ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Кемеровский технологический институт

пищевой промышленности

Н.А. Бахтин, А.М. Осинцев

ФИЗИКА:

учебное пособие

Часть 1: Механика

Кемерово 2008

УДК 53 (075)

ББК 22.3я7
Б 30

Рецензенты:

Заведующий кафедрой общей физики Кемеровского государственного университета, доктор физ.-мат. наук, профессор Полыгалов Ю.И.

Профессор кафедры физики Кузбасского государственного технического университета, доктор физ.-мат. наук, Фадеев Ю.А.

Бахтин, Н.А. Физика: учебное пособие. Часть 1: Механика / Н.А. Бахтин, А.М. Осинцев; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2008. – 176 с.
ISBN

Учебное пособие составлено на основе лекций, в течение многих лет читаемых авторами на механическом и технологическом факультетах Кемеровского технологического института пищевой промышленности. Выбранный авторами стиль конспекта лекций позволил изложить теоретический материал в достаточно свободной форме, снабдить его личными рассуждениями и замечаниями и, кроме того, достаточно широко проиллюстрировать историческими и другими интересными фактами. Представленный теоретический материал охватывает основные разделы механики и соответствует образовательным стандартам технических специальностей по физике. Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов.

ISBN

Лекция 1

- *Для кого написан этот конспект?*
- *Другие книги по физике.*
- *Что такое физика?*
- *Место физики среди других наук.*
- *Математика – язык физики.*
- *Физические модели.*
- *Измерение, эталон, размерность.*

Физика

Введение

Некоторые студенты не любят конспектировать лекции, приводя самые разные аргументы, оправдывающие, по их мнению, такую «нелюбовь». Однако чаще всего за этими аргументами скрывают, либо неумение работать на лекции и вести конспект, либо неумение и нежелание работать вообще. Этот конспект лекций сможет помочь лишь в первом случае, когда студент хочет, по крайней мере, научиться учиться. Ясно, что вникать в лекцию и вести конспект – это очень тяжелый, а без определенных навыков, которые обычно получают в школе, и непосильный труд. Но ведь как раз для того, чтобы переделать себя, получить высшее образование вы и пришли в институт. Чтобы добиться успехов в любом деле, люди ежедневно отдают ему массу сил и времени. Посмотрите на тех, кто серьезно занимается музыкой, живописью, иностранными языками, спортом и вы сразу поймете, что конспектирование является не самой трудной работой по совершенствованию своей личности. Ведение конспекта приучает следить за главной мыслью лектора, выделять самое важное и вести краткую запись. Если вы, может быть, и не во всем разберетесь, то, по крайней мере, научитесь быстро писать. А как говорили наши мудрые предки: «Кто пишет – дважды читает!»

У конспекта есть и другая, более прагматическая задача – он помогает готовиться к зачетам и экзаменам. Читать специальные книги и разбираться в них самостоятельно – задача более сложная, чем, конспектируя опытного лектора, вникать в предлагаемые им объяснения. У студентов зачастую слишком много предметов, и мало времени, чтобы читать толстые книги. Поэтому многие из вас предпочитают довольствоваться конспектами и краткими методическими пособиями.

Тем не менее, в будущем, при работе по специальности, вам придется получать знания не из кратких пособий, а из более основательных источников, поэтому одной из важнейших задач при подготовке специалиста с высшим образованием является умение самостоятельно работать с серьезной литературой. А для желающих уже сейчас расширить свои знания по физике, глубже проникнуть в основы законов, по которым развивается Вселенная, мы рекомендуем не ограничиваться чтением этого пособия.

Итак, мы плавно подошли к вопросу о рекомендуемой литературе.

Рекомендуемая литература

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физи ке: тт. 1-9 (любое издание).
2. Савельев И.В.. Курс общей физики: тт. 1-3 (любое издание).
3. Зисман Г.А., Тодес О.Т. Курс общей физики: тт. 1,2 (любое издание).
4. Трофимова Т.И. Курс физики: Учебное пособие для студентов вузов (любое издание).

Предмет физики

Слово φυσική (*physica*, *физика*) в переводе с греческого языка означает *природа*. И действительно больше двух тысяч лет назад греческий ученый Аристотель в двух своих хорошо известных трудах «Физика» и «Метафизика» (буквально: «то, что следует за физикой») заложил основы науки, поставившей перед собой цель объяснить устройство Мира и его развитие, анализируя взаимоотношение составляющих мир объектов.

Как показало время, человек пока не в состоянии постичь природу во всем многообразии ее проявлений. Поэтому постепенно разные группы ученых стали проявлять интерес к более узко определенным областям знаний о природе, добиваясь заметных успехов.

Таким образом, античная физика (или в латинском варианте натуральная философия) трансформировалась в целую группу естественных наук: современную физику, астрономию, химию, биологию, медицину, геологию, метеорологию и другие.

Хотя общая цель всех естественных наук осталась прежней – познание окружающего Мира – каждая из наук обзавелась более или менее определенным предметом для изучения. Любой из вас, по-видимому, без труда назовет предмет изучения астрономии, геологии или биологии, потому что их предмет обозначен непосредственно в названии науки. Вряд ли вас затруднит назвать предмет химии: всем известно, что химия – наука о превращении веществ.

Но что же является предметом изучения физики? Для того чтобы выяснить это, нужно, прежде всего, понять, что, изучая какое-то явление, физики не ставят цель описать его как можно подробнее, а выделяют в этом явлении то, что объединяет его со всеми явлениями природы. Таким образом, физики ставят перед собой задачу исключительной сложности: открыть самые общие закономерности Мира, которые проявляются во всех явлениях природы. Понять физику явления, значит понять его сущность, внутреннее основное свойство явления, скрытую закономерность.

