закрепления полученных знаний на занятиях, является основой для подготовки студентов к экзамену по математике.

Обозначения

$=$ равно
$<$ меньше
$>$ больше
$\leq$ меньше или равно
$\geq$ больше или равно
$\in$ включение
$\subset$ принадлежность
$\cup$ объединение
$\cap$ пересечение
$|a|$ абсолютная величина числа a
$+$ сложение
$-$ вычитание
a^m a в степени m
$\sqrt{\ }$ квадратный корень
$\sqrt[n]{a^m}$ корень степени n из a в степени m
$i = \sqrt{-1}$ мнимая единица
$a + ib$ комплексное число
e постоянная величина, равная 2,718…
ln логарифм при основании e (натуральный логарифм)
$n!$ факториал; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$
$\sim$ подобно
$\|$ параллельно
π отношение длины окружности к диаметру, $\pi \approx 3,14…$
∞ бесконечность
lim предел
$\forall$ для всех
$\to$ стремится
Δ приращение
d дифференциал
$\sum$ сумма
f отображение, функция
$f(a)$ значение функции f в точке $x = a$
$\int f(x)dx$ неопределенный интеграл
$\int_a^b f(x)dx$ определенный интеграл с нижним пределом a и верхним пределом b
$y', f'(x), \frac{dy}{dx}$ производная функции $y = f(x)$
$\vec{a}$ вектор
$\overrightarrow{AB}$ вектор, начало которого а точке A, конец в точке B
$|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ длина вектора

$\left(\vec{a},\, \hat{}\, \vec{b}\right)$ угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ скалярное произведение векторов

$\vec{a} \times \vec{b}$ векторное произведение векторов

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или ***а·в·с*** смешанное произведение векторов

N множество натуральных чисел

Z множество целых чисел

Q множество рациональных чисел

I множество иррациональных чисел

R множество действительных чисел

C множество комплексных чисел

$[a;b]$ замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b

$(a;b)$ открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b

$(a;b]$, $[a;b)$ полуоткрытые промежутки с началом a и концом b

$\Rightarrow$ если $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, то из ***A*** следует ***B***

$\Leftrightarrow$ если $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$, то из ***A*** следует ***B*** и наоборот

Латинский алфавит

Aa – а
Bb – бэ
Cc – цэ
Dd – дэ
Ee – е
Ff – эф
Gg – же
Hh – аш
Ii – и
Jj – жи
Kk – ка
Ll – эль
Mm – эм
Nn – эн
Oo – о
Pp – пэ
Qq – кю
Rr – эр
Ss – эс
Tt – тэ
Uu – у
Vv – вэ
Ww – дубль-вэ
Xx – икс
Yy – игрек
Zz–зэт

Греческий алфавит

Αα – альфа
Ββ – бэта
Γγ – гамма
Δδ – дельта
Εε–эпсилон
Ζζ – дзэта
Ηη – эта
Θθ – тэта
Ιι – йота
Κκ – каппа
Λλ – лямбда
Μμ – мю
Νν – ню
Ξξ – кси
Οο – омикрон
Ππ – пи
Ρρ – ро
Σσ – сигма
Ττ – тау
Φφ – фи
Χχ – хи
Υυ – ипсилон
Ψψ – пси
Ωω – омега

1. МНОЖЕСТВА

Множество – фундаментальное понятие в математике. Под множеством понимают совокупность объектов, объединенных общим признаком. Объекты множества называются элементами. При изучении свойств множеств возникает необходимость группировать их по признакам. Если все элементы множества распределены по группам и нет элемента, который находится в нескольких группах, то множество разбито на непересекающиеся группы или классы [1].

Запись $a \in A$ обозначает принадлежность элемента a множеству A. Запись $B \subset A$ обозначает принадлежность множества B множеству A, то есть множество B является подмножеством множества A. Если каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот, то $A = B$, т.е. множества изоморфны (совпадают).

Множество, состоящее из трех элементов a_1, a_2, a_3, можно записать в виде: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется пустым и обозначается Ø.

Над множествами можно проводить различные операции и получать другие множества. К таким операциям относятся объединение $\cup$, пересечение $\cap$, разность – множеств, а также операция отрицания $\overline{A}$.

В системе множеств F задана алгебра множеств, если для любых множеств A, B из F выполняются условия:

1. $A \cup B \subset F$,
2. $A \cap B \subset F$,
3. $\overline{A} \subset F$.

Если выполняются условия $A - B \subset F$, $B - A \subset F$, то говорят, что в F задано поле множеств.

1.1 Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Два множества A и B являются равномощными, если после попарного сравнения их элементов, элемента без пары не осталось. Множество, у которого остались элементы без пары, имеет бо́льшую мощность. Другими словами, если существует такая функция f, что между элементами двух множеств существует взаимно однозначное соответствие, то множества равномощны. То есть, для любого $x \in A$ существует единственное $y \in B$, что $y = f(x)$, где A – область определения, B – область значения функции f.

Бывают конечные и бесконечные множества. Для бесконечного множества справедливо свойство быть равномощным со своим подмножеством.

Среди числовых множеств исторически первыми появились *натуральные числа*. Их используют в связи со счетом количества отдельных предметов. Натуральные числа образуют бесконечное множество [2], которое обозначают через N: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Множество натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения, то есть для любых $n, m \in N$ справедливо $n + m \in N,\ n \cdot m \in N$.

Для практических целей натуральных чисел оказалось недостаточно при измерении длин отрезков, физических величин и др. Возникла необходимость расширения множества натуральных чисел введением долей единицы и количества этих долей.

Пусть некоторая величина разделена на n частей и взято m таких частей. Эта величина представляет собой дробное число, которое имеет вид $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа. Число m называется числителем дроби, а n – знаменателем дроби.

Каждому числу, натуральному или дробному, соответствует противоположное число, которое называется отрицательным. Если положительное число обозначить буквой a (или $+a$), то отрицательное число записывается как $-a$.

К этим числам присоединяется число 0, соответствующее началу отсчета как положительных, так и отрицательных чисел.

Натуральные числа, им противоположные отрицательные числа и число 0 составляют множество *целых чисел* $\boldsymbol{Z}$. Целые числа могут быть записаны в виде дробей, например, $-3 = -\frac{3}{1}$.

Множество, состоящее из положительных, отрицательных целых, дробных чисел и числа 0, называется множеством *рациональных чисел*. Обозначают его через Q. Рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – любое целое число, а n – натуральное число.

Таким образом, N содержится в Z, а Z содержится в Q. Символически запишется $N \subset Z \subset Q$.

Основными действиями над рациональными числами являются сложение и умножение, а основным отношением между ними является сравнение чисел. Пусть a, b, c – элементы множества. Тогда основными законами действий над элементами множества могут быть:

1. Переместительный или коммутативный закон сложения:
$$a + b = b + a.$$
2. Сочетательный или ассоциативный закон сложения:
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$
3. Сложение с нулем:
$$a + 0 = a.$$
4. Сложение элемента множества с соответствующим ему элементом противоположного знака:
$$a + (-a) = 0.$$

5. Переместительный или коммутативный закон умножения:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

6. Сочетательный или ассоциативный закон умножения:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

7. Распределительный закон умножения:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

8. Умножение элемента на единицу:

$$a \cdot 1 = a.$$

9. Умножение элемента не равного нулю ($a \neq 0$) на $\frac{1}{a}$:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \ (a \neq 0).$$

10. Распределительный или дистрибутивный закон умножения относительно сложения:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

11. Свойство транзитивности:

$$a < b, \ b < c \Rightarrow a < c.$$

12. Правило сложения неравенств: для любого числа c

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

13. Правило умножения неравенств на число, отличное от нуля:

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \text{ при } c > 0,$$
$$a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \text{ при } c < 0.$$

Перечисленные утверждения справедливы и для других множеств, которые будем изучать позднее.

Рациональные числа, представленные в виде дроби, можно складывать, вычитать, умножать, делить. Пусть $\forall a, b, c, d \in Q, b \neq 0, d \neq 0$. Тогда

$$1. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

$$2. \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd},$$

$$3. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$4. \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Дробь $\frac{m}{n}$ называется правильной, если $m < n$ и неправильной, если $m \geq n$. Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы целого числа и правильной дроби.

Пример. Представить неправильную дробь $\frac{28}{5}$ в виде суммы целого числа и правильной дроби.

Решение. $\frac{28}{5}=\frac{25+3}{5}=\frac{25}{5}+\frac{3}{5}=5+\frac{3}{5}=5\frac{3}{5}.$

Число, записанное в таком виде, называется смешанным числом.

Если числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ умножить или разделить на одно и то же число $m \neq 0$, то получится дробь, равная данной $\frac{am}{bm}$.

Деление на ноль является недопустимым действием. Выражение $\frac{a}{0}$ не имеет смысла. Пусть $\frac{a}{0}=m.$ Тогда $a=0\cdot m=0,$ но $a \neq 0$. Нет такого числа m, которое, будучи умноженным на ноль, дало бы число, отличное от нуля.

Степенью называется a^n, где a – основание степени, n – показатель степени. В частности, $a^0 = 1$, $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

К основным действиям со степенями относятся:

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$2. a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0;$$

$$3. \left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n};$$

$$4. \left(a \cdot b\right)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0;$$

$$6. a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0.$$

Логарифмом числа b по основанию a ($\log_a b$, $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получилось число b:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Равенство $\log_a b = c$ означает, что $a^c = b$.

Из определения логарифма следуют равенства:

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1.$$

К основным действиям с логарифмами относятся:

$$1. \log_a \left(b \cdot c\right) = \log_a b + \log_a c;$$

$$2. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$3.\log_a b^n = n\cdot\log_a b;$$

$$4.\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b;\ 5.\log_{a^n} b^n = \log_a b;$$

$$5.\log_{a^n} b^n = \log_a b;$$

$$6.\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a};$$

$$7.\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b \neq 1.$$

Если $a = 10$, то lgb – десятичный логарифм, если $a = e \approx 2{,}7$, то lnb – натуральный логарифм.

При дальнейшем развитии математики оказалось недостаточным множества рациональных чисел. Например, не существует рационального числа, которое является решением квадратного уравнения $x^2 = 3$. Не рациональные числа назвали *иррациональными* числами (обозначим I). Множество рациональных и иррациональных чисел называется множеством *действительных* чисел R, то есть $Q \subset R, I \subset R$. Множество R всех действительных чисел можно изобразить графически точками на числовой прямой. Множество точек, соответствующих рациональным и иррациональным числам, полностью заполняют числовую прямую.

Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов. В противном случае оно называется бесконечным. Числовые множества, определяемые как множества действительных чисел, удовлетворяющих определенным неравенствам, называются *числовыми промежутками*. Наиболее часто встречаются следующие числовые множества:

- замкнутый промежуток или отрезок

$[a, b]$ или $a \le x \le b;$

- открытый промежуток или интервал

(a, b) или $a < x < b;$

- полуоткрытые промежутки

$(a, b]$ или $a < x \le b,$

$[a, b)$ или $a \le x < b,$

число $b - a$ называется длиной промежутка с концами a и b;

- бесконечные промежутки или лучи

(a, ∞) или $a < x < +\infty,$

$(-\infty, a)$ или $-\infty < x < a,$

$[a, \infty)$ или $a \le x < +\infty,$

$(-\infty, a]$ или $-\infty < x \le a;$

- числовая прямая $(-\infty, +\infty) = R$ или $-\infty < x \le +\infty.$

1.2 Абсолютная величина числа

Под *абсолютной величиной* (модулем) действительного числа понимают его величину, взятую без знака. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Абсолютная величина нуля равна нулю.

Например, исходя из определения, $|4| = 4$ и $|-4| = -(-4) = 4$.

1.3 Комплексные числа

Понятие комплексного числа возникло в связи с необходимостью извлечения корня четной степени из любого числа, в том числе отрицательного. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ на множестве действительных чисел решения не имеет. Предположим, что такое решение есть и $x = i$. Тогда $i^2 = -1$. Число $i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей.

Комплексным числом z [3] называется выражение вида $z = a + ib$, где a, b – действительные числа, а i – мнимая единица ($i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$). Если $a = 0$, то число $0 + ib = ib$ называется чисто мнимым. Если $b = 0$, то число $a + i0 = a$ отождествляется с действительным числом a, а это означает, что множество R действительных чисел является подмножеством C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, а b – *мнимой частью* z и обозначается $b = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными ($z_1 = z_2$) тогда, и только тогда, когда равны их действительные части ($a_1 = a_2$) и мнимые части ($b_1 = b_2$). В частности, комплексное число $z = a + ib$ равно нулю тогда, и только тогда, когда $a = b = 0$. Понятия больше, меньше для комплексных чисел не вводятся. Два комплексных числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$, отличающиеся знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить точкой M(a,b) плоскости $0xy$ такой, что $a = \operatorname{Re} z$, а $b = \operatorname{Im} z$. И наоборот, каждую точку M(a,b) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = a + ib$ (Рис.1.1).

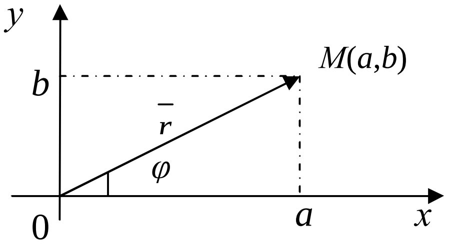


Рис.1.1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называют действительной осью, т.к. на ней лежат действительные числа $z = a + i0 = x$. Ось ординат называют мнимой осью, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + ib = ib$

Комплексное число $z = a + ib$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (a, b)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или $\boldsymbol{r}$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа, обозначается Arg z или φ.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0, -1, +1, -2, +2\ldots$)

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k,$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Запись числа z в виде $z = a + ib$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = a + ib$.

Тогда $a = r\cos\varphi,\ \ b = r\sin\varphi.$ Следовательно, комплексное число $z = a + ib$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.1)$$

Такая запись комплексного числа называется его *тригонометрической формой*.

Модуль комплексного числа $r = |z|$ однозначно определяется формулой $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Аргумент φ находят из формул

$$\cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r},\ tg\varphi = \frac{b}{a}.$$

Так как $\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k$, то $\cos\varphi = \cos(Argz) = \cos(argz).$

При переходе от алгебраической формы комплексного числа к геометрической, достаточно определить главное значение аргумента комплексного числа z, т.е. $\varphi = \arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} arc\,tg\dfrac{b}{a}, & a > 0, \quad b > 0 \\ arc\,tg\dfrac{b}{a} + \pi, & a < 0, \quad b > 0 \\ arc\,tg\dfrac{b}{a} - \pi, & a < 0, \quad b > 0 \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно определить непосредственно.

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$ комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в показательной форме

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \tag{1.2}$$

где $r = |z|$ – модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, ($k = 0, -1, +1, -2, +2\ldots$).

Пример. Записать комплексное число $z = 1 + i$ в тригонометрической и показательной форме.

Решение. Находим модуль комплексного числа $|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ и аргумент комплексного числа $\varphi = argz = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$ Тогда тригонометрическая форма комплексного числа (1.1) будет иметь вид $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, а показательная форма комплексного числа (1.2) запишется в виде $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число, равное $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$. (1.3)

Сложение комплексных чисел обладает переместительным и сочетательным 1,2 свойствами (стр.8).
Геометрически комплексные числа складываются как векторы (Рис.1.2).

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух комплексных чисел называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_1, дает число z_2, т.е. $z = z_2 - z_1$, если $z + z_1 = z_2$. Если $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, то

$$z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1). \tag{1.4}$$

Геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (Рис.1.3).

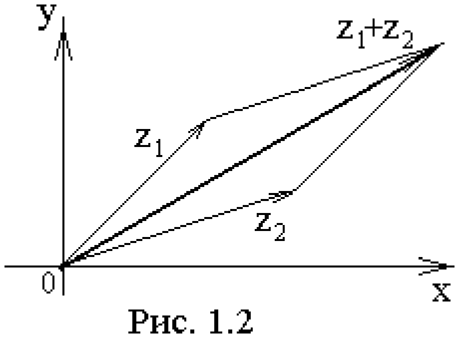


Рис. 1.2

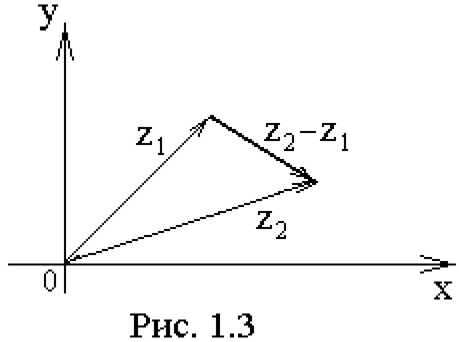


Рис. 1.3

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = \text{d}.$$

Например, равенство $|z - i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = i$, т.е. окружность с центром в точке $z_0 = i$ и радиусом 1.

Произведением комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число, равное

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i \cdot (a_1b_2 + a_2b_1). \tag{1.5}$$

Эта формула получается перемножением двучленов $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$.

Произведение сопряженных комплексных чисел

$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$ – чисто действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным, распределительным свойствами 5, 6, 7 (стр.8).

Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) = \\
&= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)] = \\
&= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].
\end{aligned}$$

При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{1.6}$$

В частности, если перемножают n одинаковых множителей, то

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) \text{ – \textit{формула Муавра}}. \tag{1.7}$$

Пример. Найти $(1+i)^4$.

Решение. Запишем число $z = 1+i$ в тригонометрической форме :

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$$argz = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \quad 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда, по формуле Муавра, получаем

$$z^4=\sqrt{2}^4\left(\cos 4\frac{\pi}{4}+i\sin 4\frac{\pi}{4}\right)=4(\cos\pi+i\sin\pi)=4\cdot(-1)=-4.$$

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. *Частным двух комплексных чисел* z_1 и $z_2\neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т.е. $\frac{z_1}{z_2}=z,$ если $z_2\cdot z=z_1$.

Пусть $z=x+iy$, $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$. Для алгебраической формы комплексного числа формула деления имеет вид:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}}. \tag{1.8}$$

В примерах частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пример. Выполнить деление $\frac{1+2i}{1+i}$.

Решение. $\frac{1+2i}{1+i}=\frac{(1+2i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{1-i+2i-2i^2}{1+1}=\frac{3+i}{2}=\frac{3}{2}+i\frac{1}{2}.$

Если комплексные числа даны в тригонометрической форме $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то формула деления примет вид:

$$z=\frac{r_1}{r_2}\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right). \tag{1.9}$$

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству $w^n=z$, откуда $\sqrt[n]{z}=w$.

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. а $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. тогда по определению корня и формулы Муавра, имеем

$$z=w^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Откуда следует, что $\rho^n=r$, $n\theta=\varphi+2\pi k$, $k=0, +1, -1, +2, -2,\ldots$

Следовательно, $\theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n}$ и $\rho=\sqrt[n]{r}$.

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z}=w$ принимает вид:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots n-1. \tag{1.10}$$

Из этой формулы видно, что все корни степени n из числа w имеют один и тот же модуль, но разные аргументы, отличающиеся друг от друга на $\frac{2\pi}{n}\cdot k$, где k – некоторое целое число. Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из числа w, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке z = 0.

Пример. Найти значения $\sqrt[3]{1+i}=w$.

