ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Кафедра физики

МЕХАНИКА

лабораторный практикум
для студентов
всех специальностей

Кемерово 2006

Составители:
Н. А. Бахтин, канд. ф.-м. наук, профессор,
А.В. Попов, канд. ф.-м. наук, доцент
Н. М. Волкова, канд. техн. наук, доцент;
Г. Я. Кирсанов, доцент;
Н. Б. Шубина, ст. преподаватель

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры физики
Протокол № 6 от 01.07.05

Рекомендовано методической комиссией технологического факультета
Протокол № от

Учебное пособие включает в себя подробное описание лабораторных работ по курсу «Механика». В пособии изложен теоретический материал, касающийся методов обработки результатов измерений. К каждой работе в достаточном объеме представлено теоретическое введение, указан порядок выполнения работы и даны контрольные вопросы. Пособие может быть полезным при самостоятельной работе студентов дневной и заочной форм обучения.

Введение

Целью каждой лабораторной работы по физике является сопоставление теории физического явления с экспериментом, а также непосредственное определение физических величин. Поэтому еще до выполнения лабораторной работы студент должен знать, что он ожидает получить, и как он собирается провести эксперимент. А после выполнения лабораторной работы объяснить, получил ли он то, что ожидал, и если не получил, то почему.

Порядок выполнения работ в лабораториях

1. Получив задание, необходимо ознакомиться с работой по данному руководству.
2. Составить краткий конспект, который должен содержать название темы, чертеж или схему, поясняющую идею применения метода, рабочую формулу.
3. Отчитаться по теории и методу измерений и получить допуск к работе.
4. Внимательно ознакомиться с установкой, уяснив назначение всех её частей.
5. Произвести измерения. После получения результатов предъявить их преподавателю до окончания занятий.
6. Готовятся к отчету и оформляют работу дома. Время занятий должно быть посвящено выполнению работ и их защите.

Методы обработки результатов измерений

Когда нам нужно измерить какую-нибудь величину, мы должны собрать установку, которая измерила бы то, что нужно, и не реагировала на то, что нас не интересует. Однако мы можем создать лишь такую установку, в которой посторонние влияния относительно мало искажают результат. Кроме того, физическая величина есть элемент математической модели явления, а любая математическая модель описывает явление лишь приближенно. Поэтому точного совпадения между результатом измерения и тем, что предсказывает теория, и не должно быть.

Итак, все измерения производятся с ограниченной точностью. Поэтому после каждого измерения необходимо указывать не только результат, но и погрешность, с которой этот результат получен.

Повышение точности измерений расширяет возможности познания окружающего мира и поэтому является важной научной и технической проблемой.

Все возможные ошибки измерений по характеру своего происхождения можно разделить на три типа:

1. ***Грубые ошибки или промахи***. Эти погрешности вызваны недостаточной внимательностью экспериментатора при считывании показаний с измерительных приборов, неправильной записью этих данных, ошибками при вычислениях или просто неумением производить измерения. Такие погрешности не подчиняются никакому закону. При обработке результатов такие данные должны быть отброшены. Производящий измерения должен проявлять больше внимания, тщательно проверять результаты измерений.

2. ***Систематические погрешности***. Эти погрешности связаны со сдвигом измеренного значения относительно истинного. Возникают они из-за неисправности измерительных приборов или неточности метода измерения. Не существует универсальных правил, позволяющих найти систематическую погрешность данного измерения. Выявление, оценка и устранение этих погрешностей – дело опыта или интуиции экспериментатора. Систематическую погрешность, обусловленную измерительным прибором, можно уменьшить, используя более точный прибор. Погрешность, обусловленную методом измерения, можно уменьшить путем сравнения результатов измерения одной и той же величины, полученных принципиально разными методами.

Систематические погрешности всегда односторонне влияют на результат измерений, только увеличивая или только уменьшая их.

3. ***Случайные погрешности.*** Случайные погрешности проявляются в разбросе данных при повторных измерениях, проведенных в одних и тех же условиях. Эти погрешности обусловлены факторами, изменяющимися от измерения к измерению: изменением напряжения в сети, изменением температуры воздуха, плохим освещением шкалы прибора, трением в осях приборов и т.д. Погрешности измерений такого рода подчиняются законам теории вероятностей, установленным для случайных явлений. На основании теории вероятностей были созданы методы обработки результатов измерений, которые дают возможность определить наиболее вероятные значения измеряемых величин, а также возможные отклонения от этих значений.

Следует помнить, что использование теории случайных погрешностей оправдано лишь в том случае, когда повторные измерения дают результаты, заметно отличающиеся друг от друга. Обычно в лабораторной практике чувствительности измерительных приборов не всегда хватает для обнаружения случайной погрешности. Кроме того, систематические погрешности приборов, как правило, велики по сравнению со случайными погрешностями. Если же случайная погрешность в большей степени влияет на конечный результат, чем систематическая, то ее можно уменьшить многократным повторением измерений.

Некоторые понятия метрологии

Когда мы собираемся что-то измерить, то мы внедряемся в область ***метрологии*** – науки об измерениях физических величин и о способах обеспечения единства и требуемой точности этих измерений. И не только этим занимается метрология. Существует еще законодательная метрология, которая разрабатывает правила и требует неукоснительного их соблюдения. Когда вы придете на свое производство, то будете постоянно находиться под контролем метрологических служб.

Итак, мы внедряемся в область метрологии, где существуют свои законы и понятия.

Физическая величина – это свойство, в качественном отношении общее многим физическим объектам, но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта. Примеры: масса, длина, температура, напряженность электрического поля, период колебаний и др.

Конкретные проявления одной и той же физической величины называются ***однородными величинами***. Например, размер ваших башмаков и расстояние от Земли до Луны однородные физические величины.

Однородные физические величины отличаются друг от друга размером. ***Размер физической величины*** – это количественное содержание в данном объекте свойства, соответствующего понятию "физическая величина".

Под ***единицей физической величины*** понимают физическую величину, фиксированную по размеру и принятую в качестве основы для количественной оценки конкретных физических величин (метр, миля, ангстрем, фут, дюйм).

Размер физической величины не зависит от выбранной единицы, он остается неизменным при использовании различных единиц.

Единицы физических величин

Рассмотрим историю развития единиц измерения физических величин.

Самым древним является период, когда в качестве единиц использовались части человеческого тела. Так, в качестве единицы длины применяли:

- дюйм, в дословном переводе “большой палец” (2,54 *см* – длина сустава большого пальца);
- ладонь (ширина четырех пальцев без большого);
- фут (длина ступни, 0,3048 м).

Чем удобны такие единицы? Они всегда с тобой. Не нужно носить с собой измерительный прибор. Развернул кусок материи, прошел по нему ступней 48 размера, отсчитал, сколько футов, заплатил овцами – это были своеобразные деньги. И деньги удобные, их не надо носить в кармане. Сами ходят.

Второй период отличается от первого тем, что стали применяться сопряженные единицы. Миля – 1760 ярдов, ярд – 3 фута, фут – 12 дюймов.

В 17–18 вв. во всех европейских странах царил хаос в области применяемых единиц. Это мешало развитию орговых связей, промышленности, а также прогрессу в области естественных наук.

Метрическая система мер

В 1789 году крупнейшие торговые центры Франции обратились к правительству с просьбой установить единые меры для всей страны. 8 мая 1790 года Национальное собрание Франции приняло декрет о реформе мер. Парижская АН по предложению Ж. Лагранжа (1736 – 1813) рекомендовала установить десятичное подразделение кратных и дольных единиц. По предложению Ж. Борда, Ж. Кондорсе, П. Лапласа, Г. Монжа в качестве единицы длины была принята одна сорокамиллионная часть длины Парижского земного меридиана. На основе этой единицы, названной метром (что в переводе означает мера), и была построена система мер, получившая название метрической системы мер. Декрет о новых мерах и весах был принят Конвентом Франции 7 апреля 1795 года.

Работы по определению размера метра измерениями длины дуги Парижского меридиана от Дюнкерка до Барселоны, начатые в 1792 г., были закончены к 1798 г. В 1799 г. были изготовлены платиновые прототипы метра и килограмма, переданные на хранение Национальному архиву Франции.

Со второй половины XIX в. метрическая система мер получила признание во многих странах Европы, Азии, Америки в качестве международной системы мер. 20 мая 1875 г. в Париже 17 государств подписали Метрическую конвенцию “для обеспечения международного единства измерений и усовершенствования метрической системы мер”.

В 1960 г. Генеральная конференция по мерам и весам приняла решение:

а) присвоить системе, основанной на шести основных единицах, наименование "Международная система единиц";

б) установить международное сокращенное наименование этой системы "SI".

Основные единицы системы СИ

1.**Метр** (м) – единица длины. Метр – длина, равная расстоянию, проходимому электромагнитным излучением за время, равное 1/с (с – скорость света в вакууме, равная 299 792 458 м/с).

2.**Килограмм** (кг) – единица массы. Килограмм равен массе международного прототипа килограмма.

3.**Секунда** (с) – единица времени. Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровня основного состояния атома цезия-133.

4.**Ампер** (А) – единица силы тока. Ампер равен силе не изменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника длиной в 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

5.**Кельвин** (К) – единица термодинамической температуры. Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды. В Кельвинах выражается также интервал или разность температур.

6.**Моль** (моль) – единица количества вещества. Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде – 12 массой 0,012 кг.

7.**Кандела** (кд) – единица силы света. Кандела равна силе света, испускаемого с поверхности площадью 1/600 000 м^2 полного излучателя в перпендикулярном направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при давлении 101325 Па.

Дополнительные единицы

Радиан (рад) – единица плоского угла. Радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан (ср.) – единица телесного угла. Стерадиан равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Методы обработки результатов непосредственных измерений

К непосредственным измерениям относятся те измерения, при которых искомая величина A может быть определена по показаниям приборов. Эти измерения сводятся к отсчету по шкале приборов. Примерами непосредственных измерений могут служить определение длины штангенциркулем или микрометром, измерение силы тока амперметром, измерение промежутков времени секундомером и т.д.

Пусть в одних и тех же условиях проделано N измерений некоторой физической величины, истинное значение которой x:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$.

Задача заключается в том, чтобы определить значение этой величины x с наименьшей погрешностью.

Теория погрешностей приводит к выводу: ***наиболее близким к истинному значению измеряемой величины является среднее арифметическое***, т.е.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}. \tag{1}$$

Ошибкой называется разность между измеренным и истинным значением измеряемой величины

$$\Delta y_i = x_i - x. \tag{2}$$

Характеристикой средней точности измерений является ***средняя квадратичная ошибка отдельного измерения***

$$\Delta_{кв} = \sqrt{\frac{\Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \ldots \Delta y_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta y_i^2}{N}}\,. \qquad (3)$$

Если $N \to \infty$, то $\Delta_{кв.} \to \sigma$. Величина σ^2 называется ***дисперсией измерений***. Дисперсия характеризует разброс экспериментальных значений относительно истинного значения.

Точное вычисление ошибок Δy_i, а также $\Delta_{кв}$ невозможно, так как истинное значение измеряемой величины x неизвестно. Однако можно сделать вероятностную оценку величины $\Delta_{кв}$ следующим образом.

Введем понятие ***отклонения результатов отдельных измерений от среднего значения*** $\bar{x}$

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i. \qquad (4)$$

Эти отклонения удовлетворяют тождеству

$$\sum \Delta x_i = 0, \qquad (5)$$

которое непосредственно следует из определения среднего арифметического $\bar{x}$.

Для ошибок Δy_i подобного равенства нет, так как неизвестно истинное значение величины x. Однако если серию из N измерений повторять многократно, устремив число повторений к бесконечности, то можно утверждать, что математическое ожидание (иначе говоря, среднее в этих бесконечно повторяемых сериях по N опытов) указанной суммы будет равно нулю.

Порядок обработки результатов прямых измерений

1. Результаты каждого измерения x_i заносятся в заготовленную заранее таблицу.
2. Вычисляется среднее значение $\bar{x}$ по формуле (1)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}\,.$$

3. Вычисляются отклонения результатов отдельных измерений от среднего значения по формуле (4)

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$$

4. Вычисляется средняя квадратичная ошибка среднего результата по формуле

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{N(N-1)}}\,. \qquad (6)$$

5. Окончательный результат записывают в виде

$$x = \bar{x} \pm S_N. \qquad (7)$$

6. Оценивается относительная погрешность результатов измерений:

$$\varepsilon = \frac{S_N}{\bar{x}} \cdot 100\%. \qquad (8)$$

Методы обработки результатов при косвенных измерениях

Значение большинства физических величин определяется косвенными методами. Вначале производится непосредственное измерение одной или нескольких физических величин x_i, количественно связанных с определяемой величиной y уравнением:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{9}$$

Очевидно, что погрешность определяемой величины зависит от погрешностей измерений величин x_i. Оценку погрешности при косвенных измерениях производят по формуле:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}\ , \tag{10}$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ...$ – частные производные от функции (9).

При обработке результатов косвенных измерений предлагается следующий порядок операций:

1. Каждую измеряемую величину x_i обрабатывают по описанной выше методике для прямых измерений.
2. Рассчитывают среднее значение величины y при средних значениях x_i
$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n). \tag{11}$$
3. Оценивается погрешность y по формуле (10).
4. Определяется относительная погрешность результата серии измерений:
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} \cdot 100\%. \tag{12}$$
5. Окончательный результат записывается в виде:
$$y = \bar{y} \pm \Delta y. \tag{13}$$

Пример на расчет систематической погрешности

Определение объема цилиндра и систематической погрешности.

<u>*Приборы и принадлежности:*</u> линейка, ценой деления 1 мм; цилиндрическое тело.

Расчетная формула:

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4}, \tag{14}$$

где D – диаметр основания цилиндра;

h – высота цилиндра.

Таблица измерений

D (*мм*)	h (*мм*)	δ (*мм*)
40	20	0,5

1. Найдем значение V:

   $V = 3{,}14 \cdot 40^2 \cdot 20/4 = 25120.$
2. Логарифмируем расчетную формулу

   $\ln V = \ln \pi/4 + 2 \ln D + \ln h.$
3. Дифференцируем

   $$\frac{dV}{V} = 2\frac{dD}{D} + \frac{dh}{h}.$$
4. Произведем замену

   $$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h}.$$
5. Найдем ε:

   $$\varepsilon = \left(2\frac{0,5}{40} + \frac{0,5}{20}\right) \cdot 100\% = 5\%.$$
6. Найдем максимальную систематическую погрешность

   $\Delta V = V \cdot \varepsilon = 1256.$
7. Результат запишем в виде:

   $V = 25120 \pm 1256$ *мм*^{3}.

Ответ округлим до трех значащих цифр, т.к. в исходных данных было всего две значащих цифры:

$V = 25{,}1 \cdot 10^3 \pm 1{,}3 \cdot 10^3$ *мм*^{3}.

Некоторые правила приближенных вычислений

Математические операции по обработке результатов измерений не могут их сделать более точными, чем позволяют их сделать измерительные приборы.