Согласно современным представлениям, физика – это *наука, изучающая наиболее простые и вместе с тем <u>наиболее общие</u> закономерности явлений природы, свойства и строение материи, законы ее движения.*

Это означает, что физика является самой фундаментальной из естественных наук. Понятия физики лежат в основе всего современного естествознания. Рассмотрим более подробно ее связь с другими науками.

Физика и астрономия

Астрономия возникла раньше физики. Фактически, физика выросла из нее. Древние жрецы и астрономы заметили удивительную простоту движения звезд и планет. Объяснение этой простоты и было началом физики. На первом этапе астрономия была наблюдательной и описательной наукой, но она достигла поразительных успехов, когда стала применять физические приборы.

Самым выдающимся открытием астрономии было открытие того, что звезды состоят из тех же атомов, что и Земля. Другим впечатляющим открытием астрономии является открытие источника энергии звезд. Это ядерные реакции. Солнце – огромный ядерный реактор, в котором происходит превращение элементов. Водород, сгорая, превращается в гелий, затем получаются и другие элементы периодической системы. Каждое такое превращение сопровождается большим выделением энергии.

В ранние моменты образования Вселенной было только два элемента – водород и гелий. Затем в звездах были «испечены» и все остальные элементы. Вещество, из которого сделаны мы с вами, тоже было создано в звездах. Это следует, например, из анализа соотношения изотопов углерода. Очень красивое физическое объяснение этого факта дал известный американский физик Ричард Фейнман: «Содержание C_{12} и C_{13} никогда не меняется в химических реакциях, ибо для обоих изотопов углерода химические реакции протекают одинаково. Изучая пропорцию изотопов в золе, которой являемся мы, можно догадаться какой была печь, в которой сформировалась такая пропорция. Такой печью могла быть печь типа Солнца».

Вы знаете, что одной из сложнейших проблем, которую необходимо решить человечеству, является проблема управляемого термоядерного синтеза. Решение этой проблемы обеспечило бы человечество энергией. Для стран, расположенных далеко от экватора, это особенно важно. Может быть, эту проблему удастся решить, изучая процессы, происходящие в звездах.

Физика и химия

Химия в настоящее время наиболее сильно испытывает на себе влияние физики. Однако в годы, когда кропотливым трудом химиков открывались новые химические элементы и их связь друг с другом, химия сыграла важную роль в становлении физики. Вся теория атомного строения вещества получила поддержку в химическом эксперименте. Кропотливый многовековой труд алхимиков и химиков подытожила периодическая система элементов Д.И. Менделеева. Она выявила немало связей между разными элементами. Однако оставались неясными вопросы о причине периодичности свойств элементов и о природе химической связи. Эти вопросы были решены в рамках квантовой механики, которая является одним из разделов современной теоретической физики. Теоретическая химия в настоящее время – это, в основном, квантовая механика. На стыке физики и химии возникли две новые науки – физическая химия и химическая физика. И вы, если хорошо изучите физику, легко найдете общий язык с химиком и не только с ним.

Физика и биология

Биология занимается изучением живого. Когда биология делала свои первые шаги, она занималась описанием живых организмов.

Все новые факты с большим интересом изучалось и классифицировалось. После накопления громадного описательного материала биологи обратились к выявлению механизма функционирования живого. Оказалось, что, если вглядеться в процессы, протекающие в живых организмах, то можно заметить множество физических явлений и химических процессов, для изучения которых больше всего подходят физические методы исследования. Самым заметным достижением биологии за последнее время стало, пожалуй, понимание механизма наследственности живых организмов. С помощью рентгеноструктурного анализа была установлена пространственная структура молекул ДНК, в которых зашифрована генетическая информация. Т.е. биология стала подлинной наукой, а не описательной, только после того, как биологи стали применять физические методы и приборы.

В биологии масса физических проблем, например как мы видим и слышим. Но это не главные вопросы, не они, по-видимому, лежат в основе жизни. Если бы мы поняли механизм зрения, слуха или обоняния мы бы едва ли постигли сущность жизни. Растения прекрасно обходятся без этих органов чувств, но функционируют как живое.

По-видимому, в основе понимания сущности жизни и, особенно, ее высшего проявления – сознания, лежат какие-то, хотя и сложные, но все-таки физические закономерности. Хотя некоторые ученые склонны считать, что для объяснения феноменов Жизни и Разума не обойтись без привлечения «Высших» сил.

Физика и техника

Для вас, студентов технического вуза, этот раздел, пожалуй, представляет наибольший интерес. Однако мы не склонны считать, что выпускник такого вуза должен быть исключительным «технарем». Основы общегуманитарных знаний должны быть неотъемлемой чертой интеллигента, вне зависимости от формы его образования: совсем неплохо, когда с выпускником филологического факультета университета можно обсудить современные проблемы технического прогресса, а с выпускником механического факультета технического вуза – особенности творчества Есенина.

Развиваясь в тесном контакте с техникой и являясь ее фундаментом, физика проникла практически во все области промышленности, создав саму возможность появления многих новых ее отраслей. Физика стоит у истоков революционных преобразований во всех областях техники. В научных лабораториях зародилась лазерная технология, голография, радиоэлектроника, атомная энергетика и космическая техника. На основе ее достижений перестраиваются энергетика, связь, транспорт, строительство, промышленное и сельскохозяйственное производство. Недаром, конечно же, самые уважаемые и престижные технические вузы называются физико-техническими или инженерно-физическими!

Мы живем в постоянно меняющемся мире, а для того чтобы быстро адаптироваться в этом мире, нужно иметь очень хорошую физико-математическую или, как говорят, фундаментальную подготовку. Специалисты, получившие достаточно широкое физико-математическое образование, приобретают способности к «физическому мышлению», могут самостоятельно осваивать новые технические направления, успешно работать в них, легко переходить от решения одних задач к другим, искать нетрадиционные пути даже, если ничего подобного они не изучали в вузе.

Инженер работает в мире, где все определяется физическими законами. И если вы не изучите их сегодня с помощью преподавателей вуза, вам все равно придется их изучать, но только в более трудных условиях, когда на вас навалятся житейские проблемы так, что не будет столько времени, как сейчас заниматься своей фундаментальной подготовкой.