Решение. В тригонометрической форме (1.1) комплексное число 1+i имеет вид $1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда по формуле (1.10) запишем

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right).$$

k =0,1,2.

k =0. $w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

k =1. $w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$.

k =2. $w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

Комплексные числа изображены тремя точками окружности (Рис. 1.4).

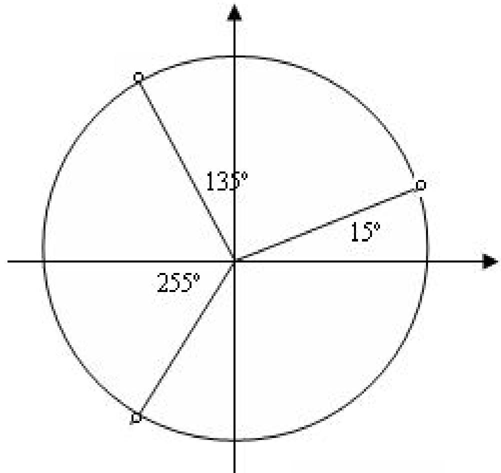


Рис.1.4

1.4 Система координат на плоскости

Прямоугольная система координат на плоскости позволяет в наглядной форме представлять различные соотношения между числами и точками плоскости, решать уравнения графическим способом.

На координатной плоскости две взаимно перпендикулярные оси (ось абсцисс 0x и ось ординат 0y) вместе с их точкой пересечения (началом координат) и выбранной единицей масштаба образуют декартову систему координат.

Число, равное расстоянию от этой точки до оси 0y называется абсциссой x любой точки плоскости. Абсцисса x > 0, если точка расположена справа от оси 0y, и x < 0, если точка расположена слева от оси 0y.

Число, равное расстоянию от этой точки до оси 0x, называется ординатой y любой точки плоскости. Ордината y > 0, если точка расположена выше оси 0x, и y < 0, если точка расположена ниже оси 0y.

Числа x и y, определяющие положение точки на плоскости, называются прямоугольными координатами точки. Каждая пара (x,y) действительных чисел определяет одну, и только одну точку $M(x,y)$.
И каждой точке $M(x,y)$ соответствует одна пара действительных чисел – координаты точки.

Множество точек $x = 0$ образует ось $0y$, а множество точек $y = 0$ являются осью $0x$. Знаки координат точки показаны на Рис.1.5.

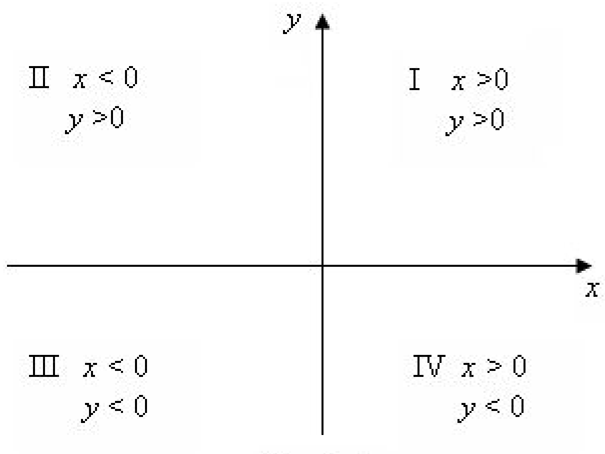


Рис.1.5

Положение некоторой точки на плоскости можно определить не только в декартовой системе координат. Например, введя полярную ось и угол φ между этой осью и радиус-вектором, мы полностью опишем положение точки на плоскости.

Положение точки M определяется двумя числами: расстоянием ρ от полюса O и углом φ, образованным радиус-вектором и полярной осью (Рис.1.6). Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M и пишут $M(\rho, \varphi)$. При этом ρ называют *полярным радиусом*, φ – *полярным углом*.

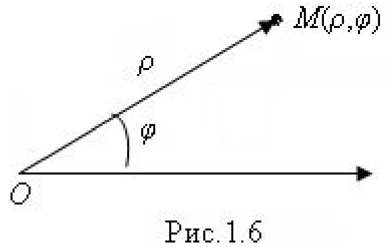


Рис.1.6

Декартовы координаты (x,y) точки M и полярные (ρ,φ) координаты точки M связаны формулами :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

И обратно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ , \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ .$$

Для получения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $(-\pi, \pi]$ (или $0 \le \varphi < 2\pi$), а полярный радиус –

$[0,\infty)$. В этом случае каждой точке плоскости (кроме точки O) соответствует единственная пара чисел ρ, φ. Справедливо и обратное утверждение: каждой паре чисел ρ, φ соответствует одна точка плоскости.

Примеры. Построить линии: $\varphi = \pi/3$ (Рис.1.7), $\rho = 4$ (Рис.1.8).

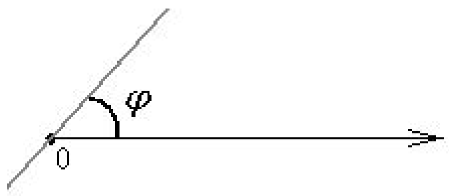


Рис. 1.7

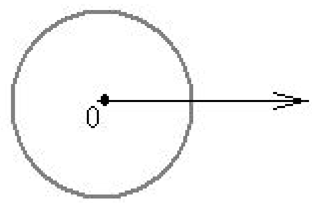


Рис. 1.8

Задачи

1. Преобразовать к декартовым координатам линию $\rho = 4\sin\varphi$ и построить ее.
   Ответ: $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

2. Преобразовать к декартовым координатам линию $\rho = \dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$, привести ее к каноническому виду и построить ее.

   Ответ: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

В математике любое предложение, относительно которого можно сказать, является ли оно истинным либо ложным, называется *высказыванием*. Если из высказывания A следует высказывание B, то записывается $A \Rightarrow B$ (из A следует B).

Если из высказывания A следует высказывание B, а из высказывания B следует высказывание A, то высказывания называются равносильными и обозначаются $A \Leftrightarrow B$.

2.1 Алгебраические выражения

Из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень и извлечения корня, а также скобок составляют *алгебраические выражения*. Например, $2a \cdot \sqrt{b^2 + c^3}$.

Два алгебраических выражения называются *тождественно равными*, если они совпадают при всех допустимых значениях входящих в них переменных. *Одночленом* называется алгебраическое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения. Например, $3ax$. Сумма одночленов называется *многочленом*. Над многочленами проводят арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления. Произведение многочленов обладает свойствами 5 – 9.

При делении многочлена на одночлен, каждый член многочлена делится на одночлен.

Пример. $\dfrac{3x^2-5x}{x}$.

Решение. $\dfrac{3x^2-5x}{x}=\dfrac{3x^2}{x}-\dfrac{5x}{x}=3x-5.$

Пример. $\dfrac{4x^2+7x-6}{x^2}$.

Решение. $\dfrac{4x^2+7x-6}{x^2}=\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{7x}{x^2}-\dfrac{6}{x^2}=4+\dfrac{7}{x}-\dfrac{6}{x^2}.$

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием выражения*.

Тождественными преобразованиями являются формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right).$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right).$$

2.2 Уравнения с одной переменной

Равенство с одной переменной называется уравнением с одной переменной. *Корнем* или *решением* уравнения называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство. Уравнения называются равносильными, если множества их решений равны.

Уравнение с одной переменной x вида

$$a\cdot x+b=0, \qquad (2.1)$$

где a и b – действительные числа, называется *линейным*.

Решение линейных уравнений основано на следующих теоремах:

- если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному;

- если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример. Решить уравнение 3x – 9 = 0.

Решение. $3x-9=0 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow (3x):3=9:3 \Leftrightarrow x=3.$

Уравнение с одной переменной x

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0, \qquad (2.2)$$

где a, b, c – действительные числа, называется *квадратным*.

Формула вычисления корней квадратного уравнения имеет вид:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad (2.3)$$

$\sqrt{b^2-4ac}=D$ – дискриминант квадратного уравнения.

Пример. Решить уравнение $2x^2-5x+2=0$.

Решение. Находим корни квадратного уравнения по формуле (2.3), где a = 2, b = – 5, c = 2.

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4},$$

$$x_1=\frac{5+3}{4}=2, x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Решить уравнение $x^2-4x+13=0$.

Решение. Находим корни квадратного уравнения по формуле (2.3), где a = 1, b = – 4, c = 13.

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=2\pm 3\cdot i.$$

Комплексные корни квадратного уравнения являются комплексно-сопряженными числами.

Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, называется *приведенным*, если в уравнении (2.2) значение a = 1, $p=\frac{b}{a}, q=\frac{c}{a}$.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятому с обратным знаком, а их произведение равно свободному члену, т.е.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Теорема Виета устанавливает связь между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^2-9x+14=0$.

Решение. Найдем два числа x_1 и x_2 из уравнений (2.4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 \cdot x_2 = 14. \end{cases}$$

Такими числами будут $x_1 = 2$ и $x_2 = 7$.

Квадратным трехчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Если числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, то квадратный трехчлен можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2), a \neq 0. \quad (2.5)$$

2.3 Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов.

Матрица записывается в виде

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где a_{ij} – элемент матрицы, i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} ($i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$).

Две матрицы A и B считаются равными, если они имеют одинаковую размерность и все соответствующие элементы этих матриц равны, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad , \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n .$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размерности $n \times n$ называют матрицей n – го порядка. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют главную диагональ матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме главной диагонали, равны нулю, называют *диагональной*.

Если у диагональной матрицы все элементы главной диагонали равны единице, то ее называют *единичной*. Обозначают буквой Е. Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; n=2.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Обозначают буквой O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектор-столбцом* или *вектор-строкой*. Их вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{T} называется *транспонированной* по отношению к матрице A, если столбцы матрицы A являются строками матрицы A^{T}.

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ транспонированной

матрицей будет матрица $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Для транспонированной матрицы справедливо $\left(A^T\right)^T = A$.

Матрицы можно складывать (вычитать), умножать на число, перемножать.

Операция сложения (вычитания) матриц вводится только для матриц одинаковой размерности.

Суммой (разностью) двух матриц одинаковой размерности $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \left(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\right) \quad (i = 1,\dots m,\ j = 1,\dots n).$$

Например, даны матрицы A и B. Найдем матрицу $A+B$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число λ, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы.

Например, дана матрица A и число $\lambda = 5$. Тогда

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \lambda=5 \Rightarrow \lambda A = 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1)\cdot A$ называется противоположной матрице A. Разность матриц $A - B$ можно определить как $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают свойствами 1,2 (с.8).

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна получается из другой с помощью элементарных преобразований. Обозначается $A \sim B$.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

1) перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение всех элементов строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженной на одно и то же число.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*.

Пример. Привести к каноническому виду матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним элементарные преобразования: умножим первый столбец последовательно на –2, – 3, –6 и сложим соответственно со вторым, третьим, четвертым столбцами

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -5 & -6\\ 3 & -5 & -7 & -12\end{pmatrix},$$

умножим первую строку последовательно на –2, –3 и сложим соответственно со второй и третьей строками

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -6\\ 0 & -5 & -7 & -12\end{pmatrix},$$

умножим второй столбец на –5, –6 и сложим третьим и четвертым

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 18 & 18\end{pmatrix},$$

вычтем из третьего столбца четвертый

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 18 & 0\end{pmatrix},$$

умножим вторую строку на –5 и сложим с третьей

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 18 & 0\end{pmatrix},$$

разделим вторую строку на –1, а третью строку на 18

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m \times k$ и матрицы $B = (b_{jp})$ размерности $k \times n$ называется матрица С = (c_{ip}) размерности $m \times n$, каждый элемент c_{ip} которой равен сумме произведений элементов i–ой строки матрицы A на элементы p–го столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ip} = a_{i1} \cdot b_{1p} + a_{i2} \cdot b_{2p} + \ldots + a_{in} \cdot b_{np} \ , \qquad (2.7)$$

где $i = 1, \ldots m$, $p = 1, \ldots n$.

Пример. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение $A \cdot B$ матриц A и B не определено, так как число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B.

При этом определено произведение $B \cdot A$ матриц B и A, каждый элемент матрицы вычисляется по формуле (2.7):

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 7 \cdot 4 & 0 + 7 \cdot 5 & 0 + 7 \cdot 6 \\ 8 \cdot 1 + 9 \cdot 4 & 8 \cdot 2 + 9 \cdot 5 & 8 \cdot 3 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 35 & 42 \\ 44 & 61 & 78 \end{pmatrix}.$$

Если матрицы A и B квадратные и одной размерности, то произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$ всегда существует.

Пример. Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим произведение матриц $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 36 & 50 \end{pmatrix}.$$

Вычислим произведение матриц $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то такие матрицы называются *перестановочными*. Умножение матриц обладает свойствами 6, 9 (с.8)

Для операции транспонирования выполняются свойства:

1. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$,
2. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

2.4 Определители

Квадратной матрице A (2.6) порядка n можно сопоставить *определитель* Δ= det A

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ определителя. Порядок определителя равен числу его строк (столбцов).

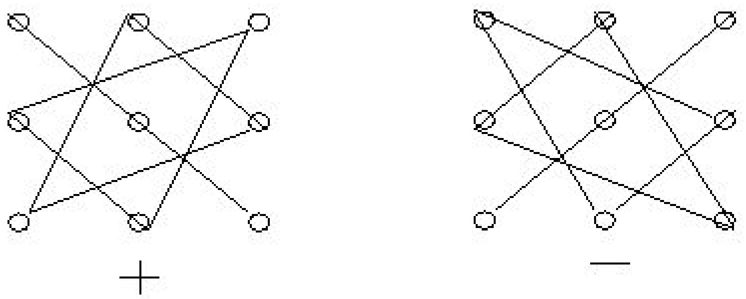
Определитель второго порядка равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{2.8}$$

Определитель третьего порядка находится по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11}\right). \tag{2.9}$$

Для более легкого запоминания метода вычисления определителя третьего порядка используют правило треугольника.



На схеме показано, что при вычислении определителя третьего порядка со своим знаком берем произведение элементов, указанных слева, и с противоположным знаком произведение элементов, указанных справа.

Например, вычислим определитель третьего порядка по формуле (2.9)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9) = 45 + 84 + 96 - 225 = 0.$$

Сформулируем основные свойства определителей на примере определителей второго порядка:

1. Определитель не меняет своего значения при замене строк соответствующими столбцами, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Действительно, по формуле (2.8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

2. При однократной перестановке двух строк (столбцов) определителя его знак меняется на противоположный

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель справа (2.8)

$$-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -(a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \Delta.$$

3. Общий множитель элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство легко проверяется вычислением.

4. Если все элементы строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю. Например,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Определитель, у которого две строки (столбца) одинаковы, равен нулю $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$

6. Если элементы строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k_1 & a_{12} + k_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Действительно,

$$\begin{vmatrix} \grave{a}_{11} + k_1 & \grave{a}_{12} + k_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + k_1) \cdot a_{22} - (a_{12} + k_2) \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} + k_1 \cdot a_{22} - k_2 \cdot a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Величина определителя не изменится, если к элементам строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженной на некоторое число k

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{21} & a_{12} + k \cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Проверим вычислением:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{21} & a_{12}+k\cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+k\cdot a_{21})\cdot a_{22} - (a_{12}+k\cdot a_{22})\cdot a_{21} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22} + k\cdot a_{21}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} - k\cdot a_{21}\cdot a_{22} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} = \Delta.$$

Для вычисления определителя порядка выше третьего используют миноры и алгебраические дополнения.

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком "плюс", если сумма $i+j$ – четное число, и со знаком "минус", если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \tag{2.10}$$

Определитель можно вычислять разложением по элементам строки (столбца): определитель равен сумме произведений элементов a_{ij} строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{или} \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{2.11}$$

Например, вычислим определитель третьего порядка разложением по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 2\cdot(-6) + 3\cdot(-3) = 0.$$

2.5 Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной,* если определитель $\Delta = det\, A$ не равен нулю.

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если выполняется условие

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Обратная матрица A^{-1} существует для невырожденной квадратной матрицы A. Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы.

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов определителя (2.10): $A_{11}= 4$, $A_{12}= -3$, $A_{21}= -2$, $A_{22}= 1$.

Находим A^{-1}: $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Проверим, что $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2.6 Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leq \min(m,n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются минорами этой матрицы [5].

Рангом матрицы называется наибольший порядок порожденных ею миноров, отличных от нуля. Обозначается $r(A)$ или rang A.

Базисным минором матрицы называется всякий ненулевой минор, порядок которого равен рангу данной матрицы. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Ранг матрицы не изменится, если:

1) поменять местами любые две строки (столбца);
2) умножить каждый элемент строки (столбца) на одно число;
3) прибавить к элементам строки (столбца) соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на число;
4) вычеркнуть из матрицы нулевую строку (столбец).

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения ранга матрицы используем элементарные преобразования. Вычеркнем шестой столбец, вычтем из четвертого столбца пятый столбец и переставим строки. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ -8 & 1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 9 & -15 & 3 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \overset{4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполнили последовательно:

1. Умножили первую строку на 2 и 8 и сложили со второй и третьей строками.
2. Умножили вторую строку на –3 и сложили с третьей строкой.
3. Первый столбец вычли из второго, сложили с третьим, вычли из четвертого.
4. Второй столбец умножили на 5, третий столбец умножили на 3 и сложили их. Четвертый столбец умножили на –3 и сложили со вторым.

Ранг матрицы A равен $r(A) = \mathrm{rang}\, A = 2$.

2.7 **Системы линейных алгебраических уравнений**

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.13}$$

Числа a_{ij} (i=1, 2,…, m, j=1, 2,…, n) называют коэффициентами системы (2.13), числа b_j – свободными членами.

Подлежат нахождению неизвестные числа x_i.

Обозначим через A – матрицу коэффициентов системы. Она называется *основной матрицей* системы (2.13)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

B – вектор-столбец свободных членов b_i ,

X – вектор-столбец неизвестных x_j

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Систему (2.13) можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = B. \tag{2.14}$$

Решением системы (2.13) называется n значений неизвестных $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, …, $x_n=c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы - столбца C:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим расширенную матрицу системы (2.13) через A^*, дополнив основную матрицу A столбцом свободных членов.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

В зависимости от того, какие значения в системе (2.13) имеют главный определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, и вектор-столбец свободных членов B, система может быть совместной, несовместной, определенной, неопределенной.

Система уравнений (2.13) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение. Если система имеет больше одного решения, то она называется *неопределенной*.

Решить систему – значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, то найти ее решение.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же решение.

Эквивалентные системы получаются при элементарных преобразованиях над строками расширенной матрицы (2.15).

Теорема (Кронекера-Капелли). Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Если все свободные члены системы (2.13) равны нулю, то она называется *однородной*. Однородная система всегда совместна, так как $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ является решением системы.

Пусть дана неоднородная система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.16)$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определителем системы. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы в случае $\Delta \neq 0$.

Рассмотрим три метода решения систем n линейных неоднородных уравнений с n неизвестными:

1. *Метод Крамера (метод определителей)*

Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad (2.17)$$

где Δ – главный определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, Δ_i – определитель, полученный из главного определителя заменой i – го столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера [4].