При определении численного значения величины ошибки следует различать два случая:

1. Существуют приближенные величины, значения которых могут быть вычислены с любой наперед заданной точностью. К таким величинам относятся, например, π, *e*, логарифмы чисел. К другим величинам относятся, например, физические константы, для которых «точные» табличные значения установлены соответствующими соглашениями. В качестве примера можно привести: *c* – скорость света в вакууме, *k* – постоянная Больцмана, *h* – постоянная Планка.

В этом случае при расчетах за истинное значение величины принимается ее табличное значение, взятое с точностью, которую мы обеспечиваем в нашей лабораторной работе.

2. Результаты измерений, ошибки которых нам заранее неизвестны. Их погрешности находятся по следующим правилам. Абсолютная погрешность числа не должна превышать единицу последнего разряда в числе.

Контрольные вопросы

1. Назовите виды погрешностей, которые возникают при экспериментальном определении физических величин.
2. Дайте определение понятий: физическая величина, единица измерения физической величины.
3. Назовите основные единицы системы СИ.
4. Дайте определение понятий: радиан, стерадиан.
5. Дайте определение следующих понятий:
   а) среднее арифметическое результатов измерений;
   б) средняя квадратичная погрешность отдельного измерения;
   в) средняя квадратичная погрешность среднего результата.
6. Опишите порядок обработки результатов при прямых измерениях.
7. Какие погрешности называются косвенными?
8. Расскажите порядок обработки экспериментальных результатов при косвенных измерениях.
9. Расскажите порядок оценки систематической погрешности.
10. Какая погрешность называется абсолютной?
11. Как оценить относительную погрешность?
12. В какой форме предлагается записать результат после статистической обработки?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Изучение закономерностей свободно падающих тел

Определение ускорения свободного падения

Цель работы: экспериментально исследовать зависимость времени паления тела от высоты. По экспериментальным данным найти ускорение свободного падения в данном районе.

Приборы и принадлежности: установка для измерения времени падения тела, линейка длиной 1 *м*, стальное тело небольшой массы.

Описание установки

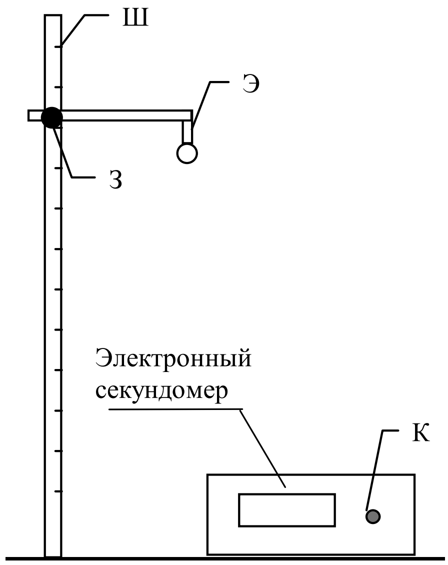


Рис. 1

Установка (рис. 1) состоит из штанги (Ш), с нанесенной на ней шкалой, электромагнита (Э), фиксируемого на нужной высоте зажимом (З), цифрового электронного секундомера, управление которым осуществляется с помощью кнопки (К).

При нажатии кнопки включается электронная схема, которая устанавливает показания секундомера на "нуль" и подключает электромагнит к цепи питания. Если теперь, не убирая пальца с кнопки, поднести к электромагниту небольшое тело из стали (гайку, болт), то оно притянется к нему.

Если затем кнопку отпустить, то секундомер будет запущен, электромагнит отключен от источника питания и тело начнет падать. В момент удара о стол секундомер прекратит отсчет времени. На шкале секундомера будет зафиксировано время падения тела с высоты H. Устанавливая электромагнит на различных отметках на штанге, можно экспериментально исследовать зависимость времени падения тела от высоты.

Краткая теория

На все тела, находящиеся в окрестности Земли действует ***сила тяжести***

$$P = mg. \qquad (1)$$

Если на тело не действуют другие силы, то оно будет падать с ускорением свободного падения g. Значение величины g одинаково для всех тел в данном месте. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то сила тяжести совпадала бы по величине и направлению с ***силой тяготения***, определяемой законом всемирного тяготения:

$$F_т = \gamma \frac{mM_З}{R^2}. \qquad (2)$$

где $\gamma = 6{,}6745 \cdot 10^{-11} м^3/(кг \cdot с^2)$ – гравитационная постоянная;

m – масса тела;

$M_З = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ *кг* – масса Земли;

R = 6378 *км* – радиус Земли.

Ускорение свободного падения g изменяется вблизи поверхности Земли в пределах от 9,780 м/с^2 на экваторе до 9,832 м/с^2 на полюсах. Это обусловлено двумя факторами:

1) суточным вращением Земли,
2) сплюснутостью Земли у полюсов.

Поскольку различие значений ускорения невелико, то при решении большинства практических задач оно принимается равным 9,81 м/с^2.

Из-за вращения Земли сила тяжести на экваторе и на полюсах отличается на 0,3%. Механизм воздействия вращения на силу тяжести представлен на рисунке 2. Т.к. Земля не является инерциальной системой отсчета, то на всякое покоящееся на ее поверхности тело действует центробежная сила инерции $\mathbf{F}_ц$, равная по величине

$$F_ц = m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos\varphi,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли;

φ – географическая широта, на которой находится тело.

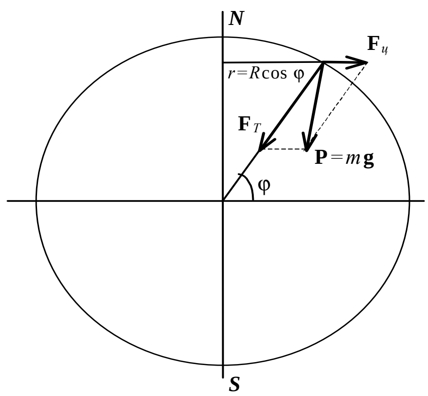


Рис. 2

Из рисунка 2 видно, что сила тяжести, действующая на тело, равна векторной сумме двух сил: центробежной силы и силы всемирного тяготения, действующей по направлению к центру Земли:

$$\vec{P} = \vec{F}_т + \vec{F}_ц.$$

Очевидно, что направление силы тяжести совпадает с направлением к центру Земли только на полюсах и на экваторе, на других широтах оно отклоняется от этого направления.

Сила тяжести изменяется на 0,2% от полюсов к экватору из-за сплюснутости Земли. Дело в том, что полярная ось приблизительно на 1/300 короче диаметра экватора, и поэтому расстояние от центра Земли до поверхности на экваторе несколько больше, а сила тяготения, соответственно, немного меньше, чем на полюсах. Полное изменение ускорения от полюсов до экватора составляет всего 0,5%, и поэтому во многих расчетах может не учитываться. Однако если маятниковые часы перенести с полюса на экватор, то они будут отставать на 3,5 минуты в сутки (почему?).

Вес тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. То есть вес тела приложен не к телу, а к опоре. Напомним, что сила тяжести приложена к самому телу. Вес тела и сила тяжести приложены, таким образом, к разным предметам. Вес тела равен силе тяжести только в том случае, когда опора или подвес неподвижны относительно Земли или движутся прямолинейно и равномерно.

Если опора будет свободно падать вниз с ускорением g, то тело не будет действовать на нее. Опора с телом не взаимодействует. Вес тела будет равен нулю. Тело в этом случае находится в состоянии невесомости.

МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Зависимость высоты падения тела от времени без начальной скорости определяется формулой:

$$H = \frac{gt^2}{2}.$$

Из этой формулы выразим ускорение свободного падения:

$$g = \frac{2H}{t^2}. \qquad (3)$$

Эта формула является основной при выполнении лабораторной работы

Оценка систематической погрешности

a) прологарифмируем выражение (3):

$$\ln g = \ln 2 + \ln H - 2 \ln t;$$

b) найдем дифференциал:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dH}{H} - 2\frac{dt}{t};$$

c) заменим дифференциалы на приращения, т.е. абсолютные погрешности, а знак минус на плюс:

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta H}{H} + 2\frac{\Delta t}{t};$$

d) в предлагаемой установке погрешность в измерении высоты составляет ΔH = 0,5 см, а времени Δt = 0,01 с.

Экспериментальная часть

1. Заготовить таблицу.
2. Включить установку в сеть.
3. Установить электромагнит на высоте 0,4 м. Высота измеряется от поверхности стола до нижней части электромагнита. Зафиксировать электромагнит винтовым зажимом.
4. Занести установленную высоту H_i в таблицу.

Таблица 1

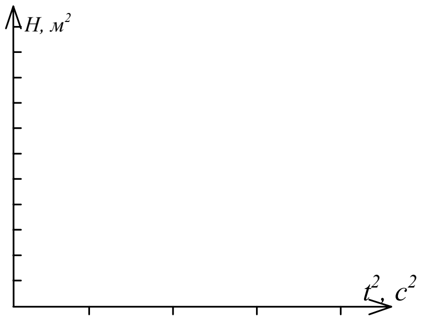
<table>
<tr><th>H
(м)</th><th>t
(с)</th><th>$\bar{t}$
(с)</th><th>$g = 2H/\bar{t}^2$
(м/с^2)</th><th>$\varepsilon = \frac{\Delta H}{H} + 2\frac{\Delta t}{t}$</th><th>$\Delta g = \bar{g}\cdot\bar{\varepsilon}$
(м/с^2)</th><th>$g = \bar{g} \pm \Delta g$
(м/с^2)</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="15"></td><td rowspan="15"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Среднее значение</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5. Взять у преподавателя или лаборанта небольшое тело, поднести его к нижней части электромагнита и нажать на секундомере кнопку *К*. Тело должно притянуться к электромагниту.
6. Отпустить кнопку. Тело начнет падать, а секундомер отсчитывать время. При ударе о стол секундомер зафиксирует время падения.
7. Показания секундомера занести в таблицу.
   Произвести по три отсчета времени на каждой высоте закрепления электромагнита. Электромагнит фиксировать на штанге в пределах 0,4 – 1 *м*.

Обработка экспериментальных результатов.

1. Найти среднее время $\bar{t}$ для каждой высоты. Занести в таблицу.
2. Вычислить g и ε для каждой высоты. Результат занести в таблицу.
3. Найти средние значения $\bar{g}$ и $\bar{\varepsilon}$ и занести в последнюю строку таблицы.
4. Вычислить Δg.
5. Записать результат в последнюю колонку таблицы.

Построение графика



Построить график зависимости $H = gt^2/2$ по экспериментальным данным. Для удобства предлагается построить зависимость H от t^2. Ориентировочный вид системы координат для графика приведен на рисунке. Линию провести таким образом, чтобы она была равноудалена от всех экспериментальных точек.

Тангенс угла наклона линии равен $g/2$. Найти значение g из графика и сравнить со значением, полученным ранее.

Контрольные вопросы

1. Что такое траектория движения, путь, перемещение?
2. Что такое скорость? (Как определяется средняя и мгновенная скорость?)
3. Что такое ускорение? Что определяет тангенциальное и нормальное ускорение? Укажите направление векторов $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$.
4. Законы Ньютона.
5. Закон всемирного тяготения.
6. Центробежная сила инерции.
7. Какие силы действуют на тела находящиеся на поверхности Земли, и что такое сила тяжести тела?
8. От каких факторов зависит ускорение свободного падения g?
9. Вес тела.
10. Зависит ли время падения тела от его массы?
11. Можно ли у поверхности земли создать состояние невесомости и если да, то каким образом?
12. Единицы измерения скорости, ускорения, массы, силы, времени, расстояния.
13. Какие виды погрешности вы знаете? Как они определяются?
14. Выведите формулу для оценки погрешности в данной работе.
15. Получили ли Вы в данной работе ожидаемый результат? Если нет, то почему?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Машина Атвуда

Цель работы: Изучить законы прямолинейного движения тел.

Приборы и принадлежности: машина Атвуда с разновесами. Масса основных грузов - 80 ± 0,5 *г*; 150±0,5 *г.*

Предостережение! Если прибор включен, а кнопка "Пуск" не нажата, не крутите блок. Тормоз удерживает блок, и его вращение может повредить прибор. Вращать блок только при нажатой кнопке "Пуск" или при выключенном приборе.

Устройство и принцип работы машины Атвуда

Общий вид установки представлен на рис. 1.

На вертикальной стойке 1 основания 2 расположены три кронштейна: нижний 3, средний 4 и верхний 5. На верхнем кронштейне 5 крепится блок с узлом подшипника качения, через который перекинута капроновая нить с грузами, одинаковой массы.

На верхнем кронштейне находится электромагнит 7, который с помощью фрикциона, при подаче на него напряжения, удерживает систему с грузами в неподвижном состоянии.

На среднем кронштейне крепится фотодатчик 8, который выдаёт электрический сигнал для окончания отсчета времени секундомера.

Средний кронштейн имеет индекс, положение которого совпадает с оптической осью фотодатчика. Нижний кронштейн имеет резиновый амортизатор, о который ударяется груз при его остановке.

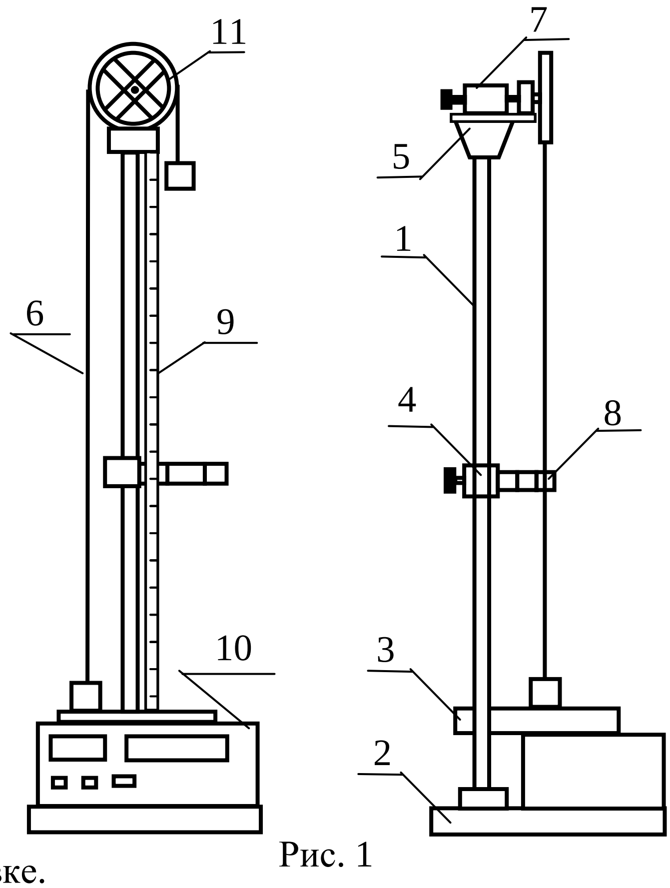


Рис. 1

Средний и нижний кронштейн имеет возможность свободного перемещения и фиксации на вертикальной стойке по всей его длине.

Начальное положение определяют визуально по нижнему срезу груза, конечное по индексу среднего кронштейна.

Миллисекундомер 10 представляет собой самостоятельный прибор с цифровой индикацией времени. На вертикальной стойке 1 установлена миллиметровая линейка 9, по которой определяют начальное и конечное положение грузов, а, следовательно, и пройденный путь.