Физика и философия

Чтобы разобраться, как физика связана с философией, прежде всего, попытаемся понять, что такое философия. Философия – это не таинственная и далекая от жизни схема недоступных для понимания аргументов. Философия – это размышление человека о своих собственных мыслях и понятиях.

Философия как наука занимается теорией познания, разрабатывает правила логики для критического анализа любых мыслей. Философы интересуются вопросом о том, что в наших мыслях истинно, что ложно, а что вообще бессмысленно, а также высказывают суждения о ценностях. Ученые философы дают нам рекомендации, способствующие правильному мышлению и пониманию процессов, происходящих во всех областях нашей интеллектуальной деятельности.

Мы сами выступаем в роли философов-дилетантов каждый раз, когда размышляем о смысле жизни, или задаем вопросы типа: «Действительно ли существуют НЛО?», «Куда заведет нас научно-технический прогресс?», «По верному ли пути мы идем к светлому будущему?».

На европейскую философию сильно повлияла логика, которую Аристотель разработал более двух тысяч лет назад. Логика Аристотеля была замечательным открытием, но она стесняла развитие опытного естествознания, ибо слишком много времени уделяла аргументации. Доказательство в этой логике велось от одного абсолютного до другого абсолютного «да» или «нет». На этой логике построены современные компьютеры. Т.е. Аристотель построил логику для машины, а не для человека.

А вот как, например, ответить на вопрос: «Правильно ли поступил Раскольников?» На такой вопрос не ответишь коротко «да» или «нет». Достоевский только для того, чтобы задать этот вопрос, написал целый роман.

Физика позволила усовершенствовать логику. Например, на вопрос: «Свет – волна или поток частиц?» – ортодоксальный последователь Аристотеля потребовал бы однозначного ответа. Логика, которая была создана под давлением открытий в области физики, отвечает на этот вопрос не так категорично. Свет проявляет в различных экспериментах свойства, как волн, так и частиц. Поэтому он одновременно и то, и другое, не являясь вместе с тем ни тем, ни другим. Ответ выглядит парадоксально даже для нас, жителей XXI века. Возможно, потому, что мы воспитаны на логике Аристотеля.

Мы привели только один пример – несоответствие логики Аристотеля поведению света. Однако существует еще очень большое число экспериментальных фактов из области физики, особенно теории относительности и квантовой механики, анализ которых позволил усовершенствовать философию, т.е. изменить стиль мышления.

Физика и математика

Многие считают, что физика и математика – это почти одно и то же. Недаром ведь существуют ученые степени кандидата и доктора физико-математических наук! Заметьте, не физико-химических или физико-технических!

А, вместе с тем, это серьезное заблуждение. На самом деле, по способу познания окружающего мира, физику гораздо ближе химик или инженер, а математику, скорее, – философ. По большому счету, математике нет никакого дела до окружающего мира: она абсолютно абстрактна и самодостаточна.

Посмотрите, какими объектами оперирует математик: число, множество, функция, точка, прямая, плоскость, матрица, оператор, произведение, логарифм, экспонента и т.п. В каком месте реального мира можно найти эти объекты? Правильно, только в нашем сознании. Поэтому и называются они *идеальными* (от лат. *idea* – мысль), в отличие от «настоящих» природных объектов, таких как планета, камень, воздух, вода, дом, человек, которые называются *материальными* (от лат. *materia* – вещество). Теперь вам, наверное, понятно, где искать «идеального партнера»!

Математика – исключительно идеальная наука, в том смысле, что она оперирует только идеальными объектами. Но почему же тогда все мы с детства знаем, что, если хочешь стать хорошим инженером, нужно знать математику, ведь инженер имеет дело с материальным миром?

Все дело в способе взаимодействия человеческого разума с внешним миром. Предположим, что вы хотите построить дом. Ясно, что вначале вы представите его себе достаточно схематично, например, прямоугольный параллелепипед определенной длины, ширины и высоты. Заметьте, мы не смогли обойтись без абстрактных математических понятий. Более того, в любом случае, когда человек думает о чем-то или общается с кем-то, он пользуется именно такими абстрактными образами реальных объектов. В сущности, любой язык представляет собой набор слов-символов, обозначающих предметы, действия, свойства и т.д. Отличие научного языка от литературного заключается, прежде всего, в строгости и однозначности его понятий. Кроме того, в научном языке должны существовать особые конструкции для точного отражения количественных отношений между различными объектами и иерархии связей между ними. В этом смысле язык математики «идеально» подходит на роль научного языка. Таким образом, математика, прежде всего, – язык физики.

На самом деле связь математики с физикой гораздо шире и глубже. Наука становится наукой постольку, поскольку в нее проникает число – примерно так писал французский математик Эмиль Борель (1871-1956). И если говорить о связи математики и физики, то, на первый взгляд, вообще трудно различить, где кончается математика и начинается теоретическая физика. Совершенно абстрактные логические схемы, придуманные математиками вне всякой связи с реальностью вдруг оказывались мощным инструментом для познания реального мира. Так случилось с теорией групп или операционным исчислением. С другой стороны, интегральное и дифференциальное исчисление было разработано изначально исключительно для описания механического движения.

Физические модели

Известно, что язык, на котором общаются строители, заметно отличается от языка искусствоведов даже, если все они говорят по-русски. Очевидно, что своя специфика имеется и в различных отраслях науки. И если считать, что математика представляет собой универсальный научный язык, то язык физики или любой другой науки, можно считать специфическим диалектом, а иногда и жаргоном (на научном языке это называется *терминологией*).

Физика добавляет к базовому математическому языку, определяющему геометрические, алгебраические и другие объекты, а также правила действий с ними, свои собственные «языковые» конструкции (*термины*), описывающие свойства материальных объектов и их взаимодействие.