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 79 \neq 0.$$

Главный определитель системы не равен нулю, поэтому система совместна и имеет единственное решение.

Находим вспомогательные определители. Определитель Δ_1 получается из главного определителя заменой первого столбца столбцом свободных членов. Вычисляем его разложением по элементам первой строки.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^2 \cdot 38 + (-1) \cdot (-1)^3 \cdot 29 + (-3) \cdot (-1)^4 \cdot (-84) = 395.$$

Находим определитель Δ_2, полученный из главного определителя заменой второго столбца столбцом свободных членов, разложением его по элементам третьей строки

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 17 \cdot (-1)^5 \cdot (-1) + 7 \cdot (-1)^6 \cdot (-25) = -158.$$

Вычисляем определитель Δ_3, полученный из главного определителя заменой третьего столбца столбцом свободных членов, разложением его по элементам третьей строки.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot (-1)^5 \cdot (-25) + 17 \cdot (-1)^6 \cdot 11 = 237.$$

Определяем решение системы по формуле (2.17)

$$x_1 = \frac{395}{79} = 5, \quad x_2 = -\frac{158}{79} = -2, \quad x_3 = \frac{237}{79} = 3.$$

2. *Метод Гаусса*

Одним из универсальных методов решений линейных алгебраических систем уравнений является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Суть метода Гаусса заключается в том, что на первом этапе система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой, а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над строками.

Пример. Решить систему уравнений (2.18) методом Гаусса.

Решение. Составим расширенную матрицу, дополнив основную матрицу A столбцом свободных членов.

Приведем расширенную матрицу с помощью элементарных преобразований над строками к диагональному виду, то есть получим нули ниже главной диагонали. Для этого сначала умножим элементы первой строки на 3, а второй строки на (-2), сложим соответствующие элементы строк и запишем во вторую строку. Третью строку перепишем. Затем элементы второй строки полученной матрицы умножим на 2, а элементы третьей строки умножим на 11. Сложим соответствующие элементы строк и запишем в третью строку. Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & 7 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & 25 \\ 0 & 2 & 7 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 79 & 237 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует ступенчатой системе

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ -11x_2 + x_3 = 25, \\ 79x_3 = 237. \end{cases}$$

Находим последовательно неизвестные x_3 , x_2 , x_1 . Из третьего уравнения: $x_3 = \frac{237}{79} = 3$, из второго: $x_2 = \frac{25-3}{-11} = -2$, из первого: $x_1 = \frac{3 + 3 \cdot 3 + (-2)}{2} = 5$.

3. *Матричный метод*

Запишем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений (2.16) в матричной форме $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если определитель основной матрицы системы $\det A = \Delta \neq 0$, то система имеет единственное ненулевое решение X.

Найдем это решение. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.19}$$

Отыскание решения системы по формуле (2.19) называют матричным способом решения системы.

Пример. Решить систему уравнений (2.18) матричным методом.

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 7\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3\\ -8\\ 17\end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A не равен нулю ($\Delta = 79 \neq 0$), значит неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение. Найдем решение системы по формуле (2.19). Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}(A^V)^T=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы по формуле (2.10). Определители второго порядка находим по формуле (2.8):

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & -5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=38,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -5\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-21,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 7\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=14,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=17,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -5\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=11.$$

По формуле (2.19) получаем:

$$X=\frac{1}{79}\cdot\begin{pmatrix}38 & 1 & 17\\ -21 & 14 & 1\\ 6 & -4 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -8\\ 17\end{pmatrix}=\frac{1}{79}\cdot\begin{pmatrix}38\cdot 3+1\cdot(-8)+17\cdot 17\\ (-21)\cdot 3+14\cdot(-8)+1\cdot 17\\ 6\cdot 3+(-4)\cdot(-8)+11\cdot 17\end{pmatrix}=\frac{1}{79}\cdot\begin{pmatrix}395\\ -158\\ 237\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Задачи

1. Даны матрицы A и B. Найти матрицы $2A-B$, $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $2A-B=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ -5 & 5 & -7\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -5 & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 4\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Найти те из произведений AB, BA, которые имеют смысл.

Ответ: $BA=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

3. Для матрицы A найти A^{-1}, AA^{-1}, $A^{-1}A$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{12} & \frac{4}{12} & -\frac{5}{12}\\ \frac{2}{12} & -\frac{8}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{2}{12} & \frac{4}{12} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}$, $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$

4. Доказать совместность системы линейных уравнений и решить тремя методами: Крамера, Гаусса, матричным.

$$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=1,\\ x_2-x_3=-3.\end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1 Векторы

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, работа, температура.

Другие величины, которые определяются не только своими числовыми значениями, но и направлением, называются *векторными*. Примерами векторных величин являются: сила, скорость, ускорение. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектор – это направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и заданное направление. Если точка *A* – начало вектора, а точка *B* – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или ***a***. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору ***a***, обозначается – ***a***.

Длиной или модулем вектора ***a*** называется длина отрезка и обозначается | ***a*** |. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором*. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* и обозначается ***e***. Единичный вектор ***e***, направление которого совпадает с направлением вектора ***a***, называется *ортом* вектора ***a***.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора называются *равными* (***a*** = ***b***), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины. Из определения равенства векторов следует, что векторы определяются с точностью до параллельного переноса.

Под *линейными операциями* над векторами [5] понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Векторы можно складывать геометрически по правилу параллелограмма или треугольника.

Пусть ***a*** и ***b*** – два произвольных вектора (Рис.3.1.).

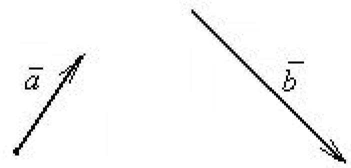


Рис. 3.1

Построим сумму двух векторов ***a*** и ***b*** по правилу треугольника и правилу параллелограмма (Рис.3.2).

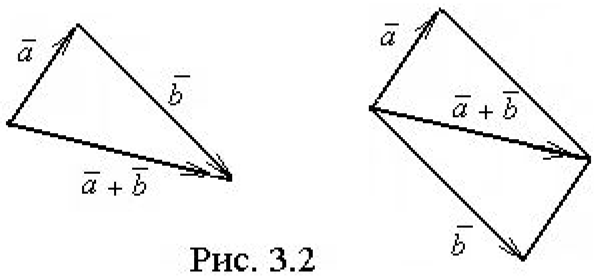


Рис. 3.2

Вычитать векторы можно по правилу: ***a*** – ***b*** = ***a*** + (–***b***), то есть вычитание векторов можно заменить сложением вектора ***a*** с вектором, противоположным вектору ***b***.

Произведением числа λ на вектор ***a*** называется вектор λ***a***, который имеет длину $|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$, коллинеарен вектору ***a***, имеет направление вектора ***a***, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Линейные операции над векторами обладают свойствами 1 – 7 (с.8).

Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется осью *l*. Углом *φ* между ненулевым вектором ***a*** и осью *l* называется угол между направлениями оси и вектора.

Проекцией вектора **a** на ось *l* называется число, равное

$$\text{пр}_{l}\ \vec{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\boldsymbol{a}\wedge l).$$

Проекция вектора на ось *l* положительна, если вектор ***a*** образует с осью *l* острый угол; отрицательна, если вектор ***a*** образует с осью тупой угол; равна нулю, если угол прямой.

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-либо порядке. Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси – осями координат.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $0xyz$. Выделим на координатных осях $0x$, $0y$, $0z$ единичные векторы (орты) и обозначим их $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ соответственно. Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и с помощью параллельного переноса совместим его начало с началом координат. Обозначим проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на координатные оси $0x$, $0y$, $0z$ через a_x, a_y, a_z соответственно. Тогда вектор $\boldsymbol{a}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{a} = a_x \cdot \boldsymbol{i} + a_y \cdot \boldsymbol{j} + a_z \cdot \boldsymbol{k}.$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется разложением вектора по ортам координатных осей. Числа a_x, a_y, a_z называют *координатами вектора*. Вектор $\boldsymbol{a}$ записывают в символическом виде $\boldsymbol{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$.

Модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его координат $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

По свойству проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\alpha,\ a_y = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\beta,\ a_z = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\gamma \text{ или}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}.$$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора.

Сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Координатами единичного вектора $\boldsymbol{e}$ являются числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Зная координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, то есть сам вектор.

Если векторы заданы в координатной форме: $\boldsymbol{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, то при умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ координаты вектора умножаются на это число: $\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\}$. При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются): $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_x + b_x;,\ a_y + b_y;,\ a_z + b_z\}$.

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны тогда, и только тогда, когда их координаты равны, т.е. $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Выясним условия коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданных своими координатами $\boldsymbol{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x ; b_y ; b_z\}$. Так как $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то можно записать $\boldsymbol{a} = \lambda \cdot \boldsymbol{b}$, где λ – некоторое число, то есть

$$a_x \cdot \boldsymbol{i} + a_y \cdot \boldsymbol{j} + a_z \cdot \boldsymbol{k} = \lambda \cdot (b_x \cdot \boldsymbol{i} + b_y \cdot \boldsymbol{j} + b_z \cdot \mathrm{k}) = \lambda b_x \cdot \boldsymbol{i} + \lambda b_y \cdot \boldsymbol{j} + \lambda b_z \cdot \boldsymbol{k}.$$

Отсюда $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$ или

$$\lambda = \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, координаты коллинеарных векторов пропорциональны. Справедливо и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Например, по данным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ построить векторы: $3\boldsymbol{a}$, $-0{,}5\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{a}+0{,}3\boldsymbol{b}$ (Рис.3.3).

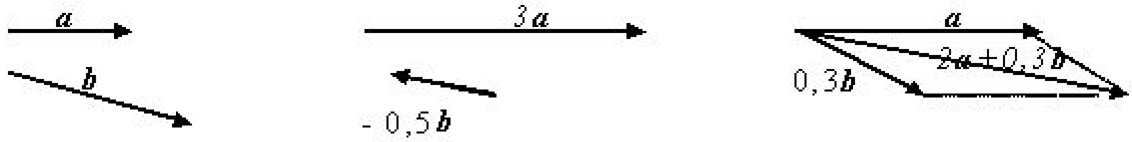


Рис.3.3

Любой точке М в пространстве $0xyz$ соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Следовательно, координаты точки – это координаты ее радиус-вектора. Координаты точки М записываются в виде М(x,y,z).

Если известны координаты точек $M_1(x_1,y_1,z_1,)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1,)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ в пространстве определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3.1)$$

Координаты x, y, z точки М(x; y; z), которая делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (3.2)$$

В частности, при делении отрезка 1:1, когда $\lambda=1$, координаты середины отрезка равны:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (3.3)$$

Пример. Центр тяжести однородного стержня находится в точке C (1, –1, 5), один из его концов есть точка A (–2, –1, 7). Найти координаты другого конца стержня B.

Решение. Поскольку стержень однородный, то его середина совпадает с центром тяжести стержня, т.е. с точкой *C*. По формуле (3.3) находим:

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{2}, \text{ отсюда } x_B = 2\cdot x_c - x_A,\ x_B = 2\cdot 1 - (-2) = 4.$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \text{ отсюда } y_B = 2\cdot y_C - y_A,\ y_B = 2\cdot(-1) - (-1) = -1.$$

$$z_C = \frac{z_A + z_B}{2}, \text{ отсюда } z_B = 2\cdot z_C - z_A,\ z_B = 2\cdot 5 - 7 = 3.$$

Ответ: B (4, –1,3).

3.2 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a} = \{a_x\,;\,a_y\,;\,a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x\,;\,b_y\,;\,b_z\}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла φ между ними. Обозначается $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot cos(a\wedge b) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (3.4)$$

Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ равна $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = |\,\boldsymbol{a}\,|\cdot\cos\varphi$. Учитывая эту формулу, можно записать скалярное произведение через проекцию одного вектора на другой, т. е. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$

Свойства скалярного произведения векторов 1–2, 5–7 (с.8).

Скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$. Скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$ равен квадрату его длины $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выражается через их одноименные координаты по формуле:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z. \qquad (3.5)$$

Угол между векторами $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{a_x\ , a_y\ , a_z\}$ равен

$$\cos\varphi = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\cdot\sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}. \qquad (3.6)$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = 0.$$

Пример. Даны вершины ΔABC $A(-1, -2{,}4)$, $B(-4, -2{,}0)$, $C(3, -2{,}1)$ (Рис. 3.4)

Определить внутренний угол при вершине *B*.

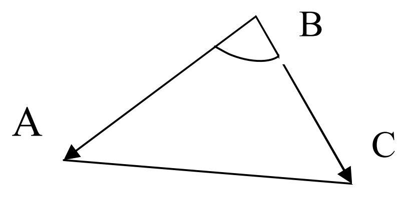


Рис.3.4

Решение. Определим внутренний угол при вершине B как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ по формуле (3.6). Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}=\{3,0,4\}$, $\overrightarrow{BC}=\{7,0,1\}$ (рис.3.4).
По формуле (3.6) получим

$$\cos B = \frac{21+4}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{49+1}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: угол B равен 45°.

3.3 Векторное произведение векторов

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Некомпланарные векторы ***a***, ***b***, ***c*** образуют правую тройку, если с конца вектора ***c*** поворот вектора ***a*** к вектору ***b*** на острый угол происходит против часовой стрелки.

Векторным произведением векторов ***a*** и ***b*** называется вектор **c** = ***a*** × ***b*** который:

1) перпендикулярен векторам ***a*** и ***b***, т.е. вектор ***c*** перпендикулярен плоскости перемножаемых векторов $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$;
2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b***, как на его сторонах, т.е.
$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\,\hat{}\,\boldsymbol{b});$$
3) векторы ***a***, ***b***, ***c*** образуют правую тройку.

Свойства векторного произведения:

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$,
2. $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$,
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

Пусть заданы два вектора $\boldsymbol{a} = a_x\cdot\boldsymbol{i} + a_y\cdot\boldsymbol{j} + a_z\cdot\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = b_x\cdot\boldsymbol{i} + b_y\cdot\boldsymbol{j} + b_z\cdot\boldsymbol{k}$. Найдем векторное произведение векторов, перемножая их как многочлены $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\cdot\boldsymbol{i} + a_y\cdot\boldsymbol{j} + a_z\cdot\boldsymbol{k})\times(b_x\cdot\boldsymbol{i} + b_y\cdot\boldsymbol{j} + b_z\cdot\boldsymbol{k})$. После преобразований получим формулу

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

Координаты векторного произведения удобно вычислять разложением определителя по элементам первой строки.

Векторное произведение применяют при установлении коллинеарности векторов.

Два ненулевых вектора ***a*** и ***b*** коллинеарны тогда, и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Площадь параллелограмма и треугольника можно найти из определения векторного произведения векторов ***a*** и ***b*** , а именно,
$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(a\hat{\ }b)$, т.е.

$$S_{пар} = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|, \qquad S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{M}$, который находится

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA}\times\vec{F}.$$

Пример. Даны вершины треугольника ABC $A(1, -1,2)$, $B(5, -6,2)$, $C(1,3, -1)$. Вычислить длину высоты $ВД$.

Решение. $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right| \to \left|\overrightarrow{BD}\right| = \dfrac{2S_{\Delta}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$

$\overline{AC} = \{0;4;-3\}$, $\qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2+4^2+(-3)^2} = 5.$

$\overline{AB} = \{4;-5;0\}$. $\quad S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|.$

По формуле (3.7) находим:

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-15) - \vec{j}\cdot 12 + \vec{k}\cdot(-16) = -15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k},$$

Тогда площадь треугольника $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-15)^2+(-12)^2+(-16)^2} = \frac{25}{2}.$

Ответ: $ВД = 25 / 5 = 5$.

3.4 Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов ***a, b, c***, составленное следующим образом: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *смешанным* произведением трех векторов. Смешанное произведение векторов представляет собой число, равное определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (3.8)$$

Выясним геометрический смысл выражения $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы ***a, b, c*** (Рис.3.5).

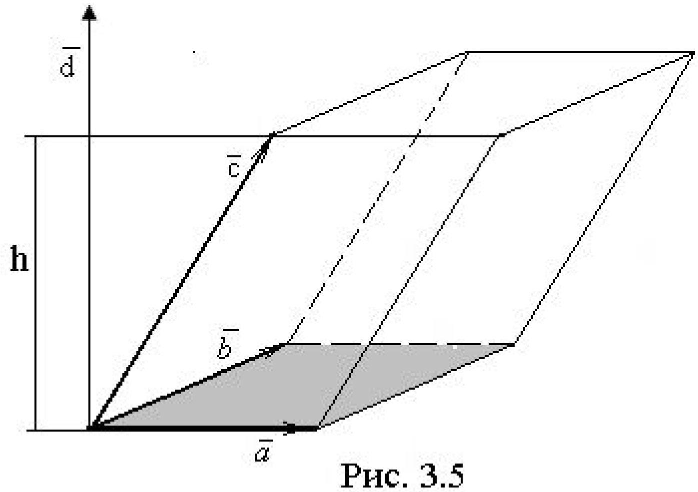


Рис. 3.5

Имеем: ($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$) $\cdot$ $\boldsymbol{c}$ = $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c}$ = **|d|** пр$_{\mathbf{d}}$ **c,** но **|d|** = |$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$| = S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а пр$_{\mathbf{d}}$ **c** = h – высота параллелепипеда.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком "плюс", если векторы образуют правую тройку, и со знаком "минус", если они образуют левую тройку.

Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$,
2. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$,
3. $\boldsymbol{abc} = -\,\boldsymbol{acb}$, $\boldsymbol{abc} = -\,\boldsymbol{bac}$, $\boldsymbol{abc} = -\,\boldsymbol{cba}$.

Пример. Установить, компланарны ли векторы $\boldsymbol{a} = \{2,3,-1\}$, $\boldsymbol{b} = \{1,-1,3\}$, $\boldsymbol{c} = \{1,9,-11\}$.

Решение. Вычислим смешанное произведение этих векторов (3.8):

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2\cdot(-16) - 3\cdot(-14) - 1\cdot 10 = -32 + 42 - 10 = 0.$$

Равенство нулю смешанного произведения трех векторов является условием компланарности этих векторов.

Задачи

1. Вычислить внутренние углы треугольника $A(1, 2)$, $B(3,-1)$, $C(7, 4)$ и убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

2. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2)$, $B(1; 4)$, $C(-4; 1)$, $D(-5;-5)$. Доказать, что диагонали AB и CD взаимно перпендикулярны.

3. Найти пр$_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ и пр$_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = \{2; 2; 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{6; 3; 2\}$.

4. Даны точки $A(3; 3; 3)$ и $B(-1; 5; 7)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части.
   Ответ: $C(5/3; 11/3; 13/3)$, $D(1/3; 13/3; 17/3)$.

5. Вычислить модуль вектора $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - (1/5)\boldsymbol{b}$ и его направляющие косинусы, если $\boldsymbol{a} = \{1; 2; 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{4; 8; 3\}$.
   Ответ: $a = 3/5$, $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = 2/3$, $\cos\gamma = 2/3$.

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; 1; 0)$.
   Ответ: $\sqrt{65}/2$ кв.ед.