Принцип работы установки

Через блок 11 перекинута нить 6 с грузами. Когда масса грузов одинакова, система находится в состоянии безразличного равновесия или грузы движутся равномерно и прямолинейно, если их толкнуть. Если на один из грузов положить перегрузок массы m, то система начинает двигаться равноускоренно. Установка укомплектована тремя грузиками.

Краткая теория

Предположим, что блок и нити невесомы, нить нерастяжима, сила трения мала. В этом случае сила натяжения будет одинакова по обеим сторонам блока. Силы, действующие на грузы, показаны на рисунке 2. Запишем второй закон Ньютона для левого груза

$$(M+m)g - T = (M+m)a, \qquad (1)$$

где M – масса груза;
m – масса перегрузки;
a – ускорение груза;
g – ускорение свободного падения;
T – сила натяжения нити.

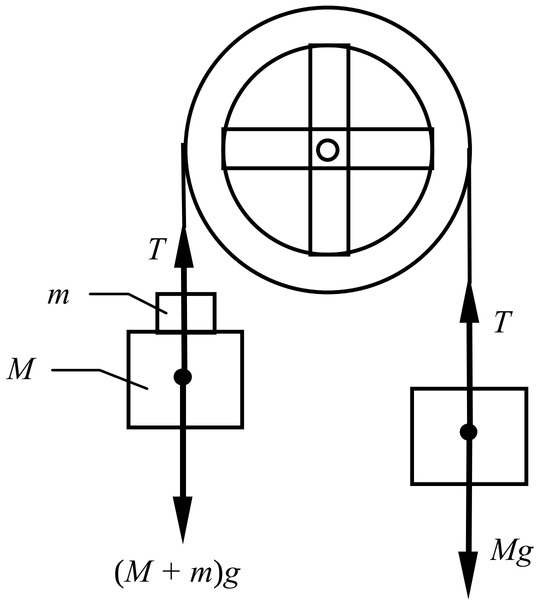


Рис.2.

Для правого груза, который не имеет перегрузки, второй закон Ньютона записывается так:

$$Mg - T = Ma. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем значение ускорения грузов для этого идеального случая

$$a_т = g\frac{m}{2M+m}. \qquad (3)$$

Для экспериментального определения ускорения воспользуемся известной формулой:

$$S = \frac{at^2}{2}, \qquad (4)$$

где S – путь, пройденный грузами;
t – время движения грузов.

Измерив, путь, пройденный телом, и время его движения, можно найти ускорение движения грузиков. Наша установка позволяет производить такие измерения с большой точностью.

Порядок выполнения работы

1. Осторожно надеть нить с двумя грузами в канавку блока и убедиться, что система находится в состоянии безразличного равновесия.
2. Четырьмя винтами основания добиться того, чтобы правый груз при движении проходил точно посередине рабочего окна фотодатчика, иначе груз во время эксперимента может разбить фотодатчик.
3. Включить в сеть шнур питания прибора и нажать кнопку «сеть», при этом должна загореться индикаторная лампочка.
4. Осторожно положить на правый груз первый перегрузок.
5. Нажать кнопку «пуск» и, не отпуская ее, перевести правый груз в самое верхнее положение. Левый груз при этом будет находиться на основании прибора.
6. Нажать и отпустить кнопку «сброс». Во всех разрядах секундомера должны появиться нули.
7. Нажать кнопку «пуск» и не отпускать ее, пока правый груз не ударится об основание.
8. Записать показания секундомера и пройденный грузами путь в таблицу. Пройденный путь определяется по линейке как расстояние от верхнего положения нижней части правого груза до индекса кронштейна с фотодатчиками. Опыт с этим перегрузком провести три раза.
9. Установить еще один перегрузок, после чего проделать указания пунктов 5, 6, 7, 8, 9, 10.
10. Установить третий перегрузок и с тремя снова проделать указания пунктов 5, 6, 7, 8, 9, 10.
11. Обработать результаты измерений и заполнить все графы таблицы.

Таблица 1

S (*м*)	m (*кг*)	t (*с*)	$\vec{t}$ (*с*)	$a=\dfrac{2S}{\overline{t}^{2}}$ (*м/с*^{2})	$\varepsilon = \dfrac{\Delta S}{S}+2\dfrac{\Delta t}{t}$	$\Delta a=\varepsilon\cdot a$ (*м/с*^{2})	$a=\overline{a}\pm\Delta a$ (*м/с*^{2})

12. Вычислить теоретическое значение ускорения грузов по формуле (3) и сравнить с экспериментальным значением. Сделать выводы.
13. Вывести самостоятельно формулы для расчета абсолютной и относительной погрешности измерений.

Контрольные вопросы

1. Какое движение называется равномерным? Запишите уравнение равномерного движения.
2. Какое движение называется равноускоренным?
3. Напишите формулы для пути, скорости и ускорения при равноускоренном движении.
4. Как зависит ускорение свободного падения тела в вакууме от его массы?
5. Нарисуйте блок с перекинутой через него нитью с грузами и расставьте силы, действующие на грузы.
6. Напишите уравнения движения грузов для случая, когда массой блока и нити можно пренебречь.
7. Найдите ускорение движения грузов.
8. Какие виды погрешностей при измерениях вы знаете?
9. Выведите формулы для вычисления абсолютной и относительной погрешностей.
10. Сравните экспериментальные и теоретические результаты. Сделайте выводы.

Гармонические колебания и маятники

Краткая теория

Колебания представляют один из наиболее распространенных видов движения в природе. Можно привести множество примеров: колебания поплавка в воде, вибрации машин, зданий, колебания струн и мембран. Тепловое движение атомов в узлах кристаллической решетки также является колебательным.

Некоторые колебательные движения могут привести к катастрофическим последствиям, например, колебания моста, возникающее от толчков, сообщаемых ему колесами, вибрации крыльев самолета. В подобных случаях задача состоит в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний.

Вместе с тем колебательные процессы лежат в основе различных областей техники. Так, например, колебательные процессы широко используют в радиотехнике.

Наиболее общими признаками колебательного движения являются его повторяемость и движение в ограниченном пространстве.

Колебания – это движения или процессы, которые точно или приблизительно повторяются через определенные интервалы времени.

Если движение или процесс повторяется через определенные промежутки времени T, то колебание называется периодическим, а время T – ***периодом колебаний***.

Число повторений движения или процесса в единицу времени называется ***частотой колебаний.*** Частота и период связаны соотношением

$$\nu = 1/T.$$

Единицей измерения частоты служит ***герц.*** 1 Герц – это частота, при которой совершается одно колебание в секунду.

Гармонические колебания

Важнейшим среди периодических процессов является простое, или гармоническое, колебание.

Гармоническое колебание – это такой периодический процесс, в котором изменение величины происходит по закону синуса или косинуса.

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1}$$

где x – ***элонгация*** или величина удаления от положения равновесия;

A – ***амплитуда –*** наибольшее значение функции, изменяющейся по гармоническому закону;

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – ***полная фаза*** гармонического колебания;

φ_0 – ***начальная фаза*** – это часть от полной фазы и определяет значение функции $x(t)$ при t=0;

ω_0 – ***циклическая частота***.

Циклическая (или круговая) частота связана с периодом соотношением:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Оказывается, что любые колебания можно сколь угодно точно представить как результат наложения некоторого числа (зависящего от точности представления) гармонических колебаний кратной частоты, называемых ***гармониками***. Эта возможность выражается разложением функции в ряд Фурье.

Скорость и ускорение при гармоническом колебании находятся как первая и вторая производные от элонгации по времени:

$$\upsilon = dx/dt = \omega_0 \cdot A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2),$$

$$a = d^2x/dt^2 = d\upsilon/dt = -\,\omega_0^2 A\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

т.е. величина ускорения "колеблется" в противофазе с элонгацией:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2 x. \qquad (2)$$

Последнее уравнение является ***дифференциальным уравнением гармонического колебания***, выражающим общее свойство синусоидальной функции.

Если вторая производная какой-либо функции по времени пропорциональна этой же функции, взятой с обратным знаком, то эта функция изменяется по гармоническому закону, причем коэффициент пропорциональности равен квадрату круговой частоты гармонического колебания.

Динамика гармонического колебания

Соотношение (2) между ускорением и элонгацией $a = -\,\omega_0^2 x$ позволяет определить условие, которому должна удовлетворять сила, чтобы под ее воздействием материальная точка совершала гармонические колебания. Действительно, по второму закону Ньютона

$$F = -\,m\cdot a = -\,m\omega_0^2\cdot x.$$

Это значит, что для поддержания гармонического колебания нужна сила, которая изменялась бы пропорционально $-x$, т.е. пропорционально величине отклонения колеблющейся точки от положения равновесия. Знак "минус" указывает, что сила должна быть направлена против отклонения x, т.е. направлена к положению равновесия. Кроме того, при $x = 0$ получается, что $F = 0$, т.е. в точке $x = 0$ сила не действует.

Таким условиям удовлетворяет сила x, возникающая при деформации пружины

$$F = -\,kx. \qquad (3)$$

откуда

$$k = m\omega_0^2,\ \omega_0^2 = k/m,\ \nu = \omega_0 \big/ 2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\ \ и\ \ T = 1/\nu = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Таким образом, значение массы колеблющейся материальной точки и величина коэффициента упругой силы однозначно определяют частоту и период гармонического колебания.

Если сила, не являющаяся по своей природе упругой, подчиняется закону (3), то она называется ***квазиупругой*** (по латыни "guasi" означает "как бы").

Маятники

Математический маятник

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику может служить тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити (рис. 1).

Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом α, образованным нитью с вертикалью. При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент M, равный по величине $m{\cdot}g{\cdot}l{\cdot}\sin\alpha$ (l- длина нити). Этот момент стремится вернуть маятник к положению равновесия, т.е. аналогичен квазиупругой силе. Моменту M и угловому смещению α нужно приписывать разные знаки.

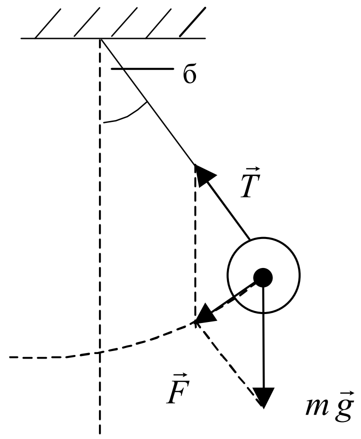


Рис. 1

$$M = -\, m{\cdot}g{\cdot}l{\cdot}\sin\alpha. \qquad (4)$$

Основной закон динамики вращательного движения имеет вид:

$$M = I\beta. \qquad (5)$$

Момент инерции маятника равен:

$$I = ml^2.$$

Угловое ускорение определяется формулой

$$\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Подставим выражения для момента инерции и углового ускорения в формулу (5):

$$-\, mgl\cdot\sin\alpha = ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\cdot\sin\alpha = 0.$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. В этом случае можно положить $\sin\alpha \approx \alpha$. Введя, кроме того, обозначение $\frac{g}{l} = \omega_0^2$, придем к уравнению вида

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0{}^2\alpha = 0. \tag{6}$$

Его решение имеет вид:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi). \tag{7}$$

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется по времени по гармоническому закону. Угловая частота равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \text{ а период}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{8}$$

т.е. период зависит только от длины математического мятника и ускорения свободного падения и не зависит от массы маятника.

Физический маятник

Физический маятник – это твердое тело, свободно вращающееся вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс. (рис. 2)

Момент сил, приложенных к маятнику относительно его оси вращения, равен:

$$M = -mgl_0\sin\alpha,$$

где m – масса физического маятника, l_0 – расстояние от оси вращения до центра массы маятника. Знак "минус" означает, что момент M препятствует повороту на угол α. При малых углах поворота $\sin\alpha \approx \alpha$. Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса через I, запишем основной закон динамики вращательного движения:

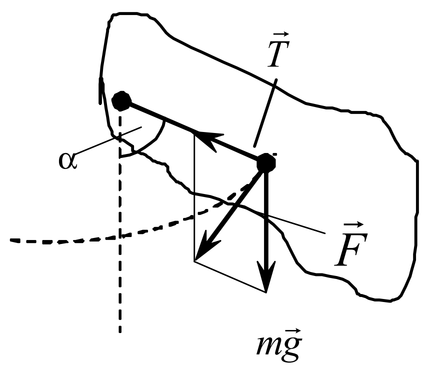


Рис. 2

$$I \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\,mgl\cdot\alpha. \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\cdot\alpha = 0.$$

Его решение аналогично решению уравнению (6).

Через ω_0^2 обозначена величина

$$\omega_0^2 = \frac{mgl_0}{I}. \tag{9}$$

При малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания. Частота колебаний зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника. Период колебаний маятника определим из соотношения (9):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_0}}\,. \tag{10}$$

Из сопоставления формул (8) и (10) видно, что математический маятник длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml_0}\,. \tag{11}$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Величину $l_{\text{пр}}$ называют приведенной длиной физического маятника.

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебания данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется ***центром качания*** физического маятника. Можно показать, что при подвесе маятника в центре качания приведенная длина, а значит, период колебаний будут теми же, что и вначале. ***Оборотным*** называется такой маятник, у которого имеются две точки подвеса на противоположных сторонах, например параллельные друг другу, закрепленные вблизи концов линейного маятника опорные призмы, за которые он может быть поочередно подвешен.

Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника основано на описанном выше свойстве, которое может быть иначе выражено следующим образом: ***если период колебаний относительно обеих осей подвеса одинаков, то расстояние между осями равно приведенной длине маятника***. С этой целью используется линейный маятник, состоящий из стержня с размещенными на нем призмами (оси подвеса) и грузами. Вдоль стержня могут перемещаться и закрепляться либо грузы, либо опорные призмы. Перемещением грузов или призм добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм периоды колебаний были одинаковыми. Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно $l_{\text{пр}}$. Измерив период колебаний такого мятника, можно найти ускорение g:

$$g = \frac{4\pi l_{\text{пр}}}{T_{\text{об}}^2}\,. \tag{12}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Определение ускорения свободного падения методом оборотного маятника

Цель работы: Изучить закономерности колебаний физического маятника, определить экспериментально ускорение свободного падения.

Приборы и принадлежности: Физический маятник; секундомер.

Описание установки

В данной работе используется маятник особой конструкции (рис.3). Он состоит из стержня (C), двух чечевиц ($Ч_1$ и $Ч_2$), двух призм ($П_1$ и $П_2$), за которые подвешивают маятник. В процессе измерения положение чечевицы $Ч_2$ может меняться. Путем перемещения чечевицы $Ч_2$ можно добиться того, чтобы периоды колебаний маятника T_1 и T_2 относительно обеих призм совпадали. В этом случае расстояние между призмами будет равно приведенной длине физического маятника $l_{пр}$, а период равен периоду колебания оборотного маятника $T_{об}$. Измерив $T_{об}$ и $l_{пр}$, можно по формуле (9) найти ускорение свободного падения.