Для того чтобы насладиться чтением Шекспира в оригинале, нужно достаточно хорошо понимать английский, а не просто уметь читать английские слова. Вряд ли кто-то с этим не согласится. Но то же самое относится и к языку физики. Механическое запоминание формулировок, без вникания в их смысл, по меньшей мере, бесполезная трата времени.

У языка физики есть и свои особенности. Большинство физических понятий представляют собой *модели* физических свойств или явлений. Например, *сила* – это модель, описывающая взаимодействие тел. Силу можно определить так: «Если тела взаимодействуют, то между ними действуют силы». Это хотя и правильное но, в общем-то, бессмысленное определение. Все равно вы не поймете, что такое сила, пока не узнаете, как она изменяет физическое состояние тел. А для этого нужно изучить хотя бы три закона Ньютона.

Основным свойством *физических моделей* является подчеркивание лишь самых существенных для описания данного явления свойств объектов и пренебрежение несущественными для данной задачи деталями. К самым простым физическим моделям относятся различные модели материальных тел.

Например, когда для задачи совершенно не важна форма тела, используется приближение *материальной точки*, т.е. математической точки, обладающей массой. Часто такая ситуация реализуется если перемещения тела намного больше его размеров. Однако, при анализе полета «крученого» мяча, несмотря на то, что пролетаемое им расстояние, как правило, заметно больше его размеров, приближение материальной точки не работает.

Абсолютно твердое тело – это тело, состоящее из материальных точек, причем расстояния между ними не могут изменяться. Такая модель удобна для рассмотрения движений тел, деформации которых существенно меньше их размеров. Опять же, если при этом тела совершают лишь небольшие перемещения, сравнимые с деформациями, то это приближение неадекватно.

Для описания деформаций часто используется модель *абсолютно упругого* и *абсолютно неупругого тел*. В первом случае после любой деформации возникают силы, полностью восстанавливающие форму тела, а во втором – такие силы отсутствуют, и форма вообще не восстанавливается.

По мере изучения нашего курса мы будем вводить и другие модели, многие из которых, должны быть вам в какой-то степени знакомы из школьного курса физики. Ваша задача в каждом конкретном случае – вникнуть в суть нового физического понятия, осознать основные качества и ограничения, накладываемые моделью, после чего вы сможете разумно использовать его при анализе физических явлений.

Единицы физических величин

Чем отличаются математические и физические величины? Предположим, мы находим на плоскости *xy* расстояние между двумя точками с координатами (4, 8) и (7, 12). Как вы помните, это делается так: $l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Это какое-то абстрактное расстояние между абстрактными точками, и, в принципе, запись такого рода в учебнике математики никого не удивит. Если же вы теперь попытаетесь представить себе реальный объект размером 5, то задумаетесь: «А пять чего?». Одно дело – метров. А если световых лет, – то это совсем другое! Между прочим, один световой год (расстояние, которое свет пробегает за год) – это примерно $9{,}5 \cdot 10^{12}$ км. Итак, при проведении физических измерений необходимо с чем-то сравнивать полученный результат.

Еще один пример. Что будет если сложить длину прямоугольника с его шириной? Конечно половина периметра! А если попытаться сложить длину прямоугольника с его площадью? С математической точки зрения будет сумма каких-то двух чисел, а с физической – ничего не будет. Или вернее эта сумма будет *бессмысленной* с точки зрения физики. Надеемся, вам понятно о каком смысле идет речь. Итак, при проведении физических операций нельзя складывать (в алгебраическом смысле) величины, имеющие различную физическую сущность. В нашем примере длина характеризует линейные размеры тела, а площадь – мера его поверхности. Обычно говорят, что складывать можно только однородные (качественно одинаковые) *физические величины*, например, расстояние с расстоянием, массу с массой, силу с силой и так далее. Такие величины называют также физическими величинами одинаковой *размерности*. Например, высота дома и расстояние от Земли до Луны имеют размерность длины, а продолжительность футбольного матча и календарный год – размерность времени.

Очевидно, что сравнивать между собой тоже можно только физические величины, имеющие одинаковые размерности. Иногда сравнивать физические величины между собой достаточно трудно. Легче сравнить каждую из них с какой-то всем известной величиной, *эталоном*. Чаще всего именно сравнение физической величины с эталоном и называется *процессом измерения* этой величины.

Очень важным является вопрос: «Что выбрать в качестве эталона?». Здесь нужно отметить тот факт, что не все физические величины являются независимыми: для того, чтобы описать все известные на сегодняшний день природные явления, достаточно определить лишь несколько эталонных величин. Например, в механике в качестве основных физических величин достаточно выбрать величины размерности длины, времени и массы (иногда выбирают длину, время и силу). Для описания электромагнитных взаимодействий к ним нужно добавить единицу размерности электрического заряда или силы тока; а для описания тепловых явлений обычно добавляют единицу измерения температуры (хотя эта единица и не является принципиальной). К этим величинам можно добавить также единицу количество вещества и какую-нибудь фотометрическую величину, например, силу света. А в качестве дополнительных физических величин используют, плоский и телесный угол. В зависимости от выбора эталонов этих величин мы будем иметь различные физические *системы измерения*.

Исторически первыми эталонами, конечно же, стали естественные физические величины. Например, эталонами длины с древнейших времен были локоть (расстояние от локтевого сгиба до кончика указательного пальца человека) и миля (от лат. *milia passuum* — тысяча шагов, шаги считались под одну ногу, т.е. имеется в виду тысяча двойных шагов); эталонами времени считались год (время, через которое повторяется положение Солнца на фоне звезд) или сутки (время, через которое повторяется положение звезд на небосклоне). В англоязычных странах (например в Англии и Америке) и сегодня пользуются древними эталонами длины, массы и объема: 1 фут ≈ 30,48 см (от англ. *foot* – ступня), 1 дюйм = 1/12 фута (от голл. *duim* – большой палец; имеется в виду одна фаланга большого пальца); 1 баррель ≈ 159 л (от англ. *barrel* – бочка); 1 фунт ≈ 0,45 кг (польский *funt*, от немецкого *Pfund*, от латинского *pondus* – вес, гиря).