7. Найти смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a} = \{1; -1; 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{1; 1; 1\}$, $\boldsymbol{c} = \{2; 3; 4\}$.
   Ответ: 4.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$ $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$. Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань BCD.
   Ответ: 20 куб.ед., $4\sqrt{510}/17$.
9. Показать, что точки $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежат в одной плоскости.

4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

4.1 Уравнения прямой на плоскости

Линия на плоскости задается как множество точек, обладающих некоторыми геометрическими свойствами, только им присущими. Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой в прямоугольной системе координат соответствуют разные виды ее уравнений.

Пусть на плоскости $0xy$ задана произвольная прямая. Ее положение определяется ординатой b точки $N(0,b)$ пересечения с осью $0y$ и углом α между осью $0x$ и прямой (Рис.4.1).

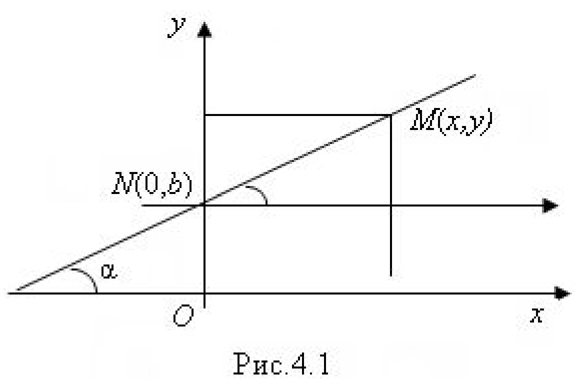


Рис.4.1

Под углом α ($0 \le \alpha \le \pi$) наклона прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси $0x$

против часовой стрелки ось $0x$ до ее совпадения с прямой. Из определения тангенса угла получим $y = (\text{tg}\,\alpha) \cdot x + b$.

Обозначим $\text{tg}\,\alpha = k$. Число k называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение (4.1) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*

$$y = k \cdot x + b. \qquad (4.1)$$

Координаты любой точки $M(x,y)$ прямой удовлетворяют уравнению (4.1).

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и уравнение (4.1) примет вид

$$y = k \cdot x.$$

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \qquad (4.2)$$

где A,B,C – произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно. Уравнение (4.2) называется *общим уравнением прямой*.

Если прямая задана уравнением (4.2), то *угловой коэффициент прямой* определяется формулой:

$$k = -\frac{A}{B}.$$

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и ее направление определяется угловым коэффициентом k. Уравнение прямой запишется:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \qquad (4.3)$$

и называется *уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом k.*

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, то ее угловой коэффициент равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4.4)$$

Подставляя угловой коэффициент k в уравнение (4.3), получим *уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$*

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4.5)$$

Если известны угловые коэффициенты двух прямых κ_1 и κ_2, то *один из углов φ между* этими *прямыми* определяется по формуле:

$$tg\varphi = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1\kappa_2}. \qquad (4.6)$$

Из формулы (4.6) следует, что если две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны: $k_1 = k_2$. Если две прямые перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.

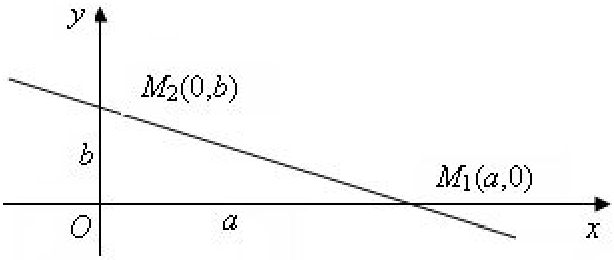


Рис. 4.2

Пусть прямая пересекает ось $0x$ в точке M_1 $(a,0)$, а ось $0y$ – в точке M_2 $(0,b)$. В этом случае уравнение прямой (4.5) примет вид (рис.4.2)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (4.7)$$

и называется *уравнением прямой в отрезках*.

Вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B\}$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором прямой*. Запишем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\boldsymbol{n}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (4.8)$$

Уравнение (4.8) можно преобразовать к общему виду (4.2).

Составим уравнение прямой в полярных координатах. Положение прямой можно определить, указав расстояние p от полюса О до данной прямой и угол α между полярной осью ОР и осью l , проходящей через полюс О перпендикулярно данной прямой (Рис.4.3).

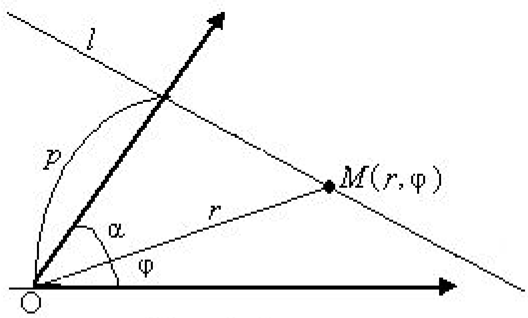


Рис.4.3

Уравнение прямой в полярных координатах запишется в виде

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) = p. \qquad (4.9)$$

Уравнение (4.9) в прямоугольной системе координат запишется

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha = p. \qquad (4.10)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.11)$$

Каждый ненулевой вектор, лежащий на прямой или параллельной ей прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Обозначим направляющий вектор прямой через $\boldsymbol{a} = \{l,m\}$. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ точка, лежащая на прямой. Тогда *каноническое уравнение прямой* запишется в виде

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (4.12)$$

Пример. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны одна из его вершин $B(-4, -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$. Схематический чертеж показан на (Рис.4.4).

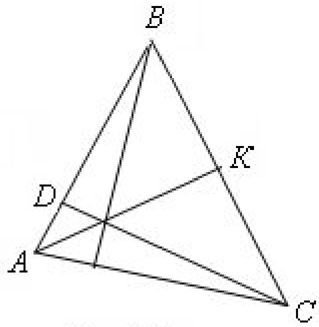


Рис.4.4

Решение. Проверим, лежит ли точка B на какой-либо высоте. Для этого подставим координаты точки B в уравнения высот.

$$5\cdot(-4)+3\cdot(-5) -4= -20-15-4 \neq 0.$$
$$3\cdot(-4)+8\cdot(-5)+13=12-40+13 \neq 0.$$

Точка B не лежит на какой-либо заданной высоте.

Составим каноническое уравнение прямой AB, зная координаты точки B, лежащей на этой прямой, и координаты вектора $\boldsymbol{a} = \{5, 3\}$, коллинеарного ей (4.12).

$$AB\colon\ \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{3}.$$

Преобразуем полученное уравнение к общему виду $3x-5y-13 = 0$.

Аналогично составляем уравнение стороны BC:

$$BC\colon\ \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{8} \text{ или}$$

$$BC\colon\ 8x - 3y + 17 = 0.$$

Точку A находим как точку пересечения прямых AB и AD. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 13 = 0, \\ 3x + 8y + 13 = 0. \end{cases}$$

Получаем координаты точки A: $x = 1$, $y = -2$, $A(1, -2)$.

Координаты точки C находим как точку пересечения прямых BC и KC. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x - 3y + 17 = 0, \\ 5x + 3y - 4 = 0. \end{cases}$$

Получаем координаты точки C: $x = -1$, $y = 3$, $C(-1,3)$.

Составим уравнение прямой AC, проходящей через две данные точки $A(1,2)$ и $C(-1,3)$:

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+2}{3+2} \Rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{5} \Rightarrow 5x+2y-1=0.$$

Ответ: *AB*: $3x–5y–13=0$, *BC*: $8x–3y+17=0$, *AC*: $5x+2y–1=0$.

Пример. Точка $A(–4,5)$ является вершиной квадрата *ABCD*, диагональ которого лежит на прямой $7x – y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали.

Решить самостоятельно.

Ответ: *AC*: $x + 7y – 31 = 0$, *AD*: $4x + 3y + 1 = 0$,
AB: $3x – 4y + 32 = 0$, *CD*: $3x – 4y + 7 = 0$, *BC*: $4x + 3y – 24 = 0$.

4.2 Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $0xyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

В пространстве $0xyz$, где введена прямоугольная система координат, возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ и соединим ее с началом координат. Точке соответствует радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$. Через конец вектора $\boldsymbol{r}$ проведем плоскость Q, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{r}$. Пусть $p = |\boldsymbol{r}|$ – длина радиус-вектора, $\boldsymbol{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор, направленный в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{r}$ и α, β, γ – углы, образуемые вектором $\boldsymbol{e}$ с положительным направлением осей $0x$, $0y$, $0z$. Проекция радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ на направление вектора $\boldsymbol{e}$ равна p, то есть $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e} = p$ или

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e} - p = 0. \tag{4.13}$$

Это уравнение называется нормальным уравнением плоскости в векторной форме. Подставим координаты векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{e}$ в уравнение (4.13). Тогда в координатной форме уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta + z\cdot\cos\gamma = p. \tag{4.14}$$

Оно называется *нормальным уравнением плоскости* в координатной форме.

В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени и наоборот, каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Пусть в пространстве $0xyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальным вектором $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярным к этой плоскости. Возьмем на ней произвольную точку $M(x\ y, z)$ и составим вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}.$$

Скалярное произведение перпендикулярных векторов $\boldsymbol{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ равно нулю, то есть

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) определяет плоскость, проходящую через данную точку M_0 (x_0, y_0, z_0) и имеющую нормальный вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$. Преобразуя уравнение (4.15), получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0\ . \qquad (4.16)$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 1, -1)$ и имеющей нормальный вектор $n = \{1, -2, 3\}$.

Решение. Подставим в формулу (4.15) координаты точки и вектора $1\cdot(x-2)+(-2)\cdot(y-1)+3\cdot(z-(-1))=0$. Раскроем скобки и получим общее уравнение плоскости: $x - 2y+3z+3=0$.

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три точки $M_1(x_1\ , y_1\ , z_1)$, $M_2(x_2\ ,y_2\ ,z_2)$, $M_3(x_3\ ,y_3\ ,z_3)$, не лежащие на одной прямой. Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ и составим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}.$$

Эти векторы лежат на плоскости Q, то есть компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю).

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.17)$$

Это *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Под углом между плоскостями Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Пусть $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Косинус угла между двумя плоскостями определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}. \qquad (4.18)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости (4.16) вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.19)$$

4.3 Уравнения прямой в пространстве

Каждый ненулевой вектор, лежащий на прямой или параллельной ей прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Положение прямой в пространстве определено, если задать какую-либо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на прямой и направляющий вектор этой прямой.

Обозначим направляющий вектор прямой через $\boldsymbol{a} = \{l, m, n\}$.

Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ точка, лежащая на прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x, y, z)$ прямой, параллелен вектору $\boldsymbol{a}$. Координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \qquad (4.20)$$

Это *каноническое уравнение прямой*.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1,)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.21)$$

Если в уравнении (4.21) выражение приравнять к параметру t, то получим *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad (4.22)$$

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Задачи

1. Даны середины сторон треугольника: $M_1(2,1)$, $M_2(5,3)$, $M_3(3, -4)$. Составить уравнения его сторон.
   Ответ: $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$.

2. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(5, -2)$, $C(1,0)$.
   Ответ: $2x+y-8=0$, $x+2y-1=0$, $x-y-1=0$, $x-3=0$, $x+y-3=0$, $y=0$.

3. Даны стороны треугольника: AB: $x+3y-7=0$, BC: $4x-y-2=0$, AC: $6x+8y-35=0$. Найти длину высоты, проведенной из вершины B.
   Ответ: 1,3.

4. Точки $A(1,2)$ и $C(3,6)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин квадрата. *Ответ*: (0,5) и (4,3).

5. Даны вершины треугольника: $A(-10, -13)$, $B(-2,3)$, $C(2,1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.
   Ответ: 4.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3, -1,2)$, $M_2(4, -1, -1)$, $M_3(2,0,2)$.
   Ответ: $3x + 3y + z - 8 = 0$.

5. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат на плоскости

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Коэффициенты уравнения – действительные числа, причем A, B не равны нулю одновременно. Такие линии называются кривыми второго порядка на плоскости. Изучим свойства окружности, эллипса, гиперболы и параболы.

5.1 Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность.
Окружностью радиуса R с центром в точке $Q(\alpha, \beta)$ называется множество точек плоскости $M(x,y)$, для каждой из которых расстояние до точки $Q(\alpha, \beta)$ есть величина постоянная и равна: $QM = R$. Уравнение вида

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2. \quad (5.1)$$

определяет каноническое уравнение окружности радиуса R с центром в точке Q (α, β) (Рис.5.1).

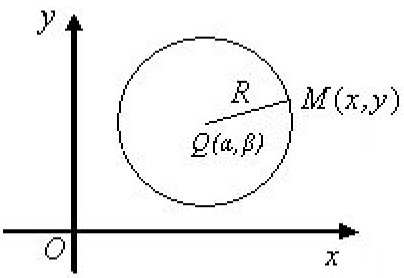


Рис.5.1

Пример. Окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6,-8)$. Составить уравнение окружности.
Решение. По формуле (5.1) получим
$(x-6)^2 + (y+8)^2 = 10^2$.

5.2 Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через $2a$. Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат $0xy$ так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси $0x$, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2 (Рис.5.2). Тогда фокусы будут иметь координаты: $F_1(-c, 0)$, и $F_2(c, 0)$. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. По определению эллипса $MF_1 + MF_2 = 2a$. После преобразований получим каноническое уравнение эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (5.2)$$

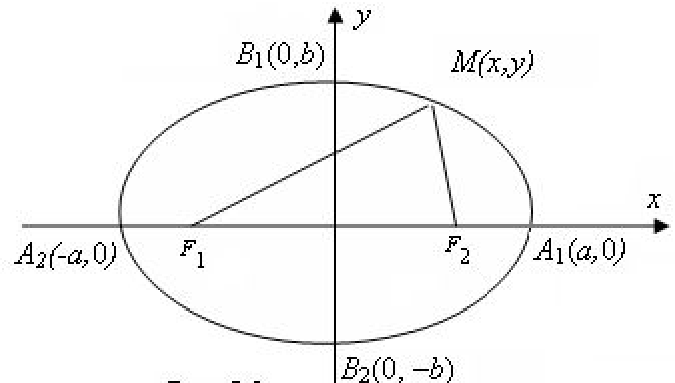


Рис.5.2

$R_1=F_1M$, $R_2=F_2M$, $R_1 + R_2 = 2a$, $F_1F_2 = 2c$,

где $b^2 = a^2 - c^2$,

b – малая полуось эллипса,

a – большая полуось эллипса,

c – расстояние от центра эллипса до фокуса.

Число $\varepsilon = c/a$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются *директрисами* эллипса.

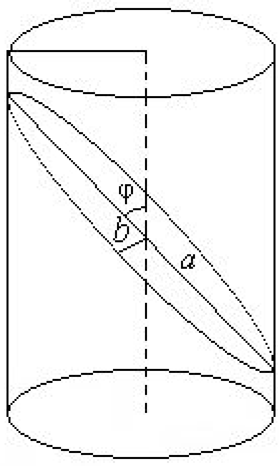


Рис. 5.3

Если основанием круглого цилиндра является окружность радиуса b, то в сечении этого цилиндра плоскостью, наклоненной к оси цилиндра под острым углом φ, будет эллипс, малая полуось которого равна b , большая полуось

$a = b/\sin\varphi$ (Рис.5.3).

Пример. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти его полуоси, эксцентриситет, директрисы.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду. Для этого разделим обе части уравнения на 225 и в знаменателе выделим полный квадрат. Получим уравнение: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$.

Полуоси эллипса равны a = 5, b = 3. Находим эксцентриситет эллипса. Вычислим $c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.

Эксцентриситет эллипса равен: $\varepsilon = c/a = 4/5 = 0,8$. Директрисы эллипса: $x = \pm\dfrac{5}{0,8} = \pm 6,25$.

Пример. Установить, какая это линия: $y = -7 + \dfrac{2}{5}\cdot\sqrt{16+6x-x^2}$.

Решение. К каноническому виду уравнение линии приводим с помощью алгебраических преобразований

$$(y+7)^2 = \frac{4}{25}\left(16+6x-x^2\right),\ 25(y+7)^2 = 4\left[-\left(x^2-6x+9-9\right)+16\right],$$

$$25(y+7)^2 + 4(x-3)^2 = 100,\ \frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+7)^2}{2^2} = 1.$$

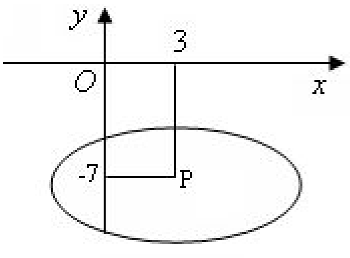


Рис.5.4

Из формулы (5.2) следует, что это эллипс с центром в точке P(3,–7) и полуосями a = 5, b = 2 (Рис.5.4).

5.3 Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Если оси декартовой системы координат выбраны так, что фокусы гиперболы располагаются симметрично относительно начала координат, то в этой системе уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5.3)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. Фокусы гиперболы имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

Прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы (Рис.5.5).

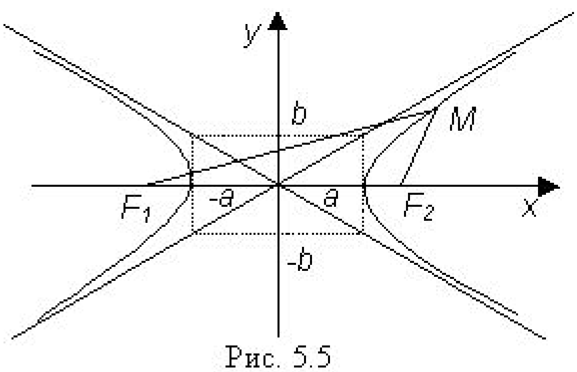


Рис. 5.5

Прямая L называется *асимптотой* неограниченной кривой K, если расстояние d от точки M кривой K до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой K от начала координат. Диагонали основного прямоугольника гиперболы являются асимптотами гиперболы.

Гипербола (5.5) имеет две асимптоты: $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$.

Число $\varepsilon = c/a$ называется эксцентриситетом гиперболы. Прямые $x = \pm\, a/\varepsilon$ называются ее директрисами.

Пример. Установить, какая это линия: $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

Решение. С помощью алгебраических преобразований приводим уравнение линии к каноническому виду:

$$16(x^2 - 4x + 4 - 4) - 9(y^2 + 6y + 9 - 9) = 161,$$
$$16(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 144.$$

Разделив обе части уравнения на 144 и выделив в знаменателе полный квадрат, получим каноническое уравнение гиперболы с центром в точке с координатами (2, − 3) и сторонами основного прямоугольника 2·3=6 и 2·4=8.

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}-\frac{(y+3)^2}{4^2}=1.$$

Кривая, определяемая уравнением $$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

также гипербола. Данная гипербола и гипербола (5.3) называются *сопряженными*.

Гипербола называется равносторонней, если ее полуоси равны $a = b$. Ее каноническое уравнение: $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = x$ и $y = -x$. Они являются биссектрисами координатных углов.

5.4 Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой *директрисой*.

Расстояние от фокуса $F(p/2,0)$ до директрисы называется параметром параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат $0xy$ так, чтобы ось $0x$ проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой. В выбранной системе координат фокус F имеет координаты $(p/2,\ 0)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\,p/2$.