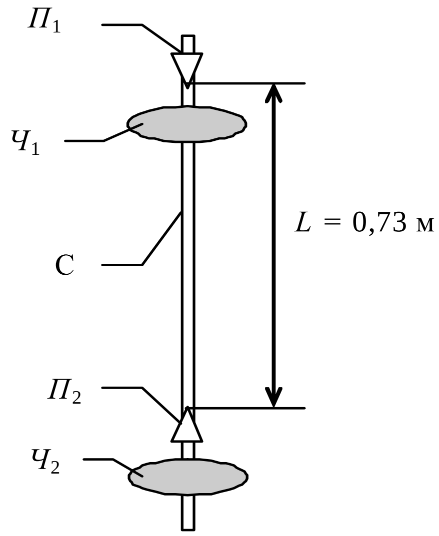


Рис. 3

Однако добиться полного совпадения периодов колебаний путем последовательного перемещения призмы чрезвычайно трудно. Поэтому в работе используется следующий метод. Измеряют периоды колебаний T_1 и T_2 относительно обеих призм при различных положениях чечевицы $Ч_2$. Затем строят график в прямоугольной системе координат, по оси абсцисс которого откладывают положение чечевицы, а по оси ординат – T_1 и T_2. В точке пересечения графиков периоды колебаний равны: $T_1 = T_2 = T_{об}$. В этом случае расстояние между призмами равно приведенной длине физического маятника. У маятника в нашей лабораторной установке $l_{пр} = 0{,}73$ *м*.

Экспериментальная часть

1. Установить подвижную чечевицу в крайнее положение и зафиксировать ее стопорным устройством. Подвесить маятник за призму $П_1$. Отклонить маятник на небольшой угол порядка 5° - 6° и отпустить его, одновременно

включив секундомер. Отсчитать двадцать полных колебаний и отключить секундомер. Показания секундомера, т.е. время t_1, занести в таблицу.

Таблица 1

№	*Положение чечевицы (в делениях)*	t_1 (c)	$T_1 = t_1/20$ (c)	t_2 (c)	$T_2 = t_2/20$ (c)
1	2				
2	4				
3	6				
4	8				
5	10				
6	12				
7	14				

2. Перевернуть маятник и подвесить за призму $П_2$ и вновь измерить время десяти полных колебаний – это время t_2. Результат занести в таблицу.
3. Снять маятник, положить на стол, подвинуть чечевицу на одно или два деления по указанию преподавателя, зафиксировать ее стопорным устройством. Подвесить маятник и вновь произвести измерения t_1 и t_2 в порядке, указанном в пунктах 2 и 3.
4. Произвести измерения периодов колебаний на обеих призмах при всех положениях чечевицы $Ч_2$, указанных преподавателем.
5. Построить графики зависимостей $T_1(h)$ и $T_2(h)$ (значения T_1 отмечать, например, крестиками, а T_2 – ноликами (чтобы не было путаницы).
6. Найти точку пересечения графиков. Ордината этой точки и есть период колебаний оборотного маятника $T_{об}$.
7. Вычислить ускорение свободного падения по формуле (12).

Оценка систематической погрешности

Оценим значение систематической погрешности. Для этого прологарифмируем выражение (9):

$$\ln g = \ln L - \ln 4\pi - 2\ln T_{об}.$$

Дифференцируем: $$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2\frac{dT_{об}}{T_{об}}.$$

Заменим дифференциалы на погрешности прямых измерений, а минус на плюс:

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T_{об}}{T_{об}}.$$

Погрешность в измерении L составляет $\Delta L = 5\cdot 10^{-3}\,м$, а в измерении времени $t = 0{,}01\ с$.

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение гармонического колебания.
2. Дайте определение частоты, циклической частоты, периода, амплитуды, элонгации, фазы гармонического колебания.
3. Найдите скорость точки при гармоническом колебании. Найдите ускорение колеблющейся точки.
4. Выведите дифференциальное уравнение гармонического колебания для физического, математического и пружинного маятников.
5. Какому условию удовлетворяет сила, действующая на материальную точку, совершающую гармоническое колебание?
6. Какая сила называется квазиупругой? Чему равен период колебания точки массой m под действием квазиупругой силы?
7. Найдите выражение для кинетической и потенциальной энергии колеблющейся точки. Чему равна полная энергия?
8. Дайте определения математического и физического маятников. Чему равны периоды их колебаний?
9. Какой маятник называется оборотным?
10. Что такое приведенная длина физического маятника? Чему она равна у математического маятника?
11. Как оценить систематическую погрешность измерений?
12. Для каких целей производится измерение времени десяти колебаний, а не одного колебания?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Определение ускорения свободного падения с помощью автоматизированного оборотного маятника

Цель работы: Изучить закономерности колебаний физического маятника, определить экспериментально ускорение свободного падения.

Приборы и принадлежности: Физический маятник; секундомер.

Описание установки

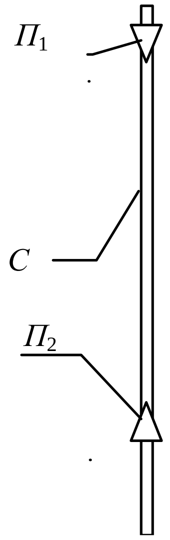


Рис.1.

В данной работе используется маятник особой конструкции (рис.1). Маятник состоит из стержня (C), двух призм ($П_1$ и $П_2$), за которые подвешивают маятник. В процессе измерения положение одной из призм ($П_2$) может изменяться. Путем перемещения призмы можно добиться того, чтобы периоды колебаний маятника T_1 и T_2 относительно обеих призм совпадали. В этом случае расстояние между призмами будет равно приведенной длине физического маятника $l_{пр}$, а период равен периоду колебания оборотного маятника $T_{об}$. Измерив $T_{об}$ и $l_{пр}$, ускорение свободного падения можно определить по формуле (12).

Однако добиться полного совпадения периодов колебаний путем последовательного перемещения призмы чрезвычайно трудно. Поэтому в работе используется следующий метод. Измеряют периоды колебаний T_0 и T_i относительно обеих призм при различных положениях призмы $П_2$. Затем строят график в прямоугольной системе координат, по оси абсцисс которой откладывают расстояние между призмами, а по оси ординат периоды колебаний. В точке пересечения графиков периоды колебаний равны. В этом случае расстояние между призмами равно приведенной длине физического маятника.

Для автоматического выполнения условия совпадения фазы маятника в момент включения и выключения секундомера на стержне закреплен магнитик, который включает или выключает секундомер при прохождении стержнем положения равновесия.

Опыт 1.

Целью опыта 1 является измерение периода колебаний маятника T_0 при подвесе его за неподвижную призму, закрепленную на конце стержня.

Положение магнитика на стержне можно изменять. При измерении T_0 магнитик на стержне установить вблизи подвижной призмы так, чтобы при колебаниях он проходил как можно ближе к геркону, но не задевал его. Геркон находится в медной трубке, прикрепленной к основанию установки. (Геркон –

герметический контакт. Устройство с консольно выполненными пружинками, запаянными в стеклянную трубку и контактирующими под действием магнитного поля.)

1. Отклонить маятник на небольшой угол и отпустить.
2. Установить секундомер на "нуль".
3. В момент одного из максимальных отклонений от положения равновесия нажать кнопку на секундомере и не отпускать ее в течение 10 колебаний. Отсчет числа колебаний, после нажатия на кнопку, начать с числа "нуль". После 10 полных колебаний кнопку отпустить. После очередного прохода магнитика мимо геркона секундомер будет автоматически остановлен. На секундомере будет зафиксировано время 10 колебаний. Вычислить время одного колебания, и занести в таблицу.

Таблица 1

	*Опыт*1 $П_1$	*Опыт* 2 $П_2$				
		h_1=	h_2=	h_3=	h_4=	h_5=
№ измерения	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
1						
2						
3						
ср. значения						

4. Повторить опыт 1 еще два раза.
5. Найти среднее значение периода колебаний T_0 за эту призму. Результаты опыта занести в таблицу.

Опыт 2.

Следующие пять серий измерений периода колебаний проводятся при подвешивании за другую призму $П_2$, которую можно перемещать по стержню. Конечной целью этих измерений является нахождение такого положения второй призмы, при котором период колебаний маятника $T_{об}$ на этой призме будет равен периоду T_0, найденному в опыте 1. Когда периоды $T_0 = T_{об}$, то расстояние между призмами будет равно приведенной длине физического маятника $l_{пр}$.

6. Подвесить маятник за призму 2. Отрегулировать положение магнитика так, чтобы он проходил как можно ближе к геркону, но не задевал его.

Положение призмы определяется по шкале нанесенной на конце стержня.

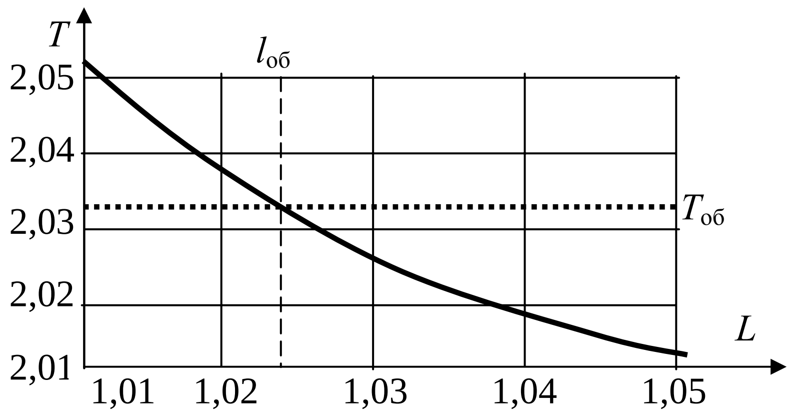


Рис. 2

Измерения периодов колебаний проводятся при положениях призмы указанных преподавателем. При каждом положении призмы проделать по три измерения периода колебаний. Найти средние значения периода при каждом положении призмы.

7. Построить график. Примерный образец графика приведен на рис. 2. На графике по оси абсцисс откладываются расстояния между призмами, а по оси ординат среднее значение периода колебаний за призму Π_1 и пять средних значений периодов колебаний за призму Π_2. Так как $T_0 = const$, то график этой функции будет иметь вид прямой линии параллельной оси абсцисс.

8. Определить по графику положение призмы Π_2 в котором кривые пересекаются. Если установить призму Π_2 в это положение, то периоды колебаний маятника при подвешивании за призму Π_1 и Π_2 становятся одинаковыми. Найденное положение призмы определяет $l_{пр}$.

9. Установить призму Π_2 в это положение, измерить период колебаний и сравнить с T_0. В случае если они равны, то значение $l_{пр}$ найдено правильно.

10. Подставить экспериментально найденные $l_{пр}$ и $T_{об}$ в формулу (12) и вычислить g.

Оценка систематической погрешности

Оценим значение систематической погрешности. Для этого

прологарифмируем формулу $g = \dfrac{4\pi^2 l_{пр}}{T_{об}^2}$. $\ln g = \ln l_{пр} - \ln 4\pi - 2 \ln T_{об}$.

Дифференцируем полученное выражение:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l_{пр}} - 2\frac{dT_{об}}{T_{об}}.$$

Заменим дифференциалы на погрешности прямых измерений, а минус на плюс:

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l_{пр}} + 2\frac{\Delta T}{T_{об}} = \frac{\Delta l}{l_{пр}} + 2\frac{\Delta T}{10 \cdot T_{об}}.$$

Погрешность при измерении расстояния между призмами $\Delta l = 5 \cdot 10^{-3}$ м,
а погрешность в измерении времени $\Delta T = 0{,}01$ с.

Результат записать в виде:

$$g = g_{ср} \pm \Delta g$$

Сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение гармонического колебания.
2. Дайте определение частоты, циклической частоты, периода, амплитуды, элонгации, фазы гармонического колебания.
3. Найдите скорость точки при гармоническом колебании. Найдите ускорение колеблющейся точки.
4. Выведите дифференциальное уравнение гармонического колебания.
5. Какому условию удовлетворяет сила, действующая на материальную точку, совершающую гармоническое колебание?
6. Какая сила называется квазиупругой? Чему равен период колебания точки массой m под действием квазиупругой силы?
7. Найдите выражение для кинетической и потенциальной энергии колеблющейся точки. Чему равна полная энергия?
8. Дайте определение математического и физического маятников. Чему равны периоды их колебаний?
9. Какой маятник называется оборотным?
10. Что такое приведенная длина физического маятника? Чему она равна у математического маятника?
11. Как оценить систематическую погрешность измерений?
12. Для каких целей производится измерение времени десяти колебаний, а не одного колебания?
13. Как уменьшить систематическую погрешность измерений?

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Введение

Рассмотрим кратко динамику твердого тела и, прежде всего, его вращение, причем будем предполагать, что заметных деформаций не происходит. Т.е. мы будем рассматривать движение так называемого абсолютно твердого тела.

В механике под ***абсолютно твердым телом понимают такую идеализированную систему материальных точек, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными.***

В классической механике под материальными точками понимают не атомы и молекулы, а достаточно малые макроскопические части, на которые мысленно можно разделить рассматриваемую систему.

Вращательное движение тела важно не только в связи с его распространенностью, но и потому, что в соответствии с принципом независимости движений любое произвольное движение может быть представлено совокупностью вращения относительно центра масс и поступательного движения этого центра.

В самом общем случае твердое тело может вращаться вокруг неподвижной точки; при этом его движение можно свести к трем независимым вращениям вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через точку. Однако эта задача очень сложна, и мы ограничимся рассмотрением вращения тела только вокруг одной оси. Ось может быть неподвижна (например, ось ротора электродвигателя) или перемещаться в пространстве (например, ось вращения колеса, катящегося по шоссе, – так называемая мгновенная ось, которая в каждый момент совпадает с линией соприкосновения колеса с шоссе).

Вращательное движение вокруг оси – это такое движение твердого тела, при котором имеются, по крайней мере, две точки O и O', остающиеся все время неподвижными (рис. 1). Прямая, проходящая через эти две точки, называется ***осью вращения***. Все точки при вращательном движении описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и с центрами, лежащими на этой оси.

Тело, совершающее вращательное движение, имеет одну степень свободы, и его положение определяется углом φ (см. рис.1). Этот угол образуют две полуплоскости: одна проведена через ось вращения, жестко связанна с телом и вращается вместе с ним, другая, также проходящая через ось вращения неподвижна.

Основными кинематическими

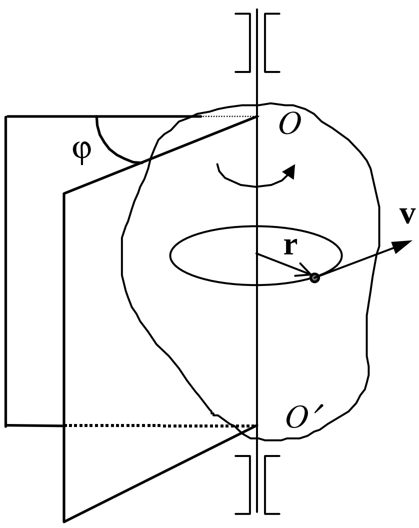


Рис. 1

характеристиками вращательного движения являются $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ – его *угловая скорость* и $\beta = \dfrac{d\omega}{dt}$ – *угловое ускорение*. Для любой точки, отстоящей от оси на расстояние r, ее линейная скорость $\upsilon = \omega \cdot r$, касательное ускорение $a_\tau = \beta \cdot r$, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 r$ и полное ускорение $a = r\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$.