В современных научных приложениях для измерения чаще всего используются единицы метрической системы, в основе которой лежит десятичная система исчисления. В качестве основной единицы длины используется 1 метр (1 м) (франц. *metre*, от греч. *métron* – мера) или одна сотая этой величины – 1 сантиметр (1 см = 0,01 м). Эта единица была введена в конце XVIII века, и естественной основой для нее послужил размер Земли: расстояние от северного полюса до экватора вдоль меридиана, проходящего через Париж, было объявлено равным точно десяти миллионам метров (или один метр – это одна сорокамиллионная часть длины земного меридиана). Основная единица времени в метрической системе – секунда, которая первоначально определялась как $1/86400$ часть продолжительности средних суток ($24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$: в сутках 24 часа по 60 минут, состоящих из 60 секунд). За единицу массы был выбран 1 грамм, равный массе 1 кубического сантиметра чистой воды при нормальных условиях.

Кроме основных единиц измерения существуют единицы, возникающие в результате проведения формальных математических операций с ними (умножение, деление, возведение в степень): *составные* или *сложные размерности*.

Например, площадь прямоугольника – это произведение его длины на ширину. Пусть длина составляет 1 м и 80 см, а ширина – 1 м и 10 см. Формально,

$$S = (1\ \text{м} + 80\ \text{см}) \cdot (1\ \text{м} + 10\ \text{см}) = 1\ \text{м}^2 + 90\ \text{м} \cdot \text{см} + 800\ \text{см}^2.$$

То есть для измерения площади мы имеем три различных единицы измерения: «м^2», «м·см» и «см^2». Пользоваться таким представлением площади, конечно, неудобно. Гораздо удобнее выразить длину и ширину в одинаковых метрических единицах:

$$S = 1{,}8\ \text{м} \cdot 1{,}1\ \text{м} = 1{,}98\ \text{м}^2 \text{ или } S = 180\ \text{см} \cdot 110\ \text{см} = 19800\ \text{см}^2.$$

Как видно из этого примера, для того, чтобы все сложные размерности величин характеризовались единственной комбинацией простых размерностей, необходимо все величины представлять в одних и тех же единицах. Такой способ представления системы измерения называют *системой единиц измерения*. В научно-технических расчетах и измерениях используются в основном три системы единиц: МКС (метр, килограмм, секунда), СГС (сантиметр, грамм, секунда) и МКГСС (метр, килограмм силы, секунда).

В настоящее время с целью стандартизации представления научно-технических данных большинство стран перешли к использованию Международной системы единиц СИ (от франц. *Système Internationale*), основанной на системе МКС. Именно этой системой мы и будем пользоваться в нашем курсе лекций. Основные и дополнительные единицы этой системы перечислены в приложении к конспекту.

Для вас важно усвоить, что перевод величин из одной системы в другую – не сложнее простейших математических операций: умножения и деления. Например:

$$1\ \text{км/ч} = 1000\ \text{м} / 3600\ \text{с} \approx 0{,}278\ \text{м/с};$$

$$1\ \text{кВт·ч} = 1000\ \text{Вт} \cdot 3600\ \text{с} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{Вт·с} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{Дж};$$

$$1\ \text{сут}^{-1} = \frac{1}{1\ \text{сут}} = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с}} \approx 1{,}1574 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Лекция 2

- *Из истории механики.*
- *Пространство, время, движение.*
- *Геометрия движения.*
- *Скорость и ускорение.*

Основы механики

Введение

Механика (греч. *mechanike* – искусство построения машин) – раздел физики, посвященный изучению законов движения и взаимодействия тел.

Приступая к изучению механики, вспомним основные вехи в ее истории. Сохранившиеся до нашего времени египетские пирамиды, и другие остатки древних сооружений заставляют нас предполагать, что у древних народов уже имелись знания об основных законах равновесия, без понимания которых невозможно было бы возвести такие величественные сооружения.

Греческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.) подвел итог в познании древних в области механики, но ее основной закон был им сформулирован неверно: «Для поддержания равномерного прямолинейного движения необходима постоянно действующая сила». Между прочим, некоторые из наших весьма образованных современников поддерживают это заблуждение.

Закон равновесия рычага – основного закона, на котором основана работа всех простых механизмов был сформулирован Архимедом (ок. 287-212 гг. до н.э.). С этого времени и начинается развитие механики как науки в полном смысле этого слова.

Ученые средних веков получили новые сведения о равновесии тел, но продолжали придерживаться неверного представления об основном законе движения тел, сформулированном Аристотелем.

Только в XVII веке, спустя двадцать веков после Аристотеля, Галилео Галилей (1564-1642 гг.) применив экспериментальный метод для изучения движения тел, раскрыл основной закон динамики и сформулировал свой принцип относительности.

Законы механического движения в ясной и сжатой форме были сформулированы Исааком Ньютоном (1643-1727 гг.). Эта форма являлась эталоном формулировки научных результатов в течение длительного времени. По сути, и наш с вами курс механики будет посвящен, в основном, изучению этих простых, но очень емких законов.

Новый этап в развитии механики связан с Альбертом Эйнштейном (1879-1955 гг.), создавшим специальную и общую теорию относительности. Специальная теория относительности определяет законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света ($3\cdot10^8$ м/с), а общая теория относительности объединяет специальную теорию относительности и теорию гравитации.

Законы движения и взаимодействия частиц, осуществляющегося в очень малых областях пространства, например в атомах и молекулах, принципиально отличаются от законов движения крупных тел. Эти законы составляют содержание квантовой или волновой механики, созданной в начале XX века.