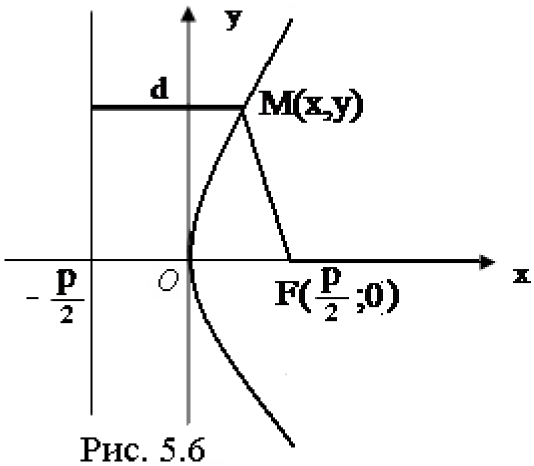


Рис. 5.6

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка параболы. Согласно определению параболы $d = MF$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, а $d = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$.

Приравниваем выражения и возводим обе части уравнения в квадрат. После преобразований получим каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \tag{5.4}$$

Пример. Установить, какая это линия $y = -\sqrt{-x}$.

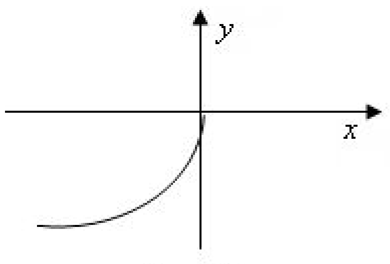


Рис.5.7

Решение. Областью определения функции $y = -\sqrt{-x}$ являются неположительные значения переменной x. Областью значения функции $y = -\sqrt{-x}$ являются неположительные значения переменной y. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим $y^2 = -x$. Это парабола. График функции изображен на Рис.5.7.

Задачи

1. Определить координату центра и радиус окружности $x^2+y^2-8x+6y=0$.
   Ответ: (4, –3); 5.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
   Ответ: $4x+3y+12=0$.
3. Через точку $M(0, -1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2 - 4y^2=12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.
   Ответ: (–4, –3).
4. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.
   Ответ: (2,4), (2, –4).

6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхность в пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Прямоугольная система координат $0xyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y, z – их координатами. Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты x, y, z которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$\mathrm{F}(x, y, z, x^2, y^2, z^2) = 0.$$

По заданному уравнению поверхности второго порядка можно определить ее геометрический вид с помощью метода сечений. Для построения поверхности второго порядка следует привести уравнение поверхности к каноническому виду. Получение канонического уравнения из общего достигается методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Форма и свойства поверхностей второго порядка устанавливаются с помощью метода параллельных сечений. Суть метода состоит в том, что поверхности пересекаются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, а затем по виду и свойствам получаемых в сечениях линий делается вывод о форме и свойствах самой поверхности.

Рассмотрим некоторые примеры поверхностей второго порядка.

1. *Цилиндрические поверхности.*

Поверхность, образованная движением прямой L, которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая каждый раз некоторую кривую K, называется *цилиндрической* поверхностью или цилиндром. При этом кривая K называется направляющей цилиндра, а прямая L – образующей цилиндра. Уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси $0z$, не содержит координаты z. Название цилиндра определяется названием его направляющей. Если направляющей служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6.1)$$

в плоскости $0xy$, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется эллиптическим цилиндром с образующими, параллельными оси $0z$. Если направляющей служит гипербола $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$,

то соответствующая цилиндрическая поверхность называется гиперболическим цилиндром с образующими, параллельными оси $0z$. Если направляющей служит парабола $y^2 = 2px$, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется параболическим цилиндром с образующими, параллельными оси $0z$. (Рис.6.1).

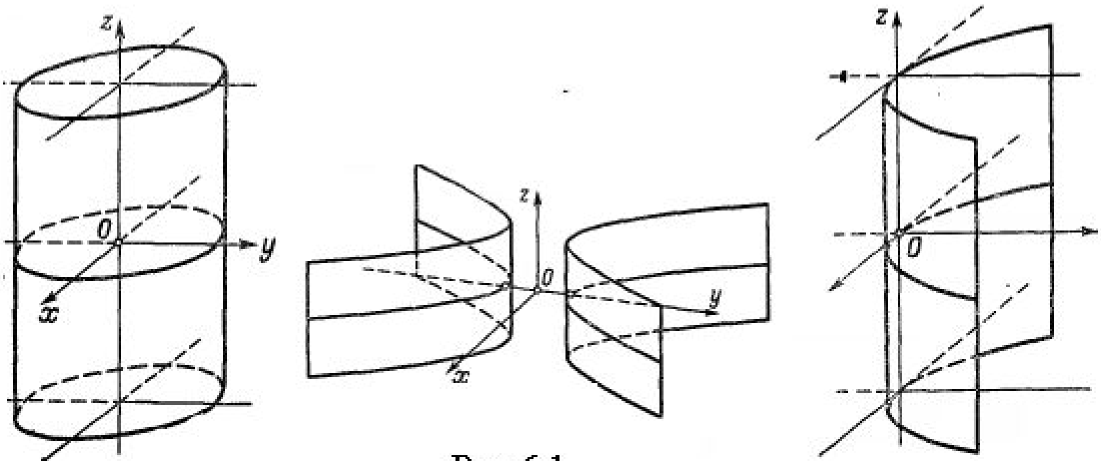


Рис.6.1

2. *Поверхности вращения. Конические поверхности*

Поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, называется *поверхностью вращения.*

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную плоскую линию L (не проходящую через P), называется конической поверхностью или *конусом*. В частности, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (6.2)$$

называется эллиптическим конусом второго порядка.

Например, вращая прямую $y = z$ вокруг оси Oz, получим поверхность вращения, которая называется конусом второго порядка. Если направляющей служит окружность, то получим уравнение кругового конуса $x^2 + y^2 = z^2$ (Рис. 6.2).

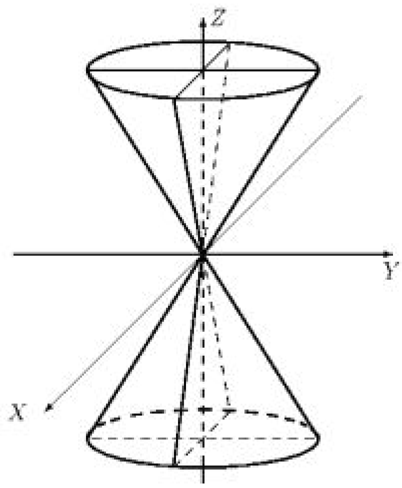


Рис. 6.2

3. *Канонические уравнения поверхностей второго порядка*

Уравнение *сферы* радиуса R с центром в точке $O(x_0, y_0, z_0)$ записывается в виде

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (6.3)$$

Уравнение (6.3) сферы радиуса R с центром в точке 0(0,0,0) примет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Поверхность, заданная уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (6.4)

называется *эллипсоидом* с полуосями a, b, c. Рассмотрим сечения поверхности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Сечения представляют собой эллипсы с полуосями a, b, c.

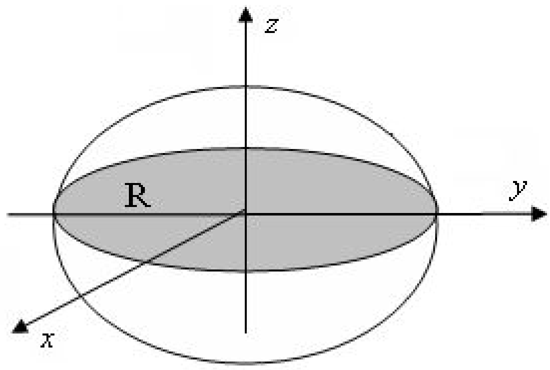


Рис.6.3

Поверхность (6.4) представляет собой замкнутую овальную поверхность. В частности, если все полуоси различны, то эллипсоид называют трехосным.

Если какие-либо две полуоси равны, то эллипсоид превращается в эллипсоид вращения, а если равны все три полуоси $a = b = c$, то это сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Уравнение *эллиптического параболоида* записывается в виде

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \cdot \qquad (6.5)$$

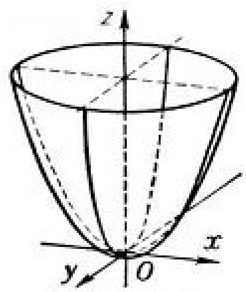


Рис.6.4

При пересечении поверхности координатными плоскостями $0xz$ и $0yz$ получаются соответственно параболы $z = x^2/(2p)$ и $z = y^2/(2q)$. При пересечении поверхности плоскостями, параллельными координатной плоскости xy, получаются эллипсы (Рис. 6.4).

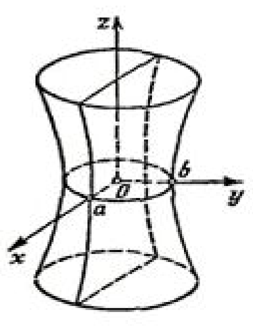


Рис. 6.5

Поверхность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (6.6)$$

называется *однополостным гиперболоидом* (Рис.6.5).

Пересекая поверхность (6.6) плоскостью $z = c$, получим эллипс. При возрастании $|c|$ полуоси эллипса будут увеличиваться.

Если пересекать поверхность (6.6) плоскостями $x = c$ или $y = c$, то в сечении получим гиперболы. Поверхность (6.6) имеет форму бесконечной расширяющейся трубки.

Двухполостный гиперболоид задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (6.7)$$

Поверхность состоит из двух полостей, имеющих форму выпуклых чаш (Рис.6.6).

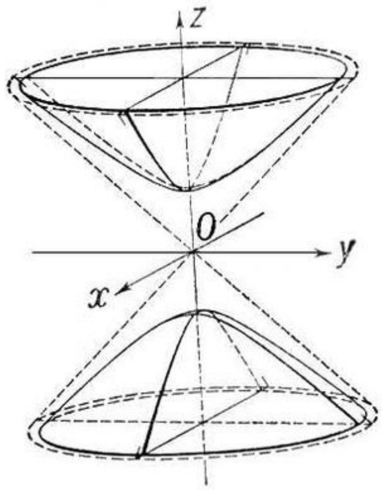


Рис.6.6

Гиперболический параболоид определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z. \qquad (6.8)$$

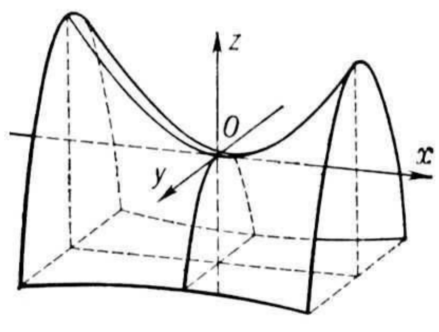


Рис. 6.7

Пересекая поверхность (6.8) плоскостями $x = c$, получим параболы, ветви которых направлены вниз. Анализ линии пересечения позволяет определить вид поверхности: она имеет вид седла (Рис.6.7).

Задачи

1. Построить тело, ограниченное поверхностями: $z=4-x^2, z=0, x^2+y^2=4$.
2. Построить тело, ограниченное поверхностями: $y = 5x$, $y = 0$, $x = 3$, $z = 0$.
3. Построить тело, ограниченное поверхностями: $2z = x^2+y^2$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $x = 0$, $y = 0$.
4. Построить тело, ограниченное поверхностями: $x^2+y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = x$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$
2. Вычислить комплексное число:
$$\frac{1+3i}{-2+i} \cdot (-2i) + 1.$$
3. Дана пирамида с вершинами $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$. Найти:
а) угол между ребрами A_1A_2 è A_1A_4;
б) объем пирамиды;
в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.
4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y - 1 = 0$ è $3x - y + 4 = 0$ параллельно прямой $4x + 2y - 13 = 0$.
5. Составить каноническое уравнение линии и построить ее график $9x^2 + 9y^2 + 42x - 54y - 95 = 0$.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11, \\ -7x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$
2. Вычислить комплексное число:
$$\frac{3+4i}{i} + \frac{4-i}{3+2i}.$$
3. Дана пирамида с вершинами $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$. Найти:
а) косинус угла между ребрами A_1A_2 è A_1A_4;
б) объем пирамиды;
в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

4. Даны последовательные вершины параллелограмма $ABCD: A(-2;5), B(2;7), C(-4;-3)$. Найти координаты четвертой вершины *D* и написать уравнение диагонали *BD*.
5. Составить каноническое уравнение линии и построить ее график $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Вычислить комплексное число:

$$\frac{(2+3i)\cdot(5-i)}{2+i}.$$

3. Дана пирамида с вершинами $A_1(-2;0;-4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$. Найти:

   а) угол между ребрами A_1A_2 è A_1A_4;

   б) объем пирамиды;

   в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$ è $x+2y-9=0$ параллельно прямой $2x+y+6=0.$

5. Составить каноническое уравнение линии и построить ее $x^2+y^2-2x+4y+4=0.$

Вариант 4

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

2. Вычислить комплексное число:

$$(1-2i)^3 - \frac{4i}{4-3i}.$$

3. Дана пирамида с вершинами $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0;-3)$, $A_3(5;2;6)$, $A_4(8;4;-9)$. Найти:

   а) угол между ребрами A_1A_2 è A_1A_4;

   б) объем пирамиды;

   в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-y=0$ è $x+3y-1=0$ перпендикулярно прямой $y=3-x.$

5. Составить каноническое уравнение линии и построить ее $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0.$

7. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

7.1 **Понятие функции**

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один, и только один элемент $y \in \mathrm{Y}$ называется *функцией* и записывается $y = f(x)$. Говорят, что функция f отображает множество X на множество Y (Рис.7.1.).

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

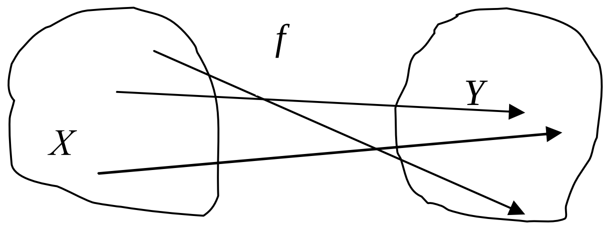


Рис.7.1

Переменная x называется *аргументом* или независимой переменной, а y – *функцией* или зависимой переменной от x. Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*. Иногда функциональную зависимость пишут в виде $y = y(x)$. Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают как $f(a)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y. Наиболее часто встречаются три способа задания функции: табличный, графический, аналитический.

1. Табличный. Функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Пример: тригонометрические таблицы и др.
2. Графический. Задается графиком функции.
3. Аналитический. Функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений. Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей*, если для любых значений x_1, x_2 из неравенства $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, т. е. бóльшему значению аргумента соответствует бóльшее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей*, если из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, здесь бóльшему значению аргумента соответствует мéньшее значение функции. Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное число T, что $f(x) = f(x+T)$. Число T называется периодом. Периодами будут также числа $n \cdot T$, где $n = \pm 1; \pm 2; \dots$. Основным периодом считается наименьший положительный период. Например, для функции $y = \sin x$ основным периодом является $T = 2\pi$.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси $0y$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$. Она называется *обратной* к функции $y = f(x)$. Любая строго монотонная функция имеет обратную функцию [6]. При этом, если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f[\varphi(x)]$, которая называется *сложной функцией*. Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

Основными элементарными функциями называют следующие функции:

1. *Степенная* функция $y = x^a$, где a – действительное число.
2. *Показательная* функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.
3. *Логарифмическая* функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.
4. *Тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg} x$, $y = \sec x = 1/\cos x$, $y = \mathrm{cosec}\, x = 1/\sin x$.
5. *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Функция, заданная одной формулой, составленная из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется *элементарной функцией*. Например: $y = (x^3+5)^{1/2}/x$.

К числу *алгебраических функций* относятся функции вида:

1. Целая рациональная функция или многочлен $y = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.
   В частности, $y = ax + b$ – линейная функция,
   $y = ax^2 + bx + c$ – квадратичная функция.
2. Дробно-рациональная функция
$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} .$$

При $m < n$ дробь правильная, при $m \geq n$ дробь неправильная.

3. Иррациональная функция - функция, содержащая радикалы.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной* (тригонометрическая, обратная тригонометрическая, показательная, логарифмическая).

Если каждому значению аргумента соответствует не одно, а несколько значений функции, то такая функция называется *многозначной*. В противном случае – функция *однозначная*.

7.2 Предел функции

Понятие предела имеет фундаментальное значение в математическом анализе. Под *числовой последовательностью* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, понимается функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots\}$.

Последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$. Число x_1 называется первым членом последовательности, x_2 – вторым, …, x_n – *общим членом последовательности*. Последовательность называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \leq M$. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех $n > N$ справедливо неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (7.1)$$

Обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$.

В геометрических терминах определение предела может быть сформулировано следующим образом [7]: число a есть предел последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, будут находиться в этой окрестности.

Сходящаяся числовая последовательность имеет только один предел. Предел постоянной величины равен самой постоянной. Последовательность не может иметь двух разных пределов. Не каждая последовательность имеет предел.

Пример. Пусть $x_1 = 1+1$, $x_2 = 1+1/2$, $x_3 = 1+1/3, \ldots x_n = 1+1/n$. Проверим, будет ли число $a = 1$ пределом последовательности.

Решение. Из определения предела имеем $|x_n - 1| = |(1+1/n) - 1| = |1/n|$, то есть, начиная с некоторого n такого, что $1/n < \varepsilon$ или $n > 1/\varepsilon$, неравенство (7.1) выполняется. Значит, $\lim x_n = 1$ при $n \to \infty$.

Теорема (Вейерштрасса). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Переменная x стремится к бесконечности, если для каждого наперед заданного положительного числа M можно указать такое значение x, начиная с которого $|x| > M$.

Если переменная стремится к бесконечности, то ее называют *бесконечно большой*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Число A называется *пределом функции* в точке x_0, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \tag{7.2}$$

Сформулируем геометрический смысл предела функции [6]: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

В определении предела функции считается, что x стремится к x_0 любым способом. Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому существует понятие одностороннего предела.

Если функция $y = f(x)$ стремится к пределу A_1 так, что x принимает значения меньше x_0, то предел A_1 называют *пределом функции слева* и обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$. Аналогично: если функция $y = f(x)$ стремится к пределу A_2 так, что x принимает значения больше x_0, то предел A_2 называют *пределом функции справа* и обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$. (Рис.7.2).

Пределы функции слева и справа называют *односторонними* пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$. Справедливо и обратное утверждение: если существуют односторонние пределы и они равны $A_1 = A_2$, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

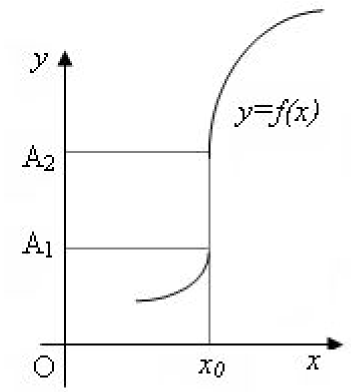


Рис.7.2

Если $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Если $x_0 = 0$, то обозначают $x \to -0$, то есть слева; $x \to +0$, то есть справа.

Для существования предела функции в точке x_0 необязательно, чтобы функция была определена в точке x_0.