Во всех случаях бросается в глаза устойчивость, приобретаемая телом при вращении. Так, металлический диск (например, монету) трудно поставить на ребро, чтобы при этом он стоял устойчиво; но если закрутить его вокруг вертикального диаметра, он приобретает значительную устойчивость.

Обобщая результаты наблюдений, можно заключить, что тело, вращающееся вокруг оси, проходящей через центр масс, должно сохранять вращение сколь угодно долго, если оно освобождено от внешних воздействий. Это заключение аналогично первому закону Ньютона для поступательного движения.

Вращение отдельных точек (т.е. их ускоренное движение) обеспечивается при этом внутренними силами, возникающими при деформации тела (хотя мы ими и пренебрегаем, считая, что форма тела сохраняется при его вращении, но в действительности деформации имеются).

Момент силы и момент инерции

При рассмотрении вращения твердого тела понятие о силах заменяется понятием о ***моментах сил***, а понятие о массе – понятием о ***моменте инерции***. Для того чтобы выяснить содержание понятий момента сил и момента инерции, рассмотрим вначале вращение одной материальной точки A с массой m по окружности радиуса r (рис. 2). Пусть на точку A действует постоянная сила F**,** направленная по касательной к окружности. Тогда точка A приобретает постоянное тангенциальное ускорение a_τ, определяемое равенством:

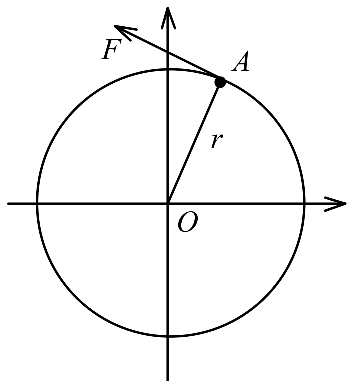


Рис. 2

$$F = m\, a_\tau. \tag{1}$$

Поскольку касательное (тангенциальное) ускорение связано с угловым соотношением $\beta = a_\tau / r$, то равенство (1) заменится выражением:

$$F = m \cdot r \cdot \beta. \tag{2}$$

Умножив правую и левую части этого уравнения на r, получим:

$$r \cdot F = m \cdot r^2 \beta.$$

Величина

$$M = r \cdot F,$$

численно равная произведению силы на длину перпендикуляра, опущенного на направление силы из точки O (центра вращения), называется ***моментом силы*** относительно точки O.

Величина $$I = m \cdot r^2,$$

численно равная произведению массы точки на квадрат расстояния от оси вращения, называется ***моментом инерции*** точки относительно этой оси.

Введя понятия момента силы и момента инерции, можно представить уравнение (2) в виде

$$M = I\cdot\beta. \qquad (3)$$

Если сравнить полученное нами равенство с основным законом динамики поступательного движения $\vec{F} = m\vec{a}$, то мы видим, что момент силы связан с моментом инерции так же, как сила связана с массой точки.

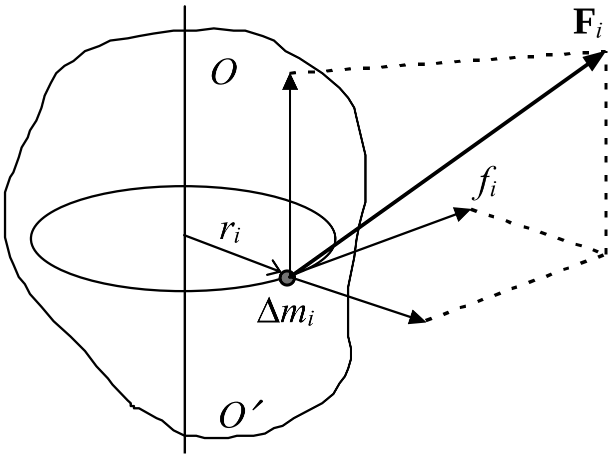


Рис. 3

Перейдем теперь к рассмотрению твердого тела, вращающегося вокруг оси *OO′* (рис.3). Разобьем тело на большое число весьма малых элементов с массами Δm_i. Рассмотрим один из таких элементов Δm_i. Пусть его расстояние от оси вращения равно r_i, а сила, действующая на него, равна $\vec{F}_i$. Эту силу можно разложить на три компонента. Один из них параллелен оси вращения, другой перпендикулярен ей, а также перпендикуля рии тела в данной точке. Наконец, третий компонент f_i совпадает по направлению с касательной к траектории рассматриваемого элемента. Два первых компонента будут только воздействовать на ось вращения, деформируя ее, а третий компонент, направленный по касательной, будет создавать тангенциальное ускорение. Для него можно записать уравнение $f_i = \Delta m_i\, a_{\tau i}$ или $f_i = \Delta m_i\, r_i\, \beta$. Помножив на r_i, получим: $f_i\, r_i = \Delta m_i\, r_i^2\, \beta$.

Запишем такие же равенства для всех остальных элементов, а затем просуммируем их: $\Sigma f_i\, r_i = \Sigma\, \Delta m_i\, r_i^2\, \beta$.

Угловое ускорение одинаково для всех элементов, поэтому его можно вынести за знак суммы $\Sigma f_i\, r_i = \beta\cdot\Sigma\Delta m_i\cdot r_i^2$.

Величина $\Sigma f_i\cdot r_i$ представляет собой сумму моментов сил, действующих на все элементы твердого тела, т.е. она представляет собой ***полный момент сил***, действующих на твердое тело, относительно оси вращения *OO′*.

Величина,равная сумме моментов инерции отдельных элементов, на которые мы разбили тело, называется ***моментом инерции*** тела относительно данной оси *OO′*.

$$I = \Delta m_i\cdot r_i^2$$

Используя эти понятия, равенство (3) можно переписать так:

$$M = I\cdot\beta.$$

Это уравнение аналогично уравнению ***F = ma***. Роль массы играет момент инерции, роль линейного ускорения – угловое ускорение, роль силы –

суммарный момент внешних сил. Иногда его называют ***вторым законом динамики для вращательного движения.***

Моменты инерции некоторых тел

Момент инерции тонкостенного полого цилиндра массой m и радиуса R относительно его оси симметрии

Разрежем цилиндр параллельно его оси OO' на тонкие полоски массой Δm_i (рис.4). Т.к. толщина стенок цилиндра мала, мы можем считать, что все части одной такой полоски лежат на одинаковом расстоянии от оси OO'. Поэтому момент инерции каждой полоски равен

$$\Delta I = \Delta m_i R^2,$$

где Δm_i – масса полоски.

Момент инерции всего тонкостенного полого цилиндра

$$I = \Sigma \Delta m_i R^2 = R^2 \Sigma \Delta m_i.$$

$\Sigma \Delta m_i$ представляет массу всего цилиндра, поэтому

$$I = mR^2.$$

Относительно какой-либо другой оси момент инерции того же цилиндра будет иным.

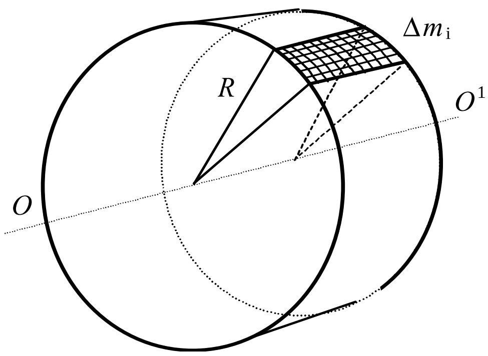


Рис. 4

Понятие момента инерции было введено нами при рассмотрении вращения твердого тела. Однако следует иметь в виду, что эта величина существует безотносительно к вращению. Каждое тело, независимо от того, ли оно или покоится, обладает определенным моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется ли оно или находится в состоянии покоя.

Формула для вычисления моментов инерции

Если тело однородно, то можно ввести понятие ***плотности.***

$$\rho = M/V.$$

где M – масса тела;

V – объем данного тела.

Тогда формулу для момента инерции можно преобразовать

$$I = \rho \sum_i r_i^2 \Delta V_i .$$

Если рассматривать предел $\Delta V_i \to 0$, то от суммирования можно перейти к интегрированию:

$$I = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dV .$$

Момент инерции однородного диска

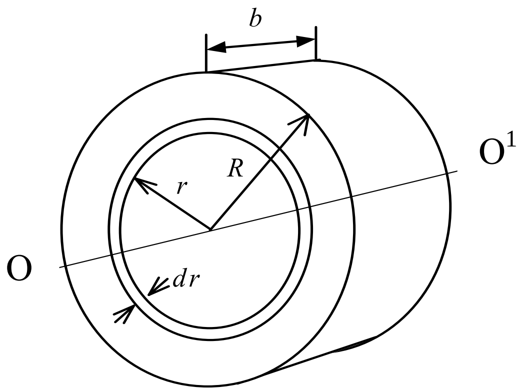


Рис. 5

Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr (рис. 5). Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном r. Объем слоя равен

$dV = 2\pi\, b\, r\, dr$,

где b – толщина диска.

Подставим значение для элемента объема в интеграл:

$$I = \rho\int r^2 dV = \rho\int_0^R 2\pi b r^3 dr = 2\pi\cdot b\cdot\rho\cdot\frac{R^4}{4}.$$

Т.к. масса диска $m = \rho\cdot b\cdot\pi R^2$, то

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляет собой алгебраическую сумму кинетических энергий отдельных его элементов, т.е.

$E_{кин} = \sum \Delta m_i\cdot \upsilon_i^2/2 = \sum \Delta m_i r_i^2\, \omega^2/2 = \omega^2/2 \sum \Delta m_i r_i^2 = I\omega^2/2.$

Найдем работу внешней силы при повороте тела на угол $\Delta\varphi$.

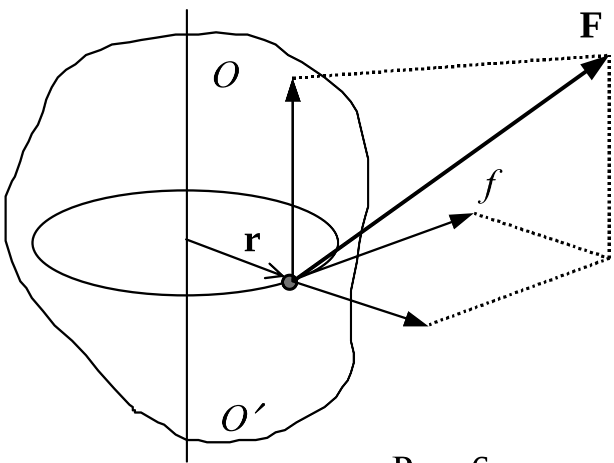


Рис. 6

Пусть к телу приложена сила $\vec{F}$ (см. рис. 6). Для нахождения момента этой силы относительно оси OO' требуется знать ее проекцию f на направление, перпендикулярное как оси OO', так и вектору $\vec{r}$. Момент силы получается равным

$M = f\cdot r$,

где r – кратчайшее расстояние между точкой приложения силы $\vec{F}$ и осью OO'. При повороте тела на угол $\Delta\varphi$ точка приложения силы переместится на длину дуги ΔS. Отсюда работа, совершенная силой $\vec{F}$, будет равна $\Delta A = f\cdot\Delta S$, но $\Delta S = r\cdot\Delta\varphi$, тогда $\Delta A = f\cdot\Delta\varphi\cdot r$.

Или, так как $f\cdot r = M$ – момент силы $\vec{F}$, то $\Delta A = M\cdot\Delta\varphi$.

Когда момент M постоянен, тогда работа, совершаемая при повороте тела на угол φ, равна $A = M\cdot\varphi$.

Если тело движется поступательно со скоростью υ и одновременно вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, то полная кинетическая энергия его будет

$$E_{кин} = m\cdot\upsilon^2/2 + I\cdot\omega^2/2.$$

Теорема Штейнера

Если для какого-либо тела известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции, то легко может быть найден и момент инерции относительно любой другой оси, параллельной данной. Определение этого момента производится по теореме Штейнера:

Момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы этого тела на квадрат расстояния между осями

$$I = I_c + m \cdot a^2.$$

В качестве примера на применение теоремы Штейнера найдем момент инерции I тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню. Известно, что для стержня

$$I_c = m \cdot l^2 / 12.$$

Тогда момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец:

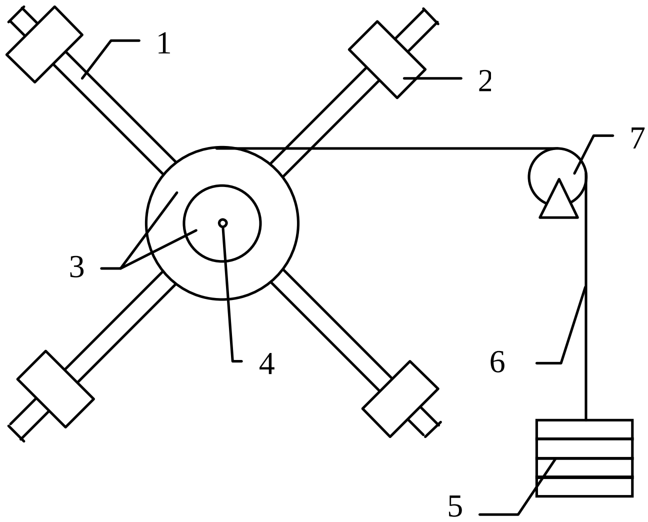
$$I = m \cdot l^2 / 12 + m \cdot l^2 / 4 = m \cdot l^2 / 3.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Определение момента инерции маятника Обербека

<u>Цель работы:</u> изучить основные характеристики вращательного движения, экспериментальным путем определить значение момента инерции маятника Обербека и сравнить со значением момента инерции, найденного расчетным путем.

Описание установки



Маятник Обербека представляет собой систему, состоящую из двух стержней (1), на концах которых находятся тела одинаковой массы (2), двух шкивов (3). Маятник может вращаться вокруг оси (4), закрепленной в подшипниках. Маятник приводится в движение грузиками (5). Эти грузики надеваются на болт с шайбой. Болт прикреплен к нити (6). Нить перекинута через блок (7) и намотана на один из шкивов.

Маятник Обербека имеет простую конфигурацию и его момент инерции легко найти расчетным путем.

Оба стержня, используемые в установке, в первом приближении, можно считать тонкими, поэтому:

$$I_{\text{ст}} = 2\frac{1}{12}m_{\text{ст}}l_{\text{ст}}^2 = \frac{m_{\text{ст}}l_{\text{ст}}^2}{6}.$$

Момент инерции всех четырех грузиков на концах стержней равен

$$I_{\text{гр}} = 4\, m_{\text{гр}}r^2,$$

т.к. в первом приближении их можно считать материальными точками. Моментами инерции оси и шкивов можно пренебречь, т.к. их значение мало по сравнению с моментами инерции грузиков и стержней.