Механику, как и всю физику в целом, подразделяют на классическую и квантовую. Классическая механика включает в себя ньютоновскую механику и механику теории относительности. Часто, особенно в популярной литературе, под классической механикой понимают только механику Ньютона, однако это не так – механика Эйнштейна также относится к классической механике. Следует отметить, что как квантовая механика, так и теория относительности Эйнштейна, включают в себя механику Ньютона в качестве предельного случая при определенных условиях.

Механика состоит из трех разделов: кинематики, статики и динамики. Статика изучает условия равновесия тел. Поскольку равновесие тел является частным случаем движения, законы статики оказываются естественным следствием законов динамики. По этой причине в курсах общей физики статика обычно не изучается. Статику вы будете изучать в курсе теоретической механики и, мы надеемся, что, если вы хорошо освоите основы физики, «теормех» покажется вам не таким страшным, как о нем говорят.

Основные понятия кинематики

Кинематикой (греч. *kinema* – движение) называется раздел механики, изучающий движение тел без учета взаимодействий между ними. Кинематика ограничивается разработкой способов описания движения тел, не рассматривая причин, изменяющих состояние движения.

Под движением тел или *механическим движением* подразумевают изменение их взаимного расположения в пространстве с течением времени. А что такое пространство? Время?

Пространство и время относятся к одним из самых сложных философских понятий. Интересно, что если люди называют что-то очень сложным, то это означает, чаще всего, недостаточное знание или понимание предмета. В случае пространства и времени – это абсолютная истина. Любой нормальный физик скажет вам, что никто не знает сущности этих понятий. Мы знаем лишь, что они являются проявлением свойств материи, ее атрибутами.

События в окружающем нас мире происходят в известной последовательности, обладают большей или меньшей длительностью. Это проявление того, что мы называем временем. Кроме того, все тела обладают протяженностью и как-то расположены друг относительно друга. Здесь мы говорим о пространственных отношениях. Если представить себе «нечто», лишенное тел и событий (т.е. материи), то вряд ли для описания этого «объекта» годились бы слова «ближе-дальше», «раньше-позже», а, следовательно, для него не существовали бы ни пространство, ни время.

Ясно, что такое объяснение не претендует на раскрытие природы пространства и времени. Однако физики научились работать и с такими объектами, природы которых они пока не понимают. Для этого используется процесс измерения: если что-то может быть измерено, то это физический объект. Так что, если вы хотите убедить физика в существовании, например, экстрасенсорных способностей или наличии биополя (в том смысле, в котором его понимают «парапсихологи»), просто укажите надежный и *воспроизводимый* способ измерения этих явлений.

Как вы знаете, пространственные промежутки (расстояния) измеряют линейками, а временные – часами. И те и другие иногда очень сильно отличаются как от полоски со штрихами, так и от циферблата со стрелками, но суть измерений остается той же – сравнение с эталонной единицей.

Механическое движение является простейшей формой движения материи. Оно состоит в изменении положения тел относительно друг друга. Т.е. движение относительно. Разные наблюдатели могут по-разному описывать движение одних и тех же тел. Например, пилот спортивного винтового самолета видит, что кончик его пропеллера движется по окружности, в то время как для наблюдателя с земли эта точка движется по спиральной линии. Вы сами, сидя за столом, покоитесь относительно земной поверхности, но вместе с ней вращаетесь вокруг земной оси со скоростью около 850 км/ч, а с точки зрения наблюдателя на Солнце (если таковой имеется) вы движетесь со скоростью около 30 км/с.

Движение материальной точки

Рассмотрим вначале движение самого простого тела – материальной точки. Так как механическое движение является относительным, прежде всего, необходимо договориться откуда мы будем наблюдать за движением тела.

Тело, относительно которого мы будем рассматривать движение другого тела, называется *телом отсчета*. Очень часто за тело отсчета выбирают Землю. С телом отсчета связывают *систему координат*. Вместе они образуют *систему отсчета* (как показывает теория относительности, каждую систему отсчета необходимо снабдить еще и собственными часами). Чаще всего мы будем пользоваться декартовой системой координат.

В декартовой системе координат положение материальной точки определяется тремя числами – координатами x, y и z. Три числа являются отражением факта *трехмерности* пространства. Положение материальной точки может быть задано и с помощью *радиус-вектора* $\vec{r}$. Радиус-вектором называется вектор с проекциями x, y, z. То есть, его начало совпадает с началом координат, а конец находится в точке с координатами x, y, z (рис.2.1). Обычно в учебниках векторы обозначаются жирным шрифтом ***r***. Мы для обозначения вектора будем использовать букву со стрелкой $\vec{r}$. Нежирной буквой, соответствующей данному вектору, но без стрелки, обозначают длину вектора. Длину радиус-вектора можно найти по теореме Пифагора $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

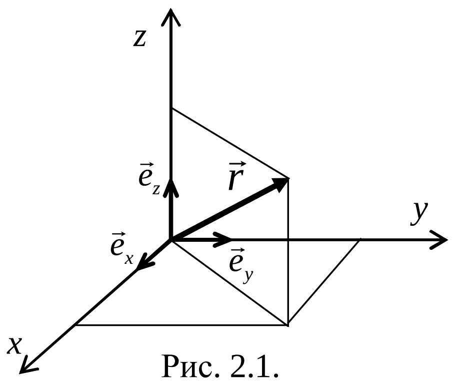


Рис. 2.1.

При движении частицы радиус вектор изменяется во времени, т.е. является функцией времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z,$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль соответствующих осей *x*, *y*, *z*. Эта функция определяет положение частицы в зависимости от времени, т.е. задает *закон движения* точки.

Конец радиус-вектора частицы описывает в пространстве линию, которая называется *траекторией частицы*. Форма траектории зависит от выбора системы отсчета. Если тело падает в вагоне, который движется равномерно и прямолинейно относительно Земли, то траектория этого тела относительно вагона – прямая линия. Относительно же Земли это будет парабола. Нельзя говорить о форме траектории вообще, речь может идти лишь о форме траектории в заданной системе отсчета.