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$

Решение. Функция не определена при $x = 2$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right| < \varepsilon$, при $|x-2| < \delta$. Преобразуем

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| = \left|\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}-4\right| = |(x+2)-4| = |x-2| < \varepsilon .$$

Значит, при $x \to 2$ предел функции равен 4.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной*, если существует положительное число M такое, что $|f(x)| < M$. Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной, так как $|\sin x| \le 1 = M$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то функция является ограниченной при $x \to x_0$.

Действительно, по условию $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, а это значит, что при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ или $|f(x)| < |A| + \varepsilon$, а это означает, что функция ограничена.

Если функция $y = f(x)$ ограничена и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, то функция $1/y$ также является ограниченной при $x \to x_0$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Всякая бесконечно большая функция в окрестности точки x_0 является неограниченной.

7.3 Бесконечно малые и их свойства

Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Если $\alpha = \alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$, то $1/\alpha$ стремится к бесконечности.

Действительно, для $\forall M$ – большого числа выполняется $1/|\alpha| > M$, когда $|\alpha| < 1/M$. Но так как $\alpha \to 0$, то, начиная с некоторого α, это условие выполняется.

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Покажем для двух бесконечно малых. Пусть $u(x) = \alpha(x)+\beta(x)$ и $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$. Это значит, что при $x \to x_0$ $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$, $|\beta(x)| < \varepsilon/2$. Тогда $|u(x)| = |\alpha(x)+\beta(x)| \le |\alpha(x)|+|\beta(x)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $z = z(x)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция.

По условию $|z| < M$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $|\alpha| < \varepsilon/M$. Тогда $|\alpha \cdot z| < (\varepsilon/M)M = \varepsilon$.

Теорема 3. Если функцию $y(x)$ можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции α, то есть $y = b + \alpha$, то число b является пределом функции $y(x)$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = b$. Обратно, если функция $y(x)$ имеет предел, равный b: $\lim\limits_{x \to x_0} y(x) = b$, то ее можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции [8] $y = b + \alpha$, где b – const, α – бесконечно малая величина.

Теорема 4. Произведение бесконечно малой функции на число есть бесконечно малая. Если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, и c – const, то $\lim\limits_{x \to a} c\alpha = 0$.

Если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ – бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Пусть бесконечно малые величины α, β являются функциями одного и того же аргумента x и стремятся к нулю при $x \to x_0$.

Если отношение β/α имеет конечный и не равный нулю предел, то бесконечно малые величины α и β называются *бесконечно малыми одного порядка*.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0 .$$

Если отношение β/α стремится к нулю, то β называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем бесконечно малая α.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 0 .$$

Бесконечно малая β называется *бесконечно малой к-го порядка* относительно бесконечно малой α, если β и α^k бесконечно малые одного порядка, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0 .$$

Если предел отношения β/α стремится к единице, то бесконечно малые величины α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми*.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 .$$

Примеры эквивалентных функций при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$ $\quad$ $\operatorname{tg} x \sim x$ $\quad$ $e^{ax} - 1 \sim ax$ $\quad$ $1 - \cos x \sim x^2/2$

$\arcsin x \sim x$ $\quad$ $\operatorname{arctg} x \sim x$ $\quad$ $\ln(1+x) \sim x$ $\quad$ $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$

Сформулируем основные теоремы о бесконечно малых функциях.

Теорема 5. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Теорема 6. Разность двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Теорема 7. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg3x}$.

Решение. Так как $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x+5x^3}$.

Решение. Поскольку $\sin 3x \sim 3x$, а $2x + 5x^3 \sim 2x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x+5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. В приводимых теоремах будем считать, что аргумент x стремится к числу x_0 и указанные пределы существуют. Заменим $u_1(x) = u_1$, …, $u_n(x) = u_n$.

Теорема 8. Предел алгебраической суммы двух и более функций равен алгебраической сумме пределов этих функций.

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_n.$$

Покажем это. Пусть $n = 2$. По теореме о связи предела функции и бесконечно малой запишем: $u_1 = a_1+\alpha_1$, $u_2 = a_2+\alpha_2$, где $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$.

Тогда $\lim (u_1+u_2) = \lim (a_1+\alpha_1+a_2+\alpha_2) = \lim (a_1+a_2+\alpha_1+\alpha_2) = a_1+a_2 = \lim u_1+\lim u_2$.

Например: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=1+0=1.$

Теорема 9. Предел произведения двух и более функций равен произведению пределов этих функций.

$$\lim (u_1\cdot u_2\cdot \ldots\cdot u_n) = \lim u_1\cdot\lim u_2 \cdot\ldots\cdot\lim u_n.$$

Пусть $n=2$. Запишем $u_1 = a_1+\alpha_1$, $u_2 = a_2+\alpha_2$, $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Выразим $u_1\cdot u_2 = (a_1+\alpha_2)\cdot(a_2+\alpha_2) = a_1\cdot a_2+a_1\cdot\alpha_1+a_2\cdot\alpha_1+\alpha_1\cdot\alpha_2$. Тогда $\lim (u_1\cdot u_2) = a_1\cdot a_2 = \lim u_1\cdot\lim u_2$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim cu_1 = \lim c\cdot\lim u_1 = c\cdot\lim u_1$.

Например: $\lim\limits_{x\to 3} 5\cdot x^2 = 5\cdot\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 45.$

Теорема 10. Предел частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$ при $x\to a$ равен частному пределов этих функций.

$$\lim_{x\to a}\frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x\to a} u}{\lim\limits_{x\to a} v}, \text{ если } \lim_{x\to a} v \neq 0.$$

Так как $u = a+\alpha$, $v = b+\beta$. Вычислим

$$\frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{ab+\alpha b-ab-a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b-a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{a}{b}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u}{v} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{a+\alpha}{b+\beta} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} u}{\lim\limits_{x\to a} v}$, если $\lim\limits_{x\to a} v \neq 0$.

Пример. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+3)} = \dfrac{2}{3}.$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4.$

Теорема 11. Если $\varphi(x) < f(x) < g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

7.4 Замечательные пределы

Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел, называемый *первым замечательным пределом* (7.3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (7.3)$$

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице.

Возьмем круг радиуса $OA=1$, обозначим радианную меру угла $< MOA$ через x. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На окружности отметим произвольно точку $M(x,y)$. Из этой точки проведем радиус и опустим перпендикуляр MB на ось $0x$. Соединим точку M с точкой A, лежащей на окружности и оси $0x$. Рассмотрим площади фигур. Из (Рис.7.3) видно, что

$$S(\Delta OMA) < S(\text{сект}OMA) < S(\Delta OCA).$$

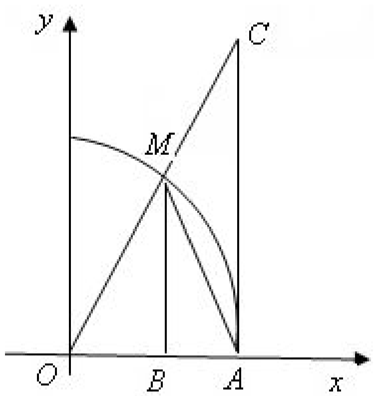


Рис. 7.3

На основании формул элементарной геометрии получаем

$$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot MB<\frac{1}{2}\cdot OA^{2}\cdot x<\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AC$$

Так как $MB = \sin x$, $AC = \operatorname{tg} x$, $OA = 1$, получаем

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

Разделив все члены двойного неравенства на положительную величину $\sin x$, получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

или

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ заключена между двумя функциями, имеющими общий предел, равный 1.

Переходя к пределу в двойном неравенстве, получим формулу первого замечательного предела (7.3).

Формула (7.3) справедлива и при $x < 0$.

Первый замечательный предел позволяет разрешить неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Примеры. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 0}=1\cdot 1=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin^{2}\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1\cdot 0=0.$

Второй замечательный предел. Число e

Рассмотрим последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \tag{7.4}$$

где n – натуральное число. Придавая n неограниченно возрастающие значения и вычисляя соответствующие значения (7.4), можно составить таблицу (Таблица 7.1):

Таблица 7.1

n	1	2	10	100	1000	10000	…
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718	…

Из таблицы (7.1) видно, что последовательность (7.4) возрастающая. И с возрастанием значений n выражение (7.4) изменяется медленнее и стремится к некоторому пределу, приближенно равному 2,718.

Числом e называется предел последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (7.5)$$

Иррациональное число e примерно равно $e \cong 2{,}7182$.

Формулу (7.5) используют и при $x \to 0$, где x – произвольное число, не равное нулю [7].

Полагая $\dfrac{1}{x}=\alpha$, будем иметь $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$. (7.6)

Равенства (7.5) и (7.6) называют *вторым замечательным пределом*. Второй замечательный предел позволяет разрешить неопределенность вида $[1^{\infty}]$.

Например,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^x = \left|1^{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{6}\cdot\frac{6}{x-2}\cdot x} = \ell^6.$$

7.5 Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности с центром в точке x_0. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (7.7)$$

Можно дать другое определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Приращением переменной величины называется разность между новым значением этой величины и ее прежним значением.

Дадим аргументу x приращение Δx: $\Delta x = x - x_0$. Тогда функция y тоже получает приращение Δy: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Равенство (7.7) в новых обозначениях запишется в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0. \qquad (7.8)$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в этой точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (7.8), т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Равенство (7.8) можно записать в другом виде:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, но $x_0 = \lim\limits_{x\to x_0} x$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$.

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции при $x \to x_0$ необходимо в выражение функции подставить вместо x его предельное значение x_0.

Пример. Доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна в произвольной точке x_0.

Решение. Имеем $f(x_0) = y_0 = x_0^2$, $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$, тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta y) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((x_0+\Delta x)^2 - (x_0)^2\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 0$, что и доказывает непрерывность данной функции в произвольной точке x_0.

Теорема 1. Сумма двух непрерывных в точке x_0 функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, есть функция непрерывная.

Действительно: так как функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то, по определению непрерывности, $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f_1(x) + f_2(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0).$$

Теорема 2. Произведение и частное непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, при которых делитель равен нулю).

Теорема 3. Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Основные элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции.

Различают разрывы первого и второго рода. Точка разрыва $x=x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$. При этом, если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва. Если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва. Величину $|A_1 - A_2|$ называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода.

Если функция $f(x)$ такова, что предел ее в точке x_0 слева или справа равен бесконечности или не существует, то точка $x=x_0$ называется *точкой разрыва второго рода*.

Функция называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и на его концах.

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их без доказательств.

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Теорема (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

Примеры.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2-x-1}$. *Ответ*: 0.

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. *Ответ*: 0,5.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. *Ответ*: – 1/16.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$. *Ответ*: ∞.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{x}$. *Ответ:* 4.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$. *Ответ*: 2.

7. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$. *Ответ*: $e^{-\frac{1}{3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. *Ответ:* 1.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$. *Ответ:* 1/4.

10. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. *Ответ*: cos a.

8. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

8.1 Производная функции

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении задач математики, физики, других науках, а также при изучении скорости разных процессов.

Рассмотрим материальную точку, которая движется неравномерно по прямой. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние S. Это расстояние зависит от истекшего времени. Равенство $S = S(t)$ называют законом движения точки. Перемещение точки за время Δt будет $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$. Отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения точки за время Δt. Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется мгновенной скоростью

$$V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (8.1)$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на некотором интервале (a,b). Дадим приращение Δx аргументу x. Найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента и найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$. Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов:

f_x'; $f'(x)$; y'; y'_x.

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x=x_0$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (8.2)$$

Функция $y=f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала (a,b) называется *дифференцируемой* в этом интервале. Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Пример. Найти производную функции $y = x^2$. Вычислить $y'(3)$.

Решение. Находим производную функции по определению (8.2)

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x.$$

Подставим $x = 3$ в полученную производную: $y'(3) = 2{\cdot}3 = 6$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x=x_0$, то она непрерывна в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Запишем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то есть $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$. Отсюда следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной. К примеру, $y = \sqrt[3]{x}$ непрерывна на всей числовой прямой, а производная $y' = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$ не существует при $x = 0$.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a,b), то функция называется гладкой.

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t. В этом заключается *механический* смысл производной

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = S_t'(t) = \mathrm{v}(t).$$

Обобщая, можно сказать, что если функция $y=f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ее производная есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит *физический* смысл производной [8].

Рассмотрим график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в точке $M_0(x_0,y_0)$ невертикальную касательную. Тангенс угла φ наклона касательной с осью $0x$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ равен

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Угловой коэффициент касательной k равен $k = \mathrm{tg}\,\varphi$. Геометрический смысл производной заключается в том, что производная $f'(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом, имеет вид: $y - y_0 = k\cdot(x - x_0)$. Тогда можно записать *уравнение касательной*

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется нормалью к кривой [10]. Из условия перпендикулярности прямых (4.6) *уравнение нормали* запишем в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0). \qquad (8.3)$$

8.2 Производные основных элементарных функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению бывает затруднительно. На практике функции дифференцируют с помощью правил и формул. Производные функций x^n, $\sin x$, $\cos x$ вычислим по определению производной.

Производная степенной функции $y = x^n$, где n – целое положительное число. По определению производной имеем

$$\left(x^n\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+\frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x}{1}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2}{1\cdot 2}+\ldots+(\Delta x)^n-x^n}{\Delta x} = n\cdot x^{n-1}$$

$$\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}. \qquad (8.4)$$

Пример. Вычислить производную функции $y=\sqrt[3]{x}$.

Решение. По формуле (8.4) имеем $y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$.

Производная функции y = sin x. По определению производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (8.5)$$

Найдем производную функции y = cos x. По определению производной:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (8.6)$$

Формулы дифференцирования

Найдем производную суммы, разности, произведения, частного функций. Пусть $u(x)$, $v(x)$ – некоторые дифференцируемые на (a,b) функции и c – const.

Производная *постоянной* c равна нулю $c'=0$.

Действительно, так как c – const, то $\Delta y=0$. Значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$.

Производная суммы (разности) *двух функций* равна сумме (разности) производных этих функций.

Найдем производную суммы двух функций. По определению производной

$$(u+v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u+\Delta u+v+\Delta v-u-v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$(u\cdot v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot v+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v\right)=u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v=u\cdot v'+u'\cdot v=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Производная частного двух функций равна дроби, числитель которой равен разности произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя (знаменатель дроби не равен нулю):

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Примеры. Вычислить производную функций:

1. $y=\frac{\sin x}{x^2}$.

$$y'=\frac{(\sin x)'\cdot x^2-\sin x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{\cos x\cdot x^2-2x\cdot\sin x}{x^4}.$$

2. $y=e^x\cdot\arcsin x$.

$$y'=(e^x)'\cdot\arcsin x+e^x\cdot(\arcsin x)'=e^x\cdot\arcsin x+e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=e^x\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производная сложной и обратной функции

Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, тогда $y=f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема 1. Если функция $u=\varphi(x)$ имеет в некоторой точке производную $u'(x)$, а функция $y=f(u)$ в этой же точке имеет производную

y'_u, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ в этой же точке имеет производную $y'_x=y'_u\cdot u'_x$, то есть производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

Примеры. Найти производные функций:

1. $y = \cos x^2$. $\quad y' = -\sin x^2\cdot(x^2)' = -2x\cdot \sin x^2\cdot$.

2. $y = \cos^2 x$. $\quad y' = 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x) = -\sin 2x$.

3. $y = tg\sqrt{x}$. $\quad y' = \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ строго монотонна на интервале (a,b) и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в этой точке, определяемую равенством $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Найдем производные основных элементарных функций:
$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Для нахождения производной функций $y = \operatorname{tg} x$ воспользуемся формулой производной частного:

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично получаем $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Для нахождения производной показательной функции $y = a^x$ прологарифмируем ее. Получим, по свойству логарифма, $\ln y = x\cdot\ln a$. Дифференцируем обе части уравнения. Слева вычисляем производную сложной функции, а справа используем правило вычисления производной произведения:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = x'\cdot\ln a + x\cdot(\ln a)' = \ln a.$$

Выразим y': $\quad y' = \left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln a$.

В частности, $\left(e^x\right)' = e^x$, поскольку $\ln e = 1$.

Найдем производную логарифмической функции $y = \log_a x$. Так как обратной для нее функцией является $x = a^y$, то по формуле производной обратной функции имеем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\left(a^y\right)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Производную функции $y = \arcsin x$ находим через производную обратной ей функции $x = \sin y$: $x' = \cos y$. Тогда

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\left(\sin y\right)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично получаем производную функции $y = \arccos x$:

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Найдем производную функции $y = \mathrm{arctg}\, x$. Она является обратной к функции $x = \mathrm{tg}\, y$: $x' = 1/\cos^2 y$.

По определению обратной функции и правилу вычисления ее производной получаем

$$y' = \frac{1}{\left(tgy\right)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Для функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$ ее производная равна $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Производная неявной функции

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то функция задана в явном виде. Под *неявным заданием* функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x,y) = 0$, не разрешенного относительно y. Для нахождения производной от y по x достаточно продифференцировать обе части уравнения по известным правилам, а затем полученное уравнение разрешить относительно y_x'.

Пример. Вычислить производную функции $x^2 + y^2 + \sin y + 3 = 0$.

Решение. Дифференцируем обе части уравнения: $2x + 2y \cdot y' + \cos y \cdot y' = 0$. Алгебраически выражаем производную из полученного выражения: $y'\left(2y + \cos y\right) = -2x$ или $y' = -\frac{2x}{2y+\cos y}$.

Производная параметрически заданной функции

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (8.7)$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром. Найдем производную y'_x, считая, что функции (8.7) имеют производные, а функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции имеем $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$. Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (8.7), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. После подстановки получаем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8.8}$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример. Пусть $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение. Имеем $x'_t=2$, $y'_t=2t$. Следовательно, из (9.7), $y'_x= t$.

Объединим правила и формулы дифференцирования:

Правила дифференцирования

1. $c' = 0$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(u\pm v)' = u'\pm v'$
4. $(uv)' = u'v+uv'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$
6. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$
7. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$

Формулы дифференцирования

1. $\left(u^n\right)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

   $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{u}}\cdot u'$.

   $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$.

2. $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$.
3. $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$.

   $\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.

7. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
8. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

   $\left(e^u\right)' = e^u\cdot u'$.

9. $\left(a^u\right)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$.

4. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

5. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

6. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

10. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{1}{\ln a} \cdot u'$.

$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

Задачи

Вычислить производные $y'(x)$ следующих функций:

1. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. *Ответ*: $-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

2. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$. *Ответ*: $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{2x}\right)^2}$.

3. $y = \sin(\sin x)$. *Ответ*: $\cos(\sin x)\cos x$.

4. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

5. $y = \ln arctg\sqrt{1+x^2}$. *Ответ*: $\dfrac{x}{arctg\sqrt{1+x^2}\left(2+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

6. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$. *Ответ*: $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

7. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. *Ответ*: $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

8. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$. *Ответ*: $-\dfrac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$.

9. $y = \ln\dfrac{1-e^x}{e^x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{e^x-1}$.

10. $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

11. $y = x + arctgy$. *Ответ*: $\dfrac{1+y^2}{y^2}$.

12. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ *Ответ*: $\dfrac{1-tgt}{1+tgt}$.