Таким образом, общий момент инерции маятника Обербека может быть рассчитан по формуле:

$$I_{\text{теор}} = \frac{m_{\text{ст}}l_{\text{ст}}^2}{6} + 4\, m_{\text{гр}}r^2. \qquad (1)$$

<u>Параметры узлов установки:</u>

$m_{\textbf{ст}}$ = 0,181 кг – масса стержня;

$l_{\textbf{ст}}$ = 0,465 м – длина стержня;

$m_{\text{гр}}$ = 0,123 кг – масса грузиков на стержнях;

$D_{шк1}$ = 0,034 м – диаметр большого шкива;
$D_{шк2}$ = 0,017 м – диаметр малого шкива;
$m_б$ = 0,04 кг – масса болта с шайбой.

Задание 1

Вычислить значение момента инерции маятника Обербека по формуле (1). Это значение является величиной, которую вы ожидаете получить при выполнении лабораторной работы.

При оценке величины $I_{теор}$ положить $r_{гр}$ – 0,2 м.

Вывод расчетной формулы для обработки экспериментальных результатов

Расчетную формулу получим на основе закона сохранения энергии. Пренебрегая трением, можно записать

$$mgH = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (2)$$

где m – масса болта и гирь;
I – момент инерции маятника;
g – ускорение свободного падения;
ω – угловая скорость вращения мятника;
υ – линейная скорость грузика m;
H – путь, пройденный грузом за время t.

Если нить нерастяжима и нет проскальзывания между нитью и шкивом, то угловая скорость

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{2\upsilon}{D}, \qquad (3)$$

где D – диаметр шкива, поэтому

$$mgH = \frac{2 \cdot I \cdot \upsilon^2}{D^2} + \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (4)$$

откуда

$$I = \frac{mD^2}{4}\left(\frac{2gH}{\upsilon^2} - 1\right). \qquad (5)$$

Непосредственно измеряемыми величинами являются: H – расстояние, проходимое грузом и t – время, за которое он проходит это расстояние.

Введем в формулу (5) непосредственно измеряемые величины. Т.к. движение маятника равноускоренное с нулевой начальной скоростью, то

$H = \frac{at^2}{2}$, а $\upsilon = at$, откуда следует, что

$$\upsilon = \frac{2H}{t}. \qquad (6)$$

Подставив (6) в формулу (3), получим

$$I = \frac{mD^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2H} - 1\right). \tag{7}$$

Для нашей установки выполняется неравенство:

$$\frac{gt^2}{2H} >> 1. \tag{8}$$

Поэтому расчетная формула имеет окончательный вид:

$$I = \frac{mD^2}{4}\frac{gt^2}{2H}. \tag{9}$$

Для удобства расчетов приведем формулу (9) к виду

$$I = k\frac{mt^2}{H}, \tag{10}$$

где

$$k = \frac{D^2 g}{8} = 1{,}42 \cdot 10^{-3}. \tag{11}$$

Экспериментальная часть

1. Для обработки экспериментальных результатов заготовьте таблицу.
2.

Таблица *1*

H (м)	M (кг)	t (с)	$\bar{t}$ (с)	I (кг·м^2)	$\bar{I}$ (кг·м^2)	ΔI (кг·м^2)

2. Необходимо провести опыты с тремя грузиками m. Значения масс грузиков согласуйте с преподавателем.
3. Высоту падения грузиков H в опытах лучше не изменять. Согласуйте с преподавателем высоту падения грузиков и попросите инструмент для измерения этой высоты.

4. Произведите по три измерения времени падения каждого грузика и занесите результаты в таблицу.
5. Рассчитайте значение I по формуле (10) с каждым грузиком.
6. Найдите среднее значение I и занесите в таблицу
7. Сравните значения I и $I_{теор}$ и проанализируйте причину расхождений, если они имеются. Сделайте выводы.

Оценка погрешности метода

1. Прологарифмируем выражение (1)

$$\ln I = \ln m + 2 \ln D + 2 \ln t - \ln 4 + \ln g + - \ln 2 - \ln H. \qquad (12)$$

2. Возьмем дифференциал от формулы (12)

$$\frac{dI}{I} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dD}{D} + 2\frac{dt}{t} - \frac{dH}{H}. \qquad (13)$$

3. Заменим в формуле (13) минус на плюс, а дифференциалы на приращения. Приращениями являются приборные погрешности. Получим

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta D}{D} + 2\frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta H}{H}. \qquad (14)$$

4. При вычислении ε положить следующие погрешности:
массы Δm = 0, 001 кг;
диаметра шкива $\Delta D = 10^{-3}$ м;
времени Δt = 0,01 с;
высоты ΔH = 0,005 м.
5. Абсолютную погрешность вычислить по формуле:

$$\Delta I = \varepsilon\, I. \qquad (15)$$

6. Ответ записать в виде

$$I \pm \Delta I. \qquad (16)$$

Контрольные вопросы

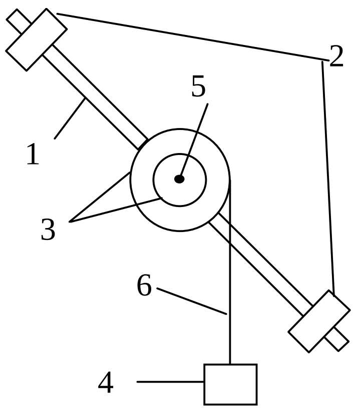
1. Дать определение угловой скорости, углового ускорения и связь их с линейными характеристиками.
2. Чему равен момент инерции точки относительно некоторой оси?
3. Чему равен момент инерции тела относительно некоторой оси? Каков физический смысл момента инерции?
4. Чему равен момент инерции тонкого кольца относительно оси симметрии?
5. Выведите формулу для вычисления момента инерции сплошного диска относительно оси симметрии.
6. Выведите формулу для вычисления момента инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через середину и перпендикулярной стержню.
7. Чему равен момент силы относительно некоторой оси? Как направлен вектор момента силы?
8. Что такое плечо силы?
9. Выведите основной закон динамики вращательного движения.
10. Сформулируйте теорему Штейнера.
11. Найдите момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню.
12. Найдите момент инерции сплошного диска относительно оси, отстоящей от оси симметрии на расстоянии $2R$ и параллельной ей.
13. Выведите формулу для расчета относительной погрешности.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Определение момента инерции стержня с грузиками.

<u>*Цель работы:*</u> изучить основные характеристики вращательного движения, экспериментальным путем определить значение момента инерции маятника и сравнить со значением момента инерции, найденного расчетным путем.

1. Описание установки



Лабораторная установка представляет собой систему, состоящую из стержня (1), на концах которого находятся два тела (2) одинаковой массы; двух шкивов (3). С помощью груза (4) система приводится во вращение вокруг оси (5). Груз (4) прикреплен к тросику (6), который наматывается на один из шкивов (большой).

Т.к. система имеет простую симметричную конфигурацию, то его момент инерции легко найти расчетным путем.

Момент инерции стержня, вращающегося вокруг оси перпендикулярной стержню и проходящей через его середину можно найти по формуле

$$I_{ст} = \frac{m_{ст} l^2}{12}.$$

Момент инерции двух грузиков на концах стержня равен

$$I_{гр} = 2 m_т r^2.$$

Поэтому полный момент инерции системы

$$I_{теор} = \frac{m_{ст} l^2}{12} + 2 m_т \cdot r_т^2. \quad (1).$$

2. Задание 1

Вычислить значение момента инерции маятника стержня с грузиками по формуле (1). Это значение является величиной, которую вы ожидаете получить при выполнении лабораторной работы.

При расчете момента инерции положить:

$l_{ст}$ = 0,465 м;

$m_{ст}$ = 0,18 кг;

$m_т$ = 0,123 кг;

$r_т$ = 0,215 м.

Результат расчета $I_{теор}$ занести в протокол.

3. Экспериментальная часть

Для обработки экспериментальных результатов заготовьте таблицу.

Таблица 1

Номер опыта	*Число оборотов* N	*Время падения* t (с)	*Высота падения* H (м)	*Момент трения* $M_{тр}$ (Н·м)	*Угловое ускорение* β (рад/с^2)	*Момент инерции* $I_{экс}$ (кг·м^2)	$I_{экс} = \bar{I} \pm \Delta I$ (кг·м^2)
1							
2							
3							
Средние значения							

4. Опыт 1

1.При выполнении работы используется микрокалькулятор. Микрокалькулятор используется в роли счетчика оборотов вертушки.

Подключить разъем от проводов микрокалькулятора к разъему провода от геркона. Подключить микрокалькулятор к сети.

2.Дважды нажать кнопку "С" микрокалькулятора.

3.Набрать цифру "1".

4.Нажать кнопку "+".

5.Вертушку привести во вращение с небольшой угловой скоростью для того, чтобы убедиться, что вращение происходит свободно, а микрокалькулятор считает обороты. Если что - либо разрегулировано, то отрегулировать самостоятельно или обратиться к преподавателю.

6.Навить тросик (красный провод) с грузом на шкив. Высоту подъема груза согласовать с преподавателем.

7.Нажать кнопку "С" на микрокалькуляторе.

8.Установить секундомер на нуль.

9.Установить палец на кнопку секундомера, но пока не нажимать его.

10.Одновременно отпустить вертушку и нажать кнопку секундомера. Вертушку при отпускании не толкать назад или вперед.

11.Кнопку секундомера быстро отпустить в момент удара грузика о пол. Вертушку же не останавливать до тех пор, пока она сама не остановиться. На микрокалькуляторе, после остановки вертушки, будет зафиксировано число оборотов вертушки N.

12.Занести в таблицу показания секундомера и микрокалькулятора.

13.Груз при падении опустился на высоту H. Измерить эту высоту.

Результат занести в таблицу.

14.Энергия, которая была сообщена маятнику, равна $m_{гр}gH$. В конечном итоге эта энергия была израсходована на трение в осях и сопротивление воздуха от начала вращения до полной остановки вертушки. Поэтому мы можем записать:

$$M_{\text{тр}}\cdot 2\pi\cdot N = m_{\text{гр}}\cdot g\cdot H,$$

Откуда можно найти момент сил трения

$$M_{\text{тр}} = \frac{m_{\text{гр}} g\cdot H}{2\pi N}. \qquad (2),$$

где N - полное число оборотов вертушки до остановки;

$2\pi\cdot N$ – полный угол в радианах;

$A = M_{\text{тр}}\cdot 2\pi\cdot N$ – работа сил трения;

$m_{\text{гр}} = 0{,}116$ кг – масса груза на тросике.

15. Вычислить момент сил трения $M_{\text{тр.}}$ Результат занести в протокол.

16. Ускорение a, с которым падал груз, может быть найдено из формулы:

$$H = \frac{at^2}{2}.\ \text{Т.е.}\ a = \frac{2H}{t^2}.$$

17. Линейное ускорение связано с угловым ускорением вертушки соотношением:

$$\beta = \frac{a}{R},$$

где $R = 0{,}017$ м. - радиус шкива, на который наматывали тросик.

18. Вычислить β по формуле

$$\beta = \frac{2H}{R\cdot t^2}. \qquad (3)$$

Результат занести в таблицу.

19. Уравнение движения нашей вертушки может быть записано так:

$$M - M_{\text{тр}} = I\cdot\beta.$$

Здесь $M = m_{\text{гр}}\cdot g\cdot R$ - вращающий момент, который создает падающий груз на маятник. Т.е.

$$m_{\text{гр}}\cdot g\cdot R - M_{mp} = I\cdot\beta,$$

откуда

$$I_{\text{экс}} = \frac{m_{\text{гр}} g\cdot R - M_{\text{тр}}}{\beta}. \qquad (4)$$

Таким образом, мы можем найти момент инерции вертушки из экспериментальных измерений.

Произвести опыт 1 три раза и выполнить все указания к нему

Найти среднее значение $I_{\text{экс}}$, и занести в таблицу.

5. Оценка погрешности метода

1. Прологарифмируем выражение (1)
2. Возьмем от него дифференциал.

$$\frac{dI}{I} = \frac{dm_{cm}}{m_{cm}} + 2\frac{dl_{cm}}{l_{cm}} + \frac{dm_m}{m_m} + \frac{2dr_m}{r_m}. \qquad (5)$$

3. Заменим в формуле (5) дифференциалы на приращения.

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m_{cm}}{m_{cm}} + 2\frac{\Delta l_{cm}}{l_{cm}} + \frac{\Delta m_m}{m_m} + \frac{2\Delta r_m}{r_m}. \qquad (6)$$

4. При вычислении ε положить следующие погрешности:
массы стержня $\Delta m_{ст} = 0,005$ кг;
массы грузиков на концах стержня $\Delta m_{т} = 0,002$кг.
Погрешности в измерении длин:

$$\Delta r_{т} = \Delta l_{ст} = 0,05\text{м}.$$

5. Абсолютную погрешность вычислить по формуле:

$$\Delta I = \varepsilon I. \qquad (7)$$

6. Ответ записать в виде

$$I \pm \Delta I. \qquad (8)$$

6. Контрольные вопросы

1. Чему равен момент инерции материальной точки массой m относительно некоторой оси, отстоящей от точки на расстоянии r?
2. Чему равен момент инерции тела произвольной формы относительно некоторой оси?
3. Чему равен момент инерции тонкого кольца массой m и радиусом R относительно оси симметрии?
4. Выведите формулу для вычисления момента инерции сплошного диска массой m и радиуса R относительно оси симметрии.
5. Выведите формулу для вычисления момента инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной L относительно оси, проходящей через середину и перпендикулярной стержню.
6. Чему равен момент силы относительно некоторой оси?
7. Что такое плечо силы?
8. Запишите основной закон динамики вращательного движения.
9. Назовите основные кинематические характеристики вращающегося твердого тела. Как связаны линейная и угловая скорости? Как связаны линейное и угловое ускорения?
10. Сформулируйте теорему Штейнера.
11. Найдите момент инерции тонкого стержня массой m и длиной L относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню.
12. Найдите момент инерции сплошного диска массой m и радиусом R относительно оси, отстоящей от его оси симметрии на расстоянии $2R$ и параллельной ей.
13. Выведите формулу для расчета относительной погрешности момента инерции.
14. Сформулируйте цель работы.
15. Расскажите порядок выполнения работы.
16. Как в данной работе определяется момент сил трения.
17. Как определяется угловое ускорение вертушки.
18. Сравните экспериментальное значение момента инерции с теоретическим.
19. Сделайте выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Маятник Максвелла

<u>Цель работы</u>: изучить основные характеристики и особенности вращательного движения; экспериментальным путём определить значение момента инерции маятника Максвелла и сравнить со значением момента инерции, найденным расчетным путем.

<u>Приборы и принадлежности</u>: установка маятника Максвелла с миллисекундомером.

Устройство и принцип работы установки

Общий вид установки представлен на рис.1.

На вертикальной стойке основания 1 крепятся два кронштейна: верхний 2 и нижний 3. Верхний кронштейн снабжен электромагнитным устройством 4 для крепления и регулировки бифилярного подвеса 5. Маятник представляет собой диск 6, закрепленный на оси 7, подвешенный на бифилярном подвесе. На диске крепятся сменные кольца 8. Маятник со сменными кольцами фиксируется в верхнем исходном положении с помощью электромагнита.