Отметим, что решение многих кинематических задач может быть упрощено правильным выбором системы координат. Например, в случае прямолинейного движения, одну из осей (обычно ось x) удобно выбрать вдоль направления движения тела.

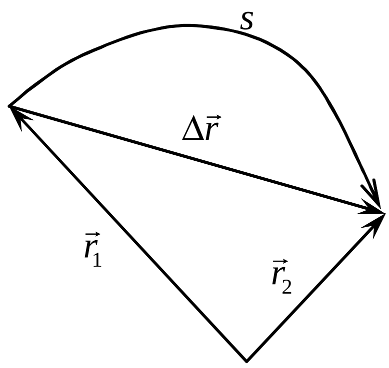


Рис. 2.2.

Пусть материальная точка переместилась вдоль некоторой траектории из точки 1, характеризующуюся радиус вектором $\vec{r}_1$ в точку 2, характеризующуюся радиус вектором $\vec{r}_2$. Расстояние между точками 1 и 2, отсчитанное вдоль траектории называется *пройденным путем*. Будем обозначать его буквой *S*.

Вектор, проведенный из точки 1 в точку 2, $\Delta\vec{r}$, называется *перемещением частицы*. Согласно правилам сложения векторов

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

По всей видимости, понятия о векторах и правилах их сложения возникли именно из анализа механических перемещений и уже после этого были признаны удобным способом описания самых различных явлений. Действительно, рассмотрим ряд последовательных перемещений $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, ..., \vec{l}_n$ (см. рис. 2.3).

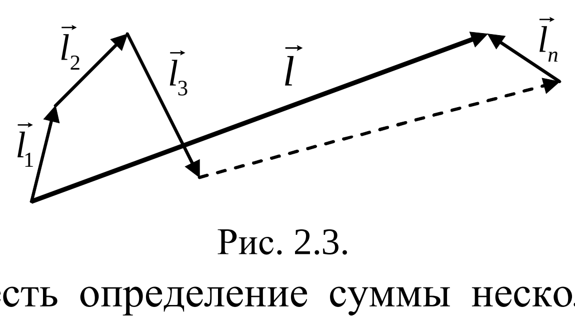


Рис. 2.3.

Вектор, проведенный из первой точки в последнюю, очевидно является результирующим перемещением или суммой всех перемещений $\vec{l} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + ... + \vec{l}_n$. Но это как раз и есть определение суммы нескольких векторов: «*Если переместить каждый последующий вектор параллельно самому себе так, чтобы* *его начало совпало с концом предыдущего вектора, то вектор, проведенный из начала первого вектора в конец последнего, будет суммой всех векторов*». Частным случаем этого правила для двух векторов являются *правило треугольника* и *правило параллелограмма*, знакомые вам из школьного курса геометрии. Векторы, изображенные на рис. 2.2, подчиняются этому правилу, если считать, что

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2 + (-\vec{r}_1),$$

а вектор с отрицательным знаком – это противоположный по направлению вектор.

Итак, векторами называются величины, характеризующиеся численным значением и направлением и, кроме того, складывающиеся по определенным правилам. Последнее весьма существенно. Можно указать величины, которые характеризуются численным значением и направлением, но складываются иначе, чем векторы. В качестве примера можно привести движение потоков машин на перекрестке. Потоки автомобилей характеризуются величиной и направлением, но не складываются между собой по правилу параллелограмма и поэтому не являются векторами.

Другое дело, если автомобили столкнутся. Тогда они будут двигаться по диагонали параллелограмма, потому что в этом случае будут складываться импульсы, а импульсы (об этом речь впереди) – векторные величины.

Скорость

Между прочим, древние греки так и не смогли разобраться с проблемой движения. Их сомнения ярче всего выражены в так называемых апориях (греч. *aporia* – затруднение, безвыходность) или парадоксах (греч. *parádoxes* – неожиданный, странный) Зенона (Зенон Элейский (около 490-430 до н. э.)). Ниже приведены две самых известных апории.

Ахиллес и черепаха

Предположим, что Ахиллес бегает в десять раз быстрее черепахи. Но он никогда не догонит ее! Действительно пусть в начале состязания черепаха находилась в 100 м впереди Ахиллеса. Тогда ко времени, когда он пробежит 100 м, черепаха окажется 10 м впереди него. Пробежав эти 10 м, Ахиллес увидит черепаху в 1 м впереди себя. За то время, когда он пробежит этот метр, черепаха пройдет 10 см и так далее ... до бесконечности. И если пространство бесконечно делимо (на современном языке – непрерывно), то в любой момент времени черепаха будет впереди Ахиллеса, и он никогда не сможет обогнать ее.

Стрела

Летящая стрела в каждый момент времени находится в какой-то точке пространства. Но быть в некоторой точке – значит покоиться в ней. Получается что полет стрелы (как и любое другое движение) – это ряд последовательных состояний покоя, т.е. движение – это покой. Никакого движения нет!

Ну, скажете вы, это уже перегиб. Мы же видим, что стрела летит. Да и сами мы можем перемещаться: вот встанем и пойдем.

Все не так просто. Далеко не все, что кажется движущимся, перемещается на самом деле. Посмотрите, например, на иллюминацию с эффектом «бегущих огней».

Очень красиво об этом написано в стихотворении А.С. Пушкина «Движение» (Михайловское, 1824-1826).

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить,
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами Солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

Так что грекам действительно было трудно. Это сегодня мы, вооруженные теорией пределов и операций с бесконечно малыми величинами, легко можем разобраться со всеми греческими парадоксами. Кстати, а вы знаете, сколько получится, если сложить бесконечное число слагаемых вида:

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots=111+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=?$$

Этот бесконечный ряд представляет как раз расстояние, которое предстоит пробежать Ахиллесу, чтобы догнать черепаху, и, если сумма ряда имеет конечное значение (проверьте, что это ровно $111+1/9$), то, двигаясь с постоянной скоростью, Ахиллес преодолеет дистанцию за конечное время, а не за бесконечное, как казалось Зенону.