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается y'' или $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{dy'}{dx}$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' или $f'''(x)$… Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го называется производная от производной $(n – 1)$ порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*. При их вычислении пользуются свойствами и формулами нахождения производной первого порядка, рассматривая их как производную от производной [9].

Пример. Вычислить производную третьего порядка функции $y = \sqrt{x}$.

Решение. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $y''' = \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Первая производная находится по формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$. Найдем вторую производную от функции, заданной параметрически:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \qquad (8.9)$$

Производную y''_{xx} можно найти по преобразованной формуле (8.9)

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

8.3 Дифференциал функции

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную. Из определения производной функции $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$ и по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции следует, что приращение функции равно: $\Delta y \cong f\,'(x)\cdot\,\Delta x + \alpha(x)\cdot\,\Delta(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина.

Приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых, являющихся бесконечно малыми при $\Delta(x)\to 0$. Первое слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ называют *главной частью приращения* функции Δy. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения и обозначается dy

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x. \tag{8.10}$$

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (8.10) можно записать так:

$$dy = f\,'(x)\,dx,$$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Основные свойства дифференциала легко получить, используя связь дифференциала и производной. Например, так как производная постоянной c равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dc = 0$.

Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u+v) = du+dv,$$
$$d(uv) = du\cdot v + u\cdot dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du\cdot v - u\cdot dv}{v^2},\ \ v\neq 0.$$

Геометрический смысл дифференциала функции: дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к кривой в точке x, когда x получит приращение Δx.

В приближенных вычислениях любой дифференцируемой функции часто используют то, что $\Delta y \cong dy$. Из равенства $\Delta y \cong f\,'(x)\cdot\,\Delta x + \alpha(x)\cdot\,\Delta(x)$ получаем формулу

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x. \tag{8.11}$$

Равенство это тем точнее, чем меньше Δx. Формула (8.11) используется для приближенного вычисления значений функций.

Пример. Вычислить приближенно arctg 1,1.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)$ = arctg x. По формуле (8.11) имеем $\quad \mathrm{arctg}\,(x + \Delta x) \approx \mathrm{arctg}\,x + (\mathrm{arctg}\,x)'\cdot\Delta x$

или

$$arctg(x+\Delta x)\approx arctgx+\frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Так как $x+\Delta x \approx 1{,}1$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получаем:

$$arctg1{,}1\approx arctg1+\frac{0{,}1}{1+1}=\frac{\pi}{4}+0{,}05\approx 0{,}835.$$

Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема (Ролля). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема во всех внутренних точках отрезка, а на концах $x = a$, $x = b$ обращается в нуль $f(a) = f(b) = 0$, то внутри отрезка $[a,b]$ существует по крайней мере одна точка $x = c$ такая, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.

Докажем это. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Пусть $max\ f(x) = M$, $min\ f(x) = m$.

Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и тогда ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a, b]$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одного из значений M или m во внутренней точке c интервала (a,b), так как $f(a) = f(b)$.

Пусть $f(c) = M$, тогда $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ при $\forall\ \Delta x$. Тогда

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0 \text{ при } \Delta x<0 \text{ и}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0 \text{ при } \Delta x>0.$$

Но это возможно лишь при

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)=0.$$

Доказанная теорема остается справедливой и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка $[a,b]$ принимает равные значения $f(a) = f(b)$.

Теорема (Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках отрезка, то внутри отрезка $[a, b]$ существует по крайней мере одна точка $x = c$ такая, в которой выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$

Доказательство. Пусть $Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\cdot Q$.

Эта функция непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема во всех внутренних точках отрезка. По теореме Ролля существует, по крайней мере, одна точка c такая, что $F'(c) = 0$.
Но $F'(x) = f'(x) - Q$, $f'(c) - Q = 0$, $F'(c) = f'(c) - Q = 0$, откуда

$$f'(c) = Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Значит, $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Теорема (Коши). Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ две функции, непрерывные на отрезке [a,b], дифференцируемы во всех внутренних точках, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Пусть $Q = \dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$. Составим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)]$. Функция $F(x)$ непрерывна на [a,b] и дифференцируема внутри [a, b]. Тогда, по теореме Ролля, существует точка $x = c$ такая, что $F'(c) = 0$.

$F'(c) = f'(c) - Q \cdot \varphi'(c) = 0$, откуда $Q = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема. (*Правило Лопиталя* раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$).
Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0.

Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \ . \qquad (8.12)$$

Возьмем на [a, b] любую точку x такую, что $x \neq x_0$. Применим теорему Коши

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ где } \xi \in (a, x).$$

Так как по условию $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$.

Если $x \to x_0$, то $\xi \to x_0$, так как $\xi \in (a, x)$. И если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A$.

Если $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и выполняются все условия, наложенные на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то правило Лопиталя можно применять несколько раз [10].

Теорема.(Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$.

Пусть $\varphi'(x)\neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A .$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5}{3}$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - \sin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(tgx-x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)'}{(\cos^2 x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x(-\sin x)} = \frac{1}{2}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти пределы функций:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-1},$$

$$б)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}.$$

2. Для данной функции найти точки разрыва и построить график:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \sin x, & -\pi \le x < 0, \\ \pi, & x \ge 0. \end{cases}$$

3. Найти производную функции $y'(x)$:

$$y = arctg^2 \ln\frac{x}{x+1}.$$

4. Найти производную $y'(x)$ неявной функции:

$$\sin(x-y)+\frac{x^3}{y}=5x.$$

5. Найти производную y'_x параметрической функции:

$$\begin{cases} x=e^{-t}\cdot\cos t, \\ y=e^{t}\cos t. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти пределы функций:

$$а)\ \lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^3-x^2-8x-4},$$

$$б)\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}.$$

2. Для данной функции найти точки разрыва и построить график:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ (x+1)^2, & 0\le x<2, \\ -x+4, & x\ge 2. \end{cases}$$

3. Найти производную функции $y'(x)$:

$$y=\sqrt[3]{\sin^2\left(\frac{x+1}{x}\right)}.$$

4. Найти производную $y'(x)$ неявной функции:

$$e^{xy}+\frac{y}{x}=\sin 5x.$$

5. Найти производную y'_x параметрической функции:

$$\begin{cases} x=\cos t+\sin t, \\ y=\sin t-t\cdot\cos t. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти пределы функций:

$$а)\ \lim_{x\to1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3},$$

$$б)\ \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

2. Для данной функции найти точки разрыва и построить график:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^3, & 0\le x<2,\\ 3, & x\ge 2.\end{cases}$$

3. Найти производную функции $y'(x)$:

$$y=tg^6\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x}}\right).$$

4. Найти производную $y'(x)$ неявной функции:

$$x^3y^2-\frac{x+1}{y}=\arcsin 4x.$$

5. Найти производную y'_x параметрической функции:

$$\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t},\\ y=\dfrac{t-1}{t}.\end{cases}$$

Вариант 4

1. Найти пределы функций:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9},$$

$$б)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

2. Для данной функции найти точки разрыва и построить график:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x<-\dfrac{\pi}{2},\\ 2\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

3. Найти производную функции $y'(x)$:

$$y=\arcsin^2\frac{x}{x-3}.$$

4. Найти производную $y'(x)$ неявной функции:

$$\frac{y-2}{x^3}-tg(x+5y)=3x..$$

5. Найти производную y'_x параметрической функции:

$$\begin{cases}x=e^t\cdot\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$$

9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Для того, чтобы вычислить значения функции $y = f(x)$, ее заменяют многочленом $P_n(x)$ степени n, значения которого легко вычислить. Обоснование возможности представлять функцию многочленом дает формула Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ есть многочлен $P_n(x)$ степени n. И пусть функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$ порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x = a$. Тогда можно найти многочлен степени не выше n такой, что

$$P_n(a) = f(a);\ P_n'(a) = f'(a);\ \ldots P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \qquad (9.1)$$

Определим $P_n(x)$ в виде многочлена степени n:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n. \qquad (9.2)$$

Для нахождения коэффициентов C_i продифференцируем n раз равенство (10.2)

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2\cdot(x-a) + \ldots + n\cdot C_n\cdot(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = 2\cdot1\cdot C_2 + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot C_n\cdot(x-a)^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot C_n. \end{cases} \qquad (9.3)$$

Подставляем $x = a$ в (9.2) и (9.3), тогда получим

$$\begin{cases} f(a) = P_n(a) = C_0, \\ f'(a) = P_n'(a) = C_1, \\ f''(a) = P_n''(a) = 2\cdot1\cdot C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot C_n = n!\cdot C_n. \end{cases}$$

Выразим коэффициенты C_i.

$$C_0 = f(a), C_1 = f'(a), C_2 = \frac{f''(a)}{1\cdot2}\ldots, C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Подставляем найденные значения $C_1, C_2, \ldots C_n$ в равенство (9.2):

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1}\cdot(x-a) + \frac{P_n''(a)}{1\cdot2}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n. \qquad (9.4)$$

Формула (9.4) называется *формулой Тейлора для многочлена степени* n.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Формула Тейлора позволяет, при определенных условиях, приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку этого приближения.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и имеет в ней производные до $(n+1)$ порядка включительно, то для любого x из этой окрестности справедлива формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + R_n(x), \quad (9.5)$$

которая называется *формулой Тейлора для функции* $f(x)$. Формулу (9.5) можно записать в виде $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

называется *многочленом Тейлора*, а $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\xi)$ называется *остаточным членом* формулы Тейлора, записанным *в форме Лагранжа*. Число ξ заключено между x и a.

Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, которая равна значению остаточного члена $R_n(x)$.

Если в формуле Тейлора (9.4) положить $a = 0$, то получим частный случай формулы Тейлора – *формулу Маклорена*.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\cdot x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + R_n(x), \quad (9.6)$$

где $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\theta x)$, $(0 < \theta < 1)$.

Разложение по формуле Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.

Получим разложение функции $f(x) = e^x$ по формуле Маклорена. Для этого найдем производные функции: $(e^x)' = e^x$, $(e^x)'' = e^x$, … $(e^x)^{(n)} = e^x$.
Вычислим значение функции, а также ее производные при $x = 0$.
Так как $f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^0 = 1$, $f''(0) = e^0 = 1$, …, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, то по формуле (9.6) получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид: $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}$.

Разложение функции $y = \sin x$ по формуле Маклорена имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{x^n}{n!} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot n) + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})$ остаточный член в форме Лагранжа.

Разложение функции $f(x) = \cos x$ по формуле Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^n}{n!} \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot n) + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \cos(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})$ остаточный член в форме Лагранжа.

Для функции $y = \ln(1+x)$ имеем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

Пример. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ по степеням $(x-1)$, используя формулу Тейлора.

Решение. По условию многочлен степени $n = 4$ и $a = 1$. Находим: $P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 10x - 4$, $P''(x) = 12x^2 - 6x + 10$, $P'''(x) = 24x - 6$, $P'''' = 24$. Учитывая, что $P(1) = 2$, $P'(1) = 7$, $P''(1) = 16$, $P'''(1) = 18$, $P'''' = 24$, используем формулу разложения многочлена по формуле Тейлора (9.4)

$$P_4(x) = P_4(1) + \frac{P_4'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{P_4''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{P_4'''(1)}{3!}(x-1)^3 ... + \frac{P_4^{(4)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^4.$$

Получаем окончательно:

$$P(x) = 2 + 7(x-1) + 8(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4 = x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1.$$

Пример. Написать формулу Тейлора для функции $y = \sqrt{x}$ при $a = 1$, $n = 3$.

Решение. Находим $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $y''' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

Вычисляем $y(1) = 1$, $y'(1) = 1/2$, $y''(1) = -1/4$, $y'''(1) = 3/8$,
$R_4(x) = (3/8) \cdot (-7/2) \cdot (x-1)^4$.

Используем формулу Тейлора (9.4)

$$y = y(1) + \frac{f'(1)}{1} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{1 \cdot 2} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 + R_4(x).$$

Получаем окончательно:

$$\sqrt{x} = 1 + \cdot(x-1) - \frac{1}{8} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{16} \cdot (x-1)^3 + R_4(x),$$

Задачи

1. Разложить многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ по степеням $x - 4$.
   Ответ: $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.

2. Найти число e с точностью до 0,001. *Ответ*: $e \approx 2{,}718$.

10. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема (*необходимые условия*). Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y=f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ для $\forall x\in(a, b)$.

Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, b). Тогда $f(x+\Delta x)-f(x)>0$ при $\Delta x>0$ и $f(x+\Delta x)-f(x)<0$ при $\Delta x<0$. В обоих случаях $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$, значит, $\lim\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$, то есть $y'(x)\geq 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ убывает на интервале (a, b).

Теорема (*достаточные условия*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) и $f'(x)>0$, $(f'(x)<0)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a, b).

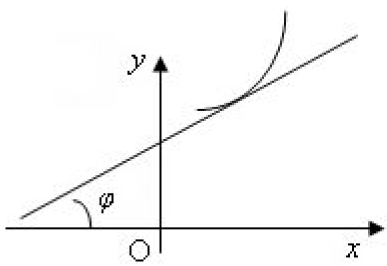


Рис. 10.1

Пусть $f'(x)>0$. Возьмем точки x_1 и x_2 из интервала (a, b). Используем теорему Лагранжа: $f(x_2)-f(x_1)=f'(\zeta)\cdot(x_2-x_1)$, $x_2>x_1$, $f'(\zeta)>0$, значит, $f(x_2)-f(x_1)>0$ или $f(x_2)>f(x_1)$, то есть функция возрастает.

Геометрическая интерпретация этого факта заключается в том, что если функция возрастает, то $f'(x)=tg\varphi>0$, то есть угол φ острый (Рис.10.1).

Пример. Определить область возрастания функции $y=x^3$.

Решение. Производная $y'=3x^2$ неотрицательна для любого значения x. Значит, функция возрастает при любом значении x. Рис.10.2.

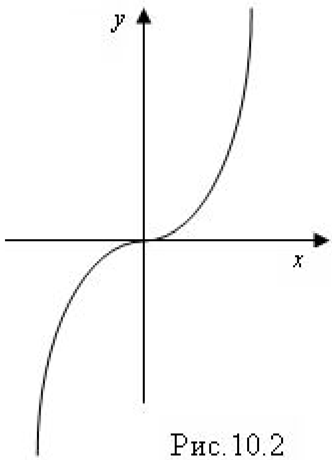


Рис.10.2

Максимум и минимум функций

Точка x_1 называется *точкой максимума* функции $y=f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_1, что для всех $x\neq x_1$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_1)$.

Точка x_1 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_1, что для всех $x \neq x_1$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_1)$.

Максимумы и минимумы функции называют *экстремумами* функции.

Теорема (*необходимое условие существования экстремума*). Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум или минимум, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_1) = 0$.

Пусть функция $y=f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум. Тогда $f(x_1+\Delta x) - f(x_1) < 0$. Но при $\Delta x > 0$ дробь $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} < 0$, а при $\Delta x < 0$ она $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} > 0$. По определению производной имеем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

Но это возможно, если $f'(x_1)=0$. Аналогично доказывается утверждение теоремы, если x_1 – точка минимума.

Если при всех рассматриваемых значениях аргумента x функция $f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум (максимум или минимум) только при тех значениях аргумента, при которых производная обращается в нуль.

Обратное утверждение неверно. Например, для функции $y = x^3$ $y'=3x^2=0$ при $x=0$. Но в точке $x = 0$ нет ни максимума, ни минимума.

Функция может иметь экстремум в двух случаях:

1. если производная в этой точке существует и равна нулю,
2. если производная в этой точке не существует.

Значения аргумента, при которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими* точками.

Теорема (*достаточные условия существования экстремума*). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (возможно, кроме самой точки x_1). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x=x_1$ функция имеет максимум. Если же при переходе через точку $x=x_1$ слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Пример. Исследовать на максимум или минимум функцию

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Решение. Найдем производную функции $y' = x^2 - 4x + 3$. Определим критические точки. Для этого приравняем производную к нулю $y' = x^2 - 4x + 3 = 0$. Критические точки x_1=1, x_2=3. Определяем знаки производной на соответствующих интервалах

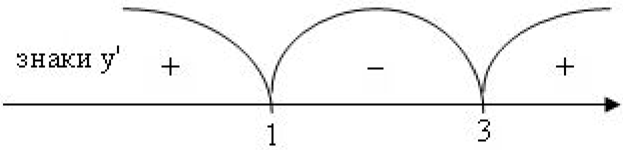


Рис.10.3

При x = 1 функция имеет максимум $y = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$. При x = 3 функция имеет минимум $y = \frac{27}{3} - 18 + 9 + 1 = 1$ (Рис.10.3).

Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной

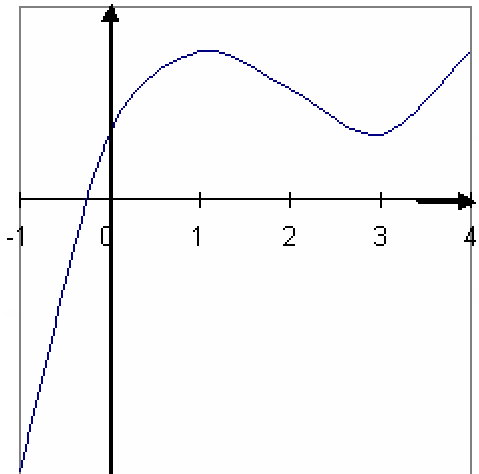


Рис. 10.4

Иногда бывает удобным использовать достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной. Пусть при $x=x_1$ производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, то есть $f'(x_1)=0$. И пусть вторая производная $f''(x)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. Пусть $f'(x_1)=0$, тогда при $x=x_1$ функция имеет максимум, если $f''(x)<0$ и минимум, если $f''(x)>0$.

Так как $f''(x)=(f'(x))'$, то из условия, что $(f'(x))'<0$, следует, что $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку $x=x_1$. Но $f'(x)=0$ по условию. Тогда при $x < x_1$ $f'(x) > 0$ и при $x > x_1$ $f'(x) < 0$, то есть первая производная в точке $x=x_1$ меняет знак с «+» на «–», а это значит, что функция в точке $x=x_1$ имеет максимум.

Пример. Исследовать на максимум и минимум функцию $y = 1 – x^4$ [11].

Решение. Найдем критические точки из первой производной $y'(x) = - 4x^3 = 0$, отсюда $x = 0$. Вычислим вторую производную и определим ее знак в критической точке: $f''(x) = –2x^2$. При $x = 0$ вторая производная $f''(0) = 0$. Значит, через вторую производную исследование функции на максимум ответа не дает.

Исследуем по первому методу. Определяем знак первой производной на интервале $(-\infty,0)$ $y'(x) > 0$, и на интервале $(0,+\infty)$ $y'(x) < 0$. Значит, функция при $x = 0$ имеет максимум.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда на этом отрезке функция достигает наименьшего (наибольшего) значения. Для нахождения наименьшего (наибольшего) значения функции на отрезке необходимо:

1. Найти все точки, в которых функция достигает наименьшего (наибольшего) значения.
2. Определить значения функции на концах отрезков $f(a)$, $f(b)$.
3. Из всех полученных значений выбрать наименьшее (наибольшее).