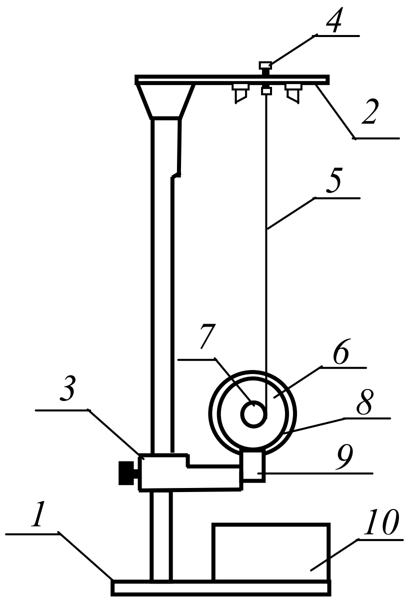


Рис. 1.

На вертикальной стойке нанесена миллиметровая шкала, по которой определяется ход маятника.

Фотодатчик 9 предназначен для подачи электрического сигнала на миллисекундомер 10 в момент пересечения его оптической оси непрозрачным предметом. Кронштейн 3 позволяет устанавливать фотодатчик в любом положении шкалы.

Принцип работы маятника Максвелла основан на том, что поднятый на высоту H он обладает потенциальной энергией mgH. После отключения электромагнита маятник начнёт раскручиваться, и его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию поступательного движения $m\upsilon^2/2$ и энергию вращательного движения $I\omega^2/2$. На основании закона сохранения механической энергии имеем:

$$mgH = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (1)$$

где m – масса маятника, т.е. сумма масс диска, кольца и оси;

H – путь, проходимый маятником;

I – полный момент инерции маятника.

Вывод расчетной формулы для обработки экспериментальных результатов

Непосредственно измеряемыми величинами в нашем методе являются:

H – высота падения груза;

t – время, за которое груз опустится на эту высоту.

Введем в формулу (1) непосредственно измеряемые величины. Т.к. движение маятника равноускоренное с нулевой начальной скоростью, то

$$H = at^2/2, \quad \text{а} \quad \upsilon = a\cdot t,$$

откуда следует

$$\upsilon = 2H/t. \qquad (2)$$

Кроме того, скорость движения маятника υ связана с его угловой скоростью вращения ω соотношением $\omega = \upsilon/R_0$, где R_0 – радиус оси. Подставив (2) в формулу (1), с учетом последней формулы получим:

$$I = mR_0^2\left(\frac{gt^2}{2H} - 1\right). \qquad (3)$$

В нашей установке выполняется неравенство:

$$\frac{gt^2}{2H} >> 1. \qquad (4)$$

Поэтому расчетную формулу можно упростить:

$$I = mR_0^2\,\frac{gt^2}{2H}. \qquad (5)$$

Для удобства расчетов запишем формулу (5) в виде:

$$I = k\cdot m\cdot t^2, \qquad (6)$$

$$\text{где } k = \frac{gR_0^2}{2H}. \qquad (7)$$

<u>*Параметры установки.*</u>

$R_0 = 5\cdot10^{-3}$ м – радиус оси;

$m_0 = 22\cdot10^{-3}$ кг – масса оси;

$m_д = 0{,}15$ кг – масса диска;

$R_д = 0{,}09$ м – радиус диска;

R_1 и R_2 (измерить!) – внутренний и внешний радиус сменного кольца;

$m_{\text{к}}$ – масса кольца (выбита на каждом кольце).

Задание:

1. Вычислить момент инерции маятника по формуле

$$I_{\text{теор}} = \frac{m_0 R_0^2}{2} + \frac{m_{\text{д}} R_{\text{д}}^2}{2} + m_{\text{к}} \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}. \qquad (8)$$

2. Вычислить k по формуле (7)

3. Подготовить таблицу

Таблица 1

<table>
<tr><th>H
($м$)</th><th>m
($кг$)</th><th>t
($с$)</th><th>$\bar{t}$
($с$)</th><th>I
($кг \cdot м^2$)</th><th>$\bar{I}$
($кг \cdot м^2$)</th><th>ΔI
($кг \cdot м^2$)</th></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Экспериментальная часть

1. С помощью четырех винтов на основании прибора добиться того, чтобы диск маятника не ударял по кронштейну с фотодатчиками.
2. Включить в сеть шнур питания прибора. Нажать кнопку "сеть".
3. Вращая маятник, зафиксировать его в верхнем положении при помощи электромагнита. Внимательно следить за тем, чтобы нить навивалась на ось виток к витку. В зафиксированном положении нити не должны быть сильно натянуты, в этом случае маятник не отделится от магнита при нажатии кнопки "пуск".
4. Нажать кнопку "сброс" и убедиться, что во всех разрядах индикатора установились нули.
5. Нажать кнопку "пуск" на миллисекундомере.
6. Произвести отсчет времени и занести в таблицу.
7. Занести в таблицу высоту падения маятника.
8. С каждым сменным кольцом произвести не менее трех измерений (количество опытов согласовать с преподавателем).

Вычисление погрешности

1. Прологарифмируем выражение (5):

$$\ln I = \ln m + 2\ln R_0 + 2\ln t - \ln 2 - \ln H. \qquad (9)$$

2. Возьмем дифференциал от формулы (9):

$$\frac{dI}{I} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dR_0}{R_0} + 2\frac{dt}{t} - \frac{dH}{H}. \qquad (10)$$

3. Заменим в формуле (10) "–" на "+", а дифференциалы на приращения. Приращениями являются приборные погрешности. Получим

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta R_0}{R_0} + 2\frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta H}{H}. \qquad (11)$$

4. При вычислении ε положить следующие погрешности:

массы кольца Δm = 0, 01 кг;

радиуса оси $\Delta R_0 = 0{,}3\cdot 10^{-3}$ м;

времени Δt = 0,01 с;

высоты ΔH = 0,005 м.

5. Абсолютную погрешность вычислить по формуле:

$$\Delta I = \varepsilon I. \qquad (12)$$

6. Результат записать в виде

$$I = \overline{I} + \Delta I. \qquad (13)$$

7. Сравнить экспериментальное и теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла и сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Чему равен момент инерции точки относительно некоторой оси?
2. Чему равен момент инерции тела относительно некоторой оси?
3. Чему равен момент инерции тонкого кольца относительно оси симметрии?
4. Выведите формулу для вычисления момента инерции относительно оси симметрии.
5. Выведите формулу для вычисления момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через середину и перпендикулярной стержню.
6. Чему равен момент силы относительно некоторой оси?
7. Что такое плечо силы?
8. Выведите основной закон динамики вращательного движения.
9. Назовите основные кинематические характеристики вращающегося твердого тела. Какова связь между линейной и угловой скоростью? Между линейным и угловым ускорением?
10. Сформулируйте теорему Штейнера.
11. Найдите момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню.
12. Найдите момент инерции сплошного диска относительно оси, отстоящей от оси симметрии на расстоянии $2R$ и параллельной ей.
13. Расскажите порядок выполнения работы.
14. Выведите формулу для расчета относительной погрешности.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Определение моментов инерции тел с помощью крутильного маятника

Цель работы: экспериментальным путем найти значение момента инерции крутильного маятника. С помощью крутильного маятника определить момент инерции тела неправильной геометрической формы. Произвести оценку погрешностей измерений.

Приборы и принадлежности: крутильный маятник с электроприводом, набор тел, электронный секундомер.

Описание установки

Установка для определения моментов инерции тел представлена на рис 1.

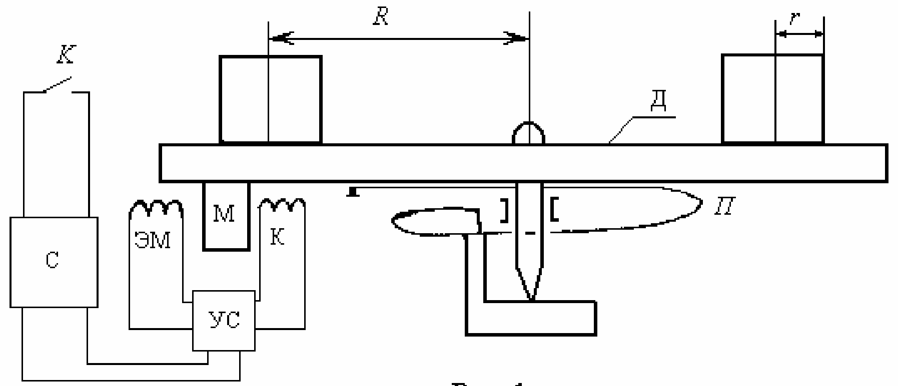


Рис.1

Установка представляет собой крутильный маятник, в котором компенсируются потери, вызванные трением в оси и сопротивлением воздуха.

Диск (Д), выведенный из положения равновесия, может совершать крутильные колебания под действием упругой силы спиральной пружины (П).

Период колебаний такой системы определяется выражением

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{k}}, \qquad (1)$$

где I_0 – момент инерции диска,

k – коэффициент жесткости пружины.

Затухание маятника компенсируются устройством, состоящим из сигнальной катушки К, электромагнита (ЭМ), установленных на корпусе прибора, постоянного магнита (М) прикрепленного к вращающемуся диску и усилителя (У) смонтированном в отдельном корпусе.

При движении постоянного магнита вблизи катушки (К) в ней наводится небольшое напряжение. Это напряжение подается на усилитель (У), усиливается, и далее поступает на электромагнит (У). Магнит (М), прикрепленный к диску, притягивается электромагнитом (ЭМ) и при этом совершается некоторая работа по увеличению угловой скорости маятника. Ускорение маятника осуществляется в моменты прохождения диском положения равновесия, т.е. два раза за один период.

Для того чтобы определять моменты инерции тел с помощью такого устройства необходимо знать и его собственные момент инерции I_0 и период колебаний T_0.

Определение собственного момента инерции диска

Поместим на диск тело или систему тел с известным моментом инерции I_1 и приведем маятник в колебательное движение. Период колебаний такой системы будет

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{k}}, \tag{2}$$

Разделив уравнение (2) на (1), и сделав несложные преобразования, получим

$$I_0 = I_1 \cdot \frac{1}{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 - 1}. \tag{3}$$

В работе для определения момента инерции I_0 на диск устанавливаются два грузика, имеющие форму диска с известными массами m_1 и m_2 и одинаковыми радиусами r.

Момент инерции такой системы легко рассчитать, используя теорему Штейнера

$$I_1 = (m_1+m_2)(R^2 + r^2/2), \tag{4}$$

где R – расстояния от осей грузиков до оси вращения;

r собственные радиусы грузиков;

m_1 и m_2 – массы грузиков

Измерение моментов инерции тел

Итак, параметры I_0, и T_0 установки известны.

Поместим на диск тело с неизвестным моментом инерции I_x. Период колебания нагруженной системы T_x будет равен

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_x}{k}}. \tag{5}$$

Разделив уравнение (5) на (1) и, сделав соответствующие преобразования, можно получить

$$I_x = I_0 \cdot \left[\left(\frac{T_x}{T_0}\right)^2 - 1\right]. \tag{6}$$

Формула (6) используется в работе для определения моментов инерции тел.

Параметры установки

Радиусы грузиков r = 0,038 м, значения масс грузиков написаны на их основаниях. Погрешность радиусов грузиков Δr = 0,001 м.

Погрешность, с которой можно установить грузики на диске не превышает ΔR = 0,003 м. Погрешность измерения времени ΔT = 0.01 с.

Порядок выполнения работы

Таблица 1

	T_0	T_1	T_x	I_x	ε_x	$I_x = \bar{I}_x \pm \Delta I_x$
1						
2						
3						
Средние значения						

1. Произвести трижды измерения собственного периода колебаний маятника T_0 и найти среднее значение.
2. Симметрично относительно оси установить на диске два цилиндрических груза на расстояниях по R = 0.12м. Грузы поместить в соответствующие окружности. Привести систему в колебательное движение и измерить ее период колебаний T_1. Сделать три измерения. Результаты занести в таблицу. Найти среднее значение T_1.
3. Рассчитать по формуле (6) собственный момент инерции грузов I_1 относительно оси диска.
4. По формуле (3) вычислить I_0 и занести в таблицу.
5. Измерить период колебаний T_x системы с телом, момент инерции которого I_x необходимо определить. Результаты занести в таблицу.
6. Вычислить момент инерции I_x тела по формуле (6).
7. Оценить момент инерции этого тела теоретически. В первом приближении это тело можно считать стержнем. Сравнить теоретическое и экспериментальное значения. Сделать выводы.

Оценка погрешностей

Итак, мы имеем установку по измерению моментов инерции тел неправильной геометрической формы. Теперь необходимо оценить систематическую погрешность, с которой производятся эти измерения, т.е. оценить точность измерений.

Подставим формулы (3) и (4) в формулу (6).

$$I_x = (m_1 + m_2)\left(R^2 + \frac{r^2}{2}\right) \cdot \frac{\left(\left(\frac{T_x}{T_0}\right)^2 - 1\right)}{\left(\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 - 1\right)}. \qquad (7)$$

Упростите формулу (7) применительно к нашему случаю. Можно положить, что

$m_1 \approx m_2 = m,$ а $R << r$. Относительную погрешность ε_x оцените, по методике изложенный в указании «Механика» на страницах 13 – 14.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta I_x}{I_x} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{2\Delta T}{T_1 - T_0} + \frac{2\Delta T}{T_x - T_0}. \qquad (8).$$

Значение ε_x занесите в таблицу.

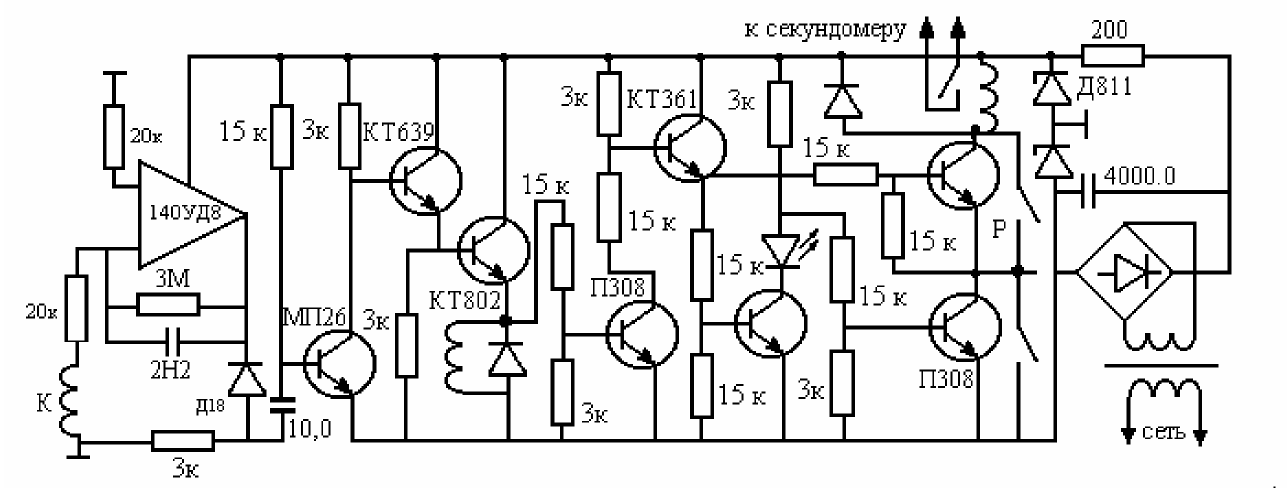
Абсолютную погрешность найдите по формуле $\Delta I_x = \varepsilon_x \cdot I_x$.

Результат в виде $I_x = \bar{I}_x \pm \Delta I_x$, занесите в таблицу.

Контрольные вопросы

1. Чему равен момент инерции точечного тела массой m относительно некоторой оси находящегося от неё на расстоянии r?
2. Чему равен момент инерции тела произвольной формы относительно некоторой оси?
3. Чему равен момент инерции тонкого кольца относительно оси симметрии?
4. Выведите формулу для вычисления момента инерции сплошного диска относительно оси симметрии.
5. Выведите формулу для вычисления момента инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через середину и перпендикулярной стержню.
6. Чему равен момент силы относительно некоторой оси?
7. Что называется плечом силы?
8. Запишите основной закон динамики вращательного движения.
9. Назовите основные кинематические характеристики вращающегося твердого тела. Как связаны линейная и угловая скорости? Как связаны линейное и угловое ускорения?
10. Сформулируйте теорему Штейнера.
11. Найдите момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню.
12. Найдите момент инерции сплошного диска относительно оси, отстоящей от оси симметрии на расстоянии $2R$ и параллельной ей.
13. Расскажите порядок выполнения работы.
14. Выведите формулу (8) для расчета относительной погрешности.

Принципиальная электрическая схема установки.



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

Определение моментов инерции тел неправильной геометрической формы с помощью трифилярного подвеса

Цель работы: экспериментальным путем найти значения моментов инерции тел и сравнить со значениями, найденными расчетным путем.

Приборы и принадлежности: трифилярный подвес, набор тел, электронный секундомер.

Описание установки

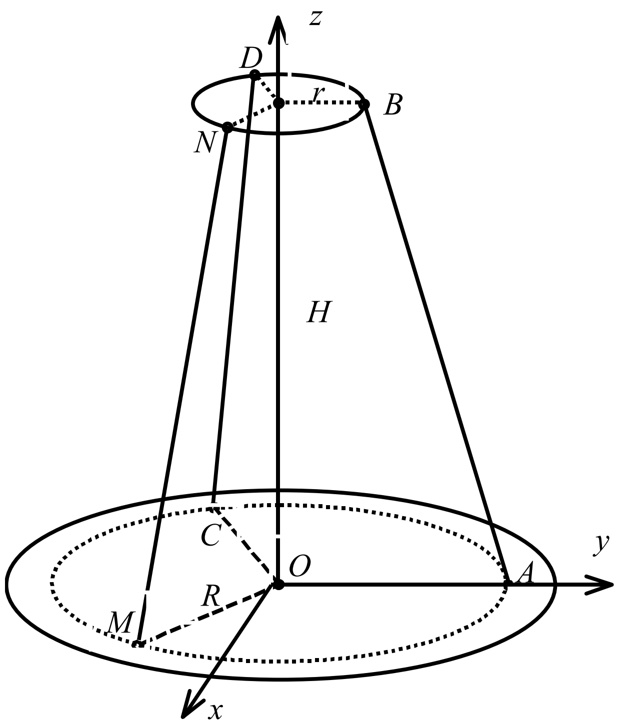


Рис.1.

Трифилярный подвес, или коротко трифиляр, дает удобный метод измерения моментов инерции тел неправильной геометрической формы, т.е. тел, момент инерции которых не может быть найден расчетным путем.

Трифиляр представляет собой систему, состоящую из диска радиуса $R_д$, подвешенного на трёх нерастяжимых нитях в точках *A*, *C* и *M*, которые расположены на диске по окружности радиуса *R*. В верхней части нити закреплены в точках *B, D* и *N* по окружности радиуса *r*.

Диск, расположенный горизонтально, может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO'. На горизонтальный диск помещают тела, момент инерции которых необходимо определить. Тело на диске располагают так, чтобы ось, относительно которой определяется его момент инерции, совпадала с осью вращения трифиляра.

Период колебаний трифиляра зависит от момента инерции системы, ее массы, а также параметров установки. Измерения момента инерции сводятся, в основном, к измерению периода *T* колебаний нагруженного трифиляра.

Теория метода

Найдем период колебаний трифиляра. Для этого воспользуемся условием равенства его максимальных значений кинетической и потенциальной энергий.

Максимальная кинетическая энергия равна:

$$E_к = \frac{I_с \omega_{max}^2}{2}. \tag{1}$$

Максимальная потенциальная энергия:

$$E_{п} = M_{с} gh. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2)

$\omega_{\mathbf{max}}$ – максимальное значение угловой скорости вращения трифиляра;

$I_{с}$ – момент инерции системы, т.е. нагруженного трифиляра:

$$I_{с} = I_{д} + I_{т}, \qquad (3)$$

где $I_{д}$ – момент инерции ненагруженного диска относительно оси вращения,

$I_{т}$ – момент инерции исследуемого тела относительно оси вращения трифиляра;

h – максимальная высота поднятия диска при вращении относительно его равновесного положения;

$M_{с}$ – масса нагруженного трифиляра. Она равна

$$M_{с} = M_{т} + M_{д}, \qquad (4)$$

где $M_{т}$ – масса тела, помещенного на трифиляр;

$M_{д}$ – масса ненагруженного диска.

Найдем максимальное значение угловой скорости. Диск совершает крутильные колебания. Зависимость угла поворота от времени имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \qquad (5)$$

где T – период крутильных колебаний нагруженного диска;

t – время,

φ_0 – угловая амплитуда колебаний.

Диск совершает гармонические колебания в соответствии с уравнением (5), если угловая амплитуда колебаний мала ($\varphi_0 < 6^{o}$). Угловая скорость вращения диска равна первой производной от углового перемещения (5):

$$\omega = \frac{2\pi\varphi_0}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \qquad (6)$$

Максимальную угловую скорость диск будет иметь в моменты времени, когда косинус равен единице, т.е.

$$\omega_{\mathbf{max}} = \frac{2\pi\varphi_0}{T}. \qquad (7)$$

Подставив выражение (7) в (1), получим максимальное значение кинетической энергии:

$$E_{к} = \frac{I_{с}}{2}\left(\frac{2\pi\varphi_0}{T}\right)^2. \qquad (8)$$

Найдем максимальную потенциальную энергии $E_{п}$ трифиляра. Она определяется максимальной высотой подъема h диска относительно его равновесного положения. Будем следить только за координатами концов нити

АВ. Нижние концы других нитей поднимают диск при его вращении на такую же высоту. Для нахождения h воспользуемся декартовой системой координат x, y, z, как показано на рис. 1.

Координаты точки В при вращении диска не изменяются и равны В(0,r,H). Координата А нижнего конца нити в момент, когда диск находится в положении равновесия, будет равна А(0,R,0).

После поворота на максимальный угол φ_0 координата этой точки

$$A(-R\sin\varphi_0,\ R\cos\varphi_0,\ h).$$

Т.к. нить нерастяжима, то ее длина не измениться при повороте диска, следовательно, по теореме Пифагора

$$(R-r)^2+H^2 = R^2\sin^2\varphi_0 + (R\cos\varphi_0 - r)^2 + (H-h)^2.$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены, пренебрежем величиной h^2 ввиду ее малого значения по сравнению с другими членами уравнения. Получим

$$h = \frac{R\cdot r(1-\cos\varphi_0)}{H} = \frac{2R\cdot r\cdot\sin^2\varphi_0/2}{H}.$$

Ввиду малого значения угла φ_0 можно положить $\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi_0^2}{4}$, следовательно:

$$h = R\cdot r\cdot\frac{\varphi_0^2}{2H}.$$

Подставив последнее выражение в формулу (2), получим:

$$E_п = M_с\cdot g\cdot R\cdot r\cdot\frac{\varphi_0^2}{2H}. \qquad (9)$$

Приравняем максимальные значения потенциальной и кинетической энергий, т.е. правые части уравнений (8) и (9):

$$\frac{I_с}{2}\left(\frac{2\pi\varphi_0}{T}\right)^2 = M_с\cdot g\cdot R\cdot r\cdot\frac{\varphi_0^2}{2H}.$$

Выразим величину момента инерции системы, т. е. диска и исследуемого тела:

$$I_с = kM_сT^2, \qquad (10)$$

где

$$k = \frac{rgR}{4\pi^2H}. \qquad (11)$$

Напомним, что трифилярный подвес служит для того, чтобы экспериментальным путем определять моменты инерции тел $I_т$ неправильной геометрической формы. Т.к. $I_с = I_д + I_т$, то из уравнения (10) можно найти искомую величину $I_т$:

$$I_т = kM_сT^2 - I_д. \qquad (12)$$

Момент инерции пустого диска легко рассчитать по известной формуле

$$I_д = M_дR_д^2/2. \qquad (13)$$

Напомним, что $M_с = M_т + M_д$.

<u>*Параметры установки*</u>

r = 0,055 м, Δr = 0,002 м – радиус окружности по которой закреплены верхние нити и погрешность его измерения,

R = 0,17 м, ΔR = 0,005 м – радиус окружности по которой закреплены нижние нити и его погрешность,

H = 1,7 м, ΔH = 0,01 м – расстояние от верхнего крепления нитей до диска и его погрешность,

g =9,81 м/с^2 – ускорение свободного падения.

Порядок выполнения работы

Для того чтобы найти момент инерции тела произвольной формы относительно некоторый оси, необходимо:

1. Знать массу этого тела $M_т$.
2. Поместить это тело на трифиляр. Ось вращения тела совместить с осью вращения трифиляра.
3. Найти период колебаний системы T.
4. Вычислить коэффициент k по формуле (11).
5. Вычислить момент инерции диска по формуле (13).
6. По формуле (12) найти момент инерции тела.

Оценка погрешностей

Итак, мы создали установку по измерению моментов инерции тел неправильной геометрической формы. Теперь необходимо оценить погрешности, которые она будет вносить в измерения. Для этого надо:

1. Вычислить относительную погрешность, вносимую в измерения коэффициентом k, по формуле

$$\varepsilon_k = \Delta k/k = \Delta r/r + \Delta R/R + \Delta H/H. \qquad (14)$$

Формулу (14) вывести самостоятельно.

3. Вычислить момент инерции диска по формуле (13).

$M_д$ = 0,53 кг, $\Delta M_д$ = 0,01 кг – масса диска и погрешность его измерения,

$R_д$ = 0,17 м, $\Delta R_д$ = 0,005 м – радиус диска и его погрешность измерения.

4. Вычислить относительную погрешность, вносимую в измерения моментом инерции диска $I_д$ по формуле

$$\varepsilon_д = \Delta I_д/I_д = \Delta M_д/M_д + 2\Delta R_д/R_д. \qquad (15)$$

Формулу (15) вывести самостоятельно.

5. Относительную погрешность при определении момента инерции исследуемого тела производить по формуле:

$$\varepsilon_{т} = \Delta I_{т}/I_{т} = \varepsilon_{k} + \Delta M_{c}/M_{c} + 2\Delta T/T + \varepsilon_{д}. \qquad (16)$$

Формулу (16) получить, воспользовавшись формулами (12), (14) и (15).

После выполнения экспериментальной части работы

6. Абсолютную ошибку измерений вычислять по формуле

$$\Delta I_{т} = \varepsilon_{т} I_{т}. \qquad (17)$$

7. Результаты записать в виде

$$I_{т} = I_{т} \pm \Delta I_{т}. \qquad (18)$$

В экспериментальной части работы мы будем устанавливать на трифиляре тела с такими конфигурациями, моменты инерции которых легко рассчитать теоретически. Сравнивая значения, полученные экспериментально с расчетными значениями, мы можем сделать выводы о качестве экспериментальной установки.

В работе предлагается измерять моменты инерции системы, состоящей из двух сплошных цилиндрических тел. Собственные моменты инерции этих тел относительно их осей симметрии рассчитаются по формуле для диска. Тела устанавливаются на диске симметрично относительно оси вращения трифиляра на одинаковом расстоянии a от оси. Момент инерции такой системы из двух грузов рассчитать теоретически по теореме Штейнера:

$$I_{теор} = (M_{гр1} + M_{гр2})\, R_{гр}^{2}/2 + 2M_{гр}\, a^{2}. \qquad (17)$$

При подготовке к экспериментальной части рассчитать по формуле (17) моменты инерции такой конфигурации для следующих трех случаев:

1. $a = 0$, т.е. грузы устанавливаются друг на друга на оси вращения трифиляра.
2. $a = 0{,}1$ м, т.е. симметрично относительно оси вращения трифиляра.
3. $a = 0{,}15$ м.

Экспериментальная часть

Включить секундомер в сеть. Нажатием кнопок "пуск" и "стоп" убедиться, что он работает правильно.

Опыт 1

1. Установить на трифиляр тела друг на друга, то есть положить $a = 0$.
2. Отклонить диск на небольшой угол и отпустить его.
3. Нажать на кнопку "сброс" и убедиться, что во всех разрядах установились цифры "нуль".
4. В одном из амплитудных положений диска нажать кнопку "пуск".
5. Отсчитать десять полных колебаний и отпустить кнопку "пуск".
6. Записать показания секундомера.
7. Опыт провести три раза.

Опыт 2

1. Установить тела на расстояниях $a = 0{,}1$ *м* от оси по одной линии.
2. Проделать задания пунктов 2 – 7 опыта 1.

Опыт 3

1. Установить тела на расстояниях $a = 0{,}15$ *м*.
2. Проделать задания пунктов 2 – 7 опыта 1.

Обработка экспериментальных результатов

1. Вычислить моменты инерции трех конфигурации по формуле (12). Вычислить погрешности по формулам (16) и (17). Записать ответ в виде выражения (18).
2. Сравнить экспериментально полученные результаты с теоретическими значениями для этих же случаев.
3. Укладываются ли отличия между экспериментальными и теоретическими значениями для каждого случая в интервал $\pm \Delta I_{т.}$
4. Сделать выводы.

Контрольные вопросы

1.Чему равен момент инерции точки относительно некоторой оси?

2.Чему равен момент инерции тела относительно некоторой оси?

3.Чему равен момент инерции тонкого кольца относительно оси симметрии?

4.Выведите формулу для вычисления момента инерции сплошного диска относительно оси симметрии.

5.Выведите формулу для вычисления момента инерции тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через середину и перпендикулярной стержню.

6.Чему равен момент силы относительно некоторой оси?

7.Что такое плечо силы?

8.Момент импульса. Вывести закон сохранения момента импульса.

9.Назовите основные кинематические характеристики вращающегося твердого тела. Как связаны линейная и угловая скорости? Как связаны линейное и угловое ускорения?

10.Сформулируйте теорему Штейнера.

11.Найдите момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню.

12.Расскажите порядок выполнения работы.

13.Выведите формулу для расчета относительной погрешности.

Оглавление