В предыдущем абзаце мы ввели новую величину, скорость, которая всем знакома и интуитивно понятна на основе собственного опыта: чем быстрее движется тело, тем больше его скорость. *Скорость – быстрота движения*. Это определение позволяет вычислять скорость, как величину, равную отношению пройденного пути ко времени $\upsilon_s = \frac{s}{t}$. Такую скорость называют *средней путевой скоростью*.

Первым понятие скорости в его современном виде ввел швейцарский математик, физик и астроном Леонард Эйлер (1707-1783) в своем сочинении «Теория движения твердых тел». Однако для него самого это было не просто, так как еще с эпохи Античности рассматривались только соотношения между однородными (то есть имеющими одинаковые размерности) величинами. Эйлер сказал об этом так: «Здесь может, пожалуй, возникнуть сомнение по поводу того, каким образом можно делить путь на время, так как ведь это – величины разнородные, и, следовательно, невозможно указать, сколько раз промежуток времени, например, в 10 минут, содержится в пути длиной, например, в 10 футов».

В физике под скоростью понимают векторную величину, характеризующую не только быстроту перемещения частицы по траектории, но и направление, в котором частица движется. Пусть за время Δt радиус-вектор получил приращение $\Delta\vec{r}$. Тогда *скорость перемещения* определяется выражением

$$\vec{\upsilon}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Ясно, что это выражение дает значение средней скорости перемещения за время Δt. Размерность скорости, очевидно, м/с.

Теперь попытаемся определить, казалось бы, бессмысленную величину, скорость в данной точке. Безусловно, это нельзя сделать в духе Зенона. Мы, конечно же, понимаем, что в данный момент времени «стрела» не покоится в данной точке. Она непрерывно движется. Это означает, что за любой сколь угодно малый интервал времени Δt тело совершает очень малое перемещение, пропорциональное величине этого интервала. Тогда скорость «в данной точке», называемую *мгновенной скоростью*, можно определить как предел:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2.2)$$

В соответствии с правилами математики *мгновенная скорость точки*

– *это производная от ее радиус-вектора по времени*, а ее проекции определяются производными по времени от соответствующих координат:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

Вектор $\vec{\upsilon}$ направлен так же, как и вектор $d\vec{r}$, т.е. по касательной к траектории.

Вообще говоря, величина пройденного за время Δt пути отличается от модуля перемещения. Однако если устремить Δt к нулю, то предел

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta r} = 1.$$

Откуда следует, что модуль мгновенной скорости равен производной от пути по времени $\upsilon = dr/dt = ds/dt$. Между прочим, именно эту скорость показывает спидометр автомобиля.

Ускорение

Скорость частицы $\vec{\upsilon}$ может изменяться со временем, как по величине, так и по направлению. Быстрота изменения вектора $\vec{\upsilon}$ определяет *ускорение* точки. По аналогии с предыдущими рассуждениями мы можем определить *среднее*,

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t},$$

а также *мгновенное ускорение*, как производную от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (2.3)$$

Как следует из определения размерность ускорения – «метр в секунду за секунду» или (м/с^2).

Понятие ускорения в его современной форме было впервые введено в 1841 году французским математиком и инженером Жаном Понселе (1788-1867).

Но еще в 1673 году голландский ученый Христианс Гюйгенс (1629-1695) создал первую теорию движения точки по окружности, ввел понятие центростремительного ускорения и получил для него правильное выражение. Вслед за ним Ньютон ввел понятие полного ускорения и использовал его в своих расчетах по механике.

Ускорение при криволинейном движении

Рассмотрим участок траектории между двумя близкими точками (рис. 2.4). Скорости в этих точках $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ направлены по касательным к траектории и отличаются друг от друга по величине и направлению. Перенесем вектор $\vec{\upsilon}_2$ параллельно самому себе в точку M_1. Соединим теперь конец вектора $\vec{\upsilon}_1$ с концом перенесенного вектора $\vec{\upsilon}_2$ вектором $\Delta\vec{\upsilon}$. Из чертежа видно, что $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$, т.е. вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ есть приращение вектора $\vec{\upsilon}$ за время Δt.

На векторе $\vec{\upsilon}_2$ отметим точку C так, чтобы $|M_1A|=|M_1C|$. Соединим конец вектора $\vec{\upsilon}_1$ с точкой C. Из рисунка видно, что вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ может быть представлен как геометрическая сумма двух векторов:

$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n.$$

Вектор $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ численно характеризует изменение модуля скорости за время Δt: $\upsilon_2 = \upsilon_1 + \Delta\upsilon_\tau$. Если величина скорости $\vec{\upsilon}$ во время движения не меняется, то $\Delta\vec{\upsilon}_\tau = 0$. Вектор $\Delta\vec{\upsilon}_n$ характеризует изменение направления вектора скорости за время Δt. Он направлен в сторону вогнутости кривой. Если с течением времени направление движения не меняется, то векторы $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ направлены вдоль одной и той же прямой и $\Delta\vec{\upsilon}_n = 0$.

Разделив $\Delta\vec{\upsilon}$ на Δt и устремив $\Delta t \to 0$, получим:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (2.4)$$

При $\Delta t \to 0$ точки M_1 и M_2 приближаются друг к другу, также как и точки A и C. Тогда угол при вершине M_1 равнобедренного треугольника M_1AC стремится к нулю, и направления векторов $\vec{\upsilon}_2$ и $\Delta\vec{\upsilon}_k$ стремятся к направлению вектора $\vec{\upsilon}_1$. Поэтому вектор $\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t}$ также направлен вдоль вектора $\vec{\upsilon}_1$, т.е. по касательной к траектории. Численное значение этого вектора равно