Пример. Определить наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3–3x+3$ на отрезке $[–3, 3/2]$.

Решение. Вычисляем первую производную, приравниваем ее к нулю и находим критические точки $y' = 3x^2 – 3$. Отсюда $x_1 = – 1$, $x_2 = 1$. Вычисляем вторую производную и определяем ее знак в критических точках: $y''(x) = 6x$. Тогда $y''(–1) = –6 < 0$, значит, в этой точке функция достигает максимума, $y''(1) = 6 > 0$, значит, в этой точке функция достигает минимума.

Вычисляем значение функции в точках максимума, минимума и на границах отрезка

$$f(-3) = -15,\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8},\ f(-1) = 5,\ f(1) = 1.$$

Таким образом, наименьшее значение функции равно –15 при $x = –3$, наибольшее значение функции равно 5 при $x = –1$.

Применение теории максимума и минимума функций к решению задач

Пример. Дальность полета R ядра, выпущенного с начальной скоростью v_0 из орудия, наклоненного под углом φ к горизонту, определяется формулой

$$R = \frac{v_0 \cdot \sin 2\varphi}{g}.$$

Определить угол φ, при котором дальность будет наибольшей при данной начальной скорости v_0.

Решение. Величина R есть функция от φ. Найдем max $R(\varphi)$ при $0 < \varphi < \pi/2$:

$$R'(\varphi) = \frac{v_0^2 \cdot 2\cos 2\varphi}{g}.$$

Тогда $R'(\varphi) = 0$ при $\cos 2\varphi = 0$, $2\varphi=\pi/2$, $\varphi=\pi/4$. Вычислим вторую производную и определим ее знак в критической точке $\varphi = \pi/4$:

$$R''(\varphi)=\frac{2v_0^2\cdot 2(-\sin 2\varphi)}{g}\ .$$

$R''(\pi/4) = -\,4v_0^2/g < 0$. Значит, в точке $\varphi = \pi/4$ функция имеет максимум. Вычислим значения функции на границах интервала:
при $\varphi = 0$ получим $R = 0$, при $\varphi = \pi/2$ также $R = 0$.
Значит, при $\varphi = \pi/4$ дальность полета наибольшая.

Пример. Какие размеры надо иметь цилиндру, чтобы при данном объеме V его полная поверхность S была наименьшей.

Решение. Полная поверхность цилиндра равна $S = 2\pi r^2+2\pi rh$. Объем цилиндра находится по формуле $V = \pi r^2h$. Выразим высоту цилиндра $h=V/(\pi r^2)$ и подставим в функцию S.
Тогда $S = 2\pi r^2 + 2\pi rV/(\pi r^2) = 2\pi r^2+2V/r$. S есть функция от r.
Исследуем функцию $S(r)$ на минимум. Вычислим первую производную и определим критические точки.
$S'(r) = 4\pi r - 2V/r^2$. $4\pi r - 2V/r^2 = 0$, $4\pi r^3 - 2V = 0$ Выразим $r^3 = V/2\pi$, тогда $r = (V/2\pi)^{1/3}$. Найдем вторую производную $S''(r) = 4\pi + 4V/r^3$. Подставим значение r во вторую производную, получим $S''(r) > 0$, значит, функция имеет минимум при $r = (V/2\pi)^{1/3}$.

Когда $r = 0$, то $S = 0$, когда $r\to\infty$, то $S\to \infty$.

Получили, что при $r = (V/2\pi)^{1/3}$ и $h = V\cdot(4\pi^2)^{1/3}/(\pi(V^2)^{1/3}) = (4V/\pi)^{1/3}$ при данном объеме V полная поверхность цилиндра S – наименьшая.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* (*выпуклым*) на интервале $(a, в)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале (Рис.10.5).

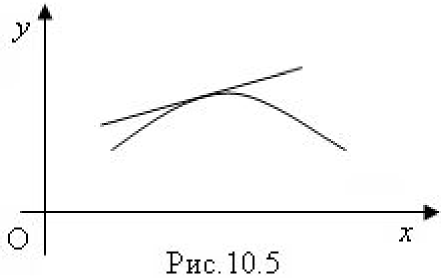


Рис.10.5

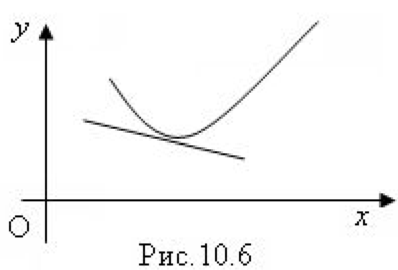


Рис.10.6

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вогнутым*) на интервале $(a, в)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале (Рис.10.6).

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая ее части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции на этом интервале выпуклый вверх. Если $f''(x)>0$ для $\forall x\in(a,b)$, то график выпуклый вниз.

Пример. Определить интервалы выпуклости функции $f(x)=3-x^2$.

Решение. Находим первую и вторую производную функции: $f'(x)=-2x$, $f''(x)=-2<0$. Значит, при любом значении x график функции выпуклый вверх.

Теорема (*достаточное условие существования точек перегиба*). Если $f''(x)$ при переходе через точку x_1, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то $x=x_1$ есть абсцисса точки перегиба.

Пример. Найти точки перегиба и определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой Гаусса $y=\left(e^{-x}\right)^2$ (Рис.10.7).

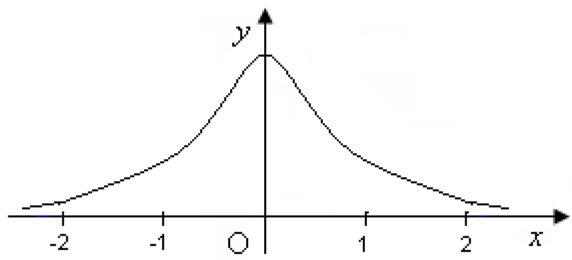
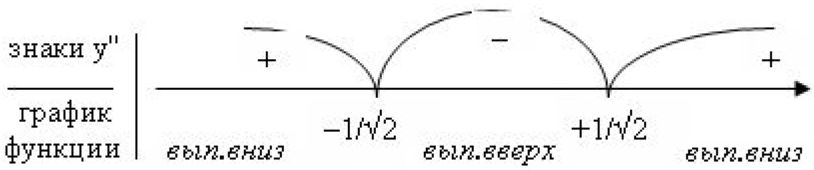


Рис. 10.7

Находим первую и вторую производные: $y'=-2x\cdot\left(e^{-x}\right)^2$, $y''=2\cdot\left(e^{-x}\right)^2\cdot\left(2x^2-1\right)$.

При $x^2=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ вторая производная $y''=0$.

Определяем знак второй производной и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:



Точки перегиба $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right)$.

Асимптоты

Построение графика функции облегчается, если знать его асимптоты. Прямая $y=k\,x+b$ называется *асимптотой* некоторой кривой $y=f(x)$, если расстояние от текущей точки кривой до этой прямой, при удалении точки в бесконечность, стремится к нулю: $\lim\limits_{x\to\infty}\delta=0$. (Рис.10.8)

Асимптоты бывают вертикальные и наклонные (в частности, горизонтальные).

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$.

Пример. $y = \dfrac{1}{x-4}$. Для графика данной функции вертикальной асимптотой является прямая $x = 4$, так как $\lim\limits_{x\to 4-0} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4+0} \dfrac{1}{x-4} = +\infty$.

Уравнение *наклонной асимптоты* кривой $y = f(x)$ записывается в виде $y = kx+b$, где

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]. \qquad (10.1)$$

Пример. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x+1}{x} = \infty$, то уравнение вертикальной асимптоты $x = 0$. Находим

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1$$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^2+2x-1}{x} - x] = 2$ Значит, наклонная асимптота $y = x+2$ (Рис.10.8).

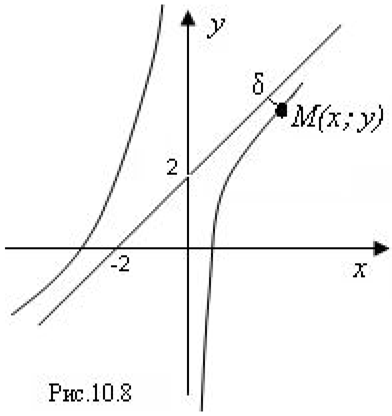


Рис.10.8

Примерный план исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить четность функции.
3. Найти точки разрыва функции.
4. Найти критические точки и интервалы возрастания и убывания функции.
5. Определить точки максимума и минимума и значение функции в этих точках.
6. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости.
7. Найти асимптоты графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ и построить график.

Решение.

1. Переменная x может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, $x\in(-\infty, +\infty)$.
2. Функция нечетная, т.к. $f(-x) = f(x)$. График функции симметричен относительно начала координат.

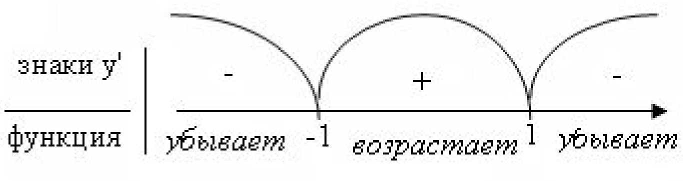
3. Знаменатель функции не обращается в ноль, значит, точек разрыва нет.

4. Находим критические точки первого рода из первой производной:

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x\ \right)^2}.$$

$x_1 = -1$, $x_2 = +1$.

Интервалы возрастания и убывания функции находим по знаку первой производной.



При $x_1 = -1$ функция имеет минимум, равный $y(-1) = -1/2$. При $x_2 = 1$ функция имеет максимум, равный $y(1) = 1/2$.

5. Точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости находим по исследованию второй производной.

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$y'' = 0$ при $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = 0$, $x_5 = +\sqrt{3}$.

Определяем знак второй производной y″:

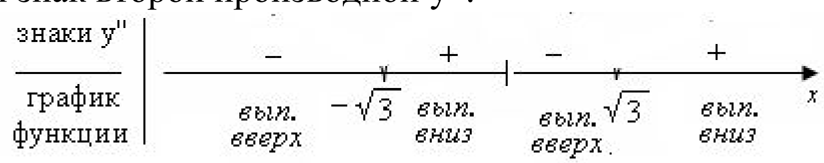


График функции выпуклый вверх (выпуклый) на интервалах $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ и $\left(0,\sqrt{3}\right)$, выпуклый вниз (вогнутый) на интервалах $\left(-\sqrt{3},0\right)$ и $\left(\sqrt{3},\infty\right)$. Следовательно, точки перегиба есть, а именно $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right),(0,0),\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

6. Вертикальных асимптот нет. Находим наклонную асимптоту в виде $y = kx+b$. По формулам (10.1) получаем $k = 0$, $b = 0$. Горизонтальная асимптота $y = 0$.

График функции показан на (Рис.10.9).

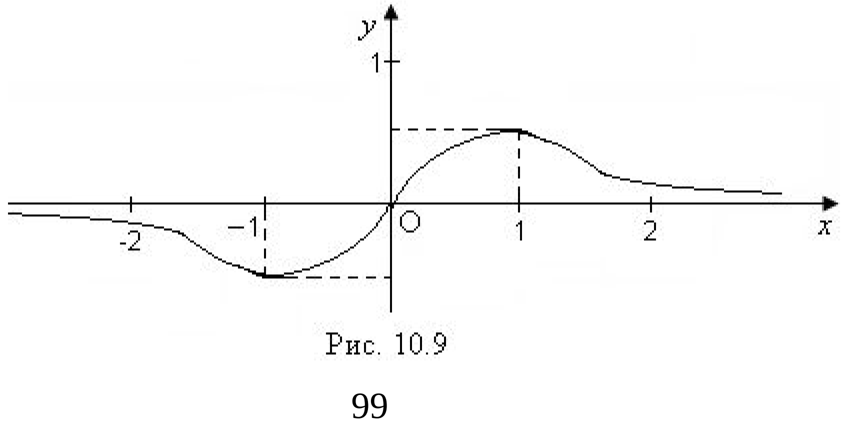


Рис. 10.9

РАСЧЕТНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Составить уравнение касательной к кривой в точке x_0. Построить график кривой и касательной:
   $y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2.$
2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции:
   $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, x = 1{,}58.$
3. Провести полное исследование функции и построить ее график:
   $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}.$

Вариант 2

1. Составить уравнение касательной к кривой в точке x_0. Построить график кривой и касательной:
   $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}, x_0 = 4.$
2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции:
   $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x = 4{,}16.$
3. Провести полное исследование функции и построить ее график:
   $y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}.$

Вариант 3

1. Составить уравнение касательной к кривой в точке x_0. Построить график кривой и касательной:
   $y = 2x^2 - 3x + 1, x_0 = 1.$
2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции:
   $y = \sqrt[5]{x^2}, x = 1{,}03.$
3. Провести полное исследование функции и построить ее график:
   $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$

Вариант 4

1. Составить уравнение касательной к кривой в точке x_0. Построить график кривой и касательной:
   $y = 2x^2 + 3x - 1, x_0 = -2.$
2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции:
   $y = \sqrt[3]{x}, x = 8,24.$

3. Провести полное исследование функции и построить ее график:
   $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}.$

Контрольные вопросы на усвоение теоретического материала

1. Множество натуральных чисел.
2. Множество рациональных чисел.
3. Свойства рациональных чисел.
4. Действия над комплексными числами.
5. Матрицы и действия над ними.
6. Определители 2,3 порядков. Их свойства.
7. Обратная матрица.
8. Миноры и алгебраические дополнения.
9. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными.
10. Правило Крамера.
11. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
12. Метод Гаусса.
13. Векторы. Линейные операции над векторами.
14. Координаты вектора.
15. Скалярное произведение векторов и его свойства.
16. Выражение скалярного произведения через координаты.
17. Векторное произведение векторов и его свойства.
18. Выражение векторного произведения через координаты.
19. Смешанное произведение векторов и его свойства.
20. Выражение смешанного произведения через координаты.
21. Общее уравнение плоскости.
22. Уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.
23. Уравнения прямой в пространстве.
24. Общее уравнение прямой на плоскости.
25. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
26. Условие параллельности и перпендикулярности прямых с угловым коэффициентом.
27. Расстояние от точки до прямой.
28. Уравнение прямой в отрезках.
29. Функция и способы ее задания.
30. Возрастание и убывание функции.

31. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
32. Непрерывность функции в точке.
33. Предел числовой последовательности.
34. Предел функции.
35. Первый замечательный предел.
36. Второй замечательный предел.
37. Бесконечно малые и их свойства.
38. Эквивалентные бесконечно малые.
39. Производная функции, ее физический и геометрический смысл.
40. Производная сложной функции.
41. Производная неявной функции.
42. Производная параметрической функции.
43. Правило Лопиталя вычисления предела функции.
44. Дифференциал функции.
45. Теоремы о дифференцируемых функциях.
46. Приближенное вычисление функции с помощью дифференциала.
47. Формула Тейлора для произвольной функции.
48. Экстремумы функции.
49. Выпуклость графика функции.
50. Асимптоты графика функции.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Арифметические действия над обыкновенными дробями	
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и может быть записано в виде $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Некоторые значения тригонометрических функций приведены в табл.1

Таблица 1

Аргумент	Функция			
	sinα	cosα	tgα	ctgα
0º (0)	0	1	0	не определено
30º ($\frac{\pi}{6}$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45º ($\frac{\pi}{4}$)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60º ($\frac{\pi}{3}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

90º ($\frac{\pi}{2}$)	1	0	не определено	0
120º ($\frac{2\pi}{3}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
135º ($\frac{3\pi}{4}$)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	– 1	– 1
150º ($\frac{5\pi}{6}$)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
180º (π)	0	– 1	0	не определено
210º ($\frac{7\pi}{6}$)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
225º ($\frac{5\pi}{4}$)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
240º ($\frac{4\pi}{3}$)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
270º	– 1	0	не определено	0
300º	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
315º	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	– 1	– 1
330º	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
360º	0	1	0	не определено

Знаки значений тригонометрических функций приведены в табл.2.

Таблица 2

Четверти	Функции			
	sinα	cosα	tgα	ctgα
1	+	+	+	+
2	+	–	–	–
3	–	–	+	+
4	–	+	–	–

Основные эквивалентные бесконечно малые функции приведены в табл.3

Таблица 3

Значения эквивалентных бесконечно малых функций		
$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$(1+\alpha(x))^b - 1 \sim b\cdot\alpha(x)$
$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\cdot\ln b$
$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

Производные и интегралы основных элементарных функций приведены в табл.4.

Таблица 4

	Таблица производных		*Таблица интегралов*
1	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	1	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c$ $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \cdot \sqrt{u} + c$
2	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	2	$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$
3	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	3	$\int e^u du = e^u + c$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	4	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
5	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	5	$\int \sin u du = -\cos u + c$
6	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	6	$\int \cos u du = \sin u + c$
7	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$
8	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$
9	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	9	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$, $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
10	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	10	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2+a} \right\rvert + c$
11	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	11	$\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + c$, $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{u}{a} + c$
12	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$		
		12	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + c$, $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert \frac{a+u}{a-u} \right\rvert + c$
		13	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg \frac{u}{2} \right\rvert + c$, $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + c$
	Свойства производной		*Свойства интеграла*
1	$c' = 0$		
2	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$	1	$\int A \cdot f(u) du = A \cdot \int f(u) du$
3	$(u+v)' = u' + v'$	2	$\int [f_1(u) + f_2(u)] du = \int f_1(u) du + \int f_2(u) du$

4	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	3	$\int dF(u) = F(u) + c$
5	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	4	$\left(\int f(u)du\right)' = f(u)$

Тождественные преобразования тригонометрических выражений приведены в табл.5.

Таблица 5

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента			
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

Формулы сложения	
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$
$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$	$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$

Преобразование сумм или разностей в произведение	
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$
$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

Преобразование произведений в суммы или разности
$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$
$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$
$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$

Формулы двойного аргумента	
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Формулы понижения степени	
$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$	$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$	$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента		
$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$	$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$	$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

Формулы элементарной алгебры приведены в табл.6

Таблица 6

Формулы сокращенного умножения	
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot(a^2 \mp ab + b^2)$

Свойства степеней		
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$(ab)^x = a^x \cdot b^x$
$\frac{\grave{a}^{\tilde{o}}}{a^y} = \grave{a}^{\tilde{o}-\acute{o}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Свойства логарифмов		
$a^{\log_a b} = b$	$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$	$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$
$\log_a a = 1$	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\log_a 1 = 0$	$\log_a b^p = p \cdot \log_a b$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павский, В.А. Линейная алгебра / В.А. Павский. – Кемерово: КемТИПП, 2013. – 188с.
2. Богомолов, Н.В., Самойленко, П.И. Математика / Н.В. Богомолов, П.И Самойленко. – М.: Юрайт, 2013. – 396с.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2004. – 288с.
4. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Л.А. Кузнецов. – СПб.; М.: Лань, 2013. – 240с.
5. Горлач, Б.А. Линейная алгебра / Б.А. Горлач. – СПб.; М.: Лань, 2012. – 480с.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985. – 384с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Л. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Л. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1996. – 304 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 432с.
9. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 656с.
10. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. Под редакцией Демидовича Б.П. –М.: Наука, 2001. – 416с.
11. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: Наука, 1987. – 276с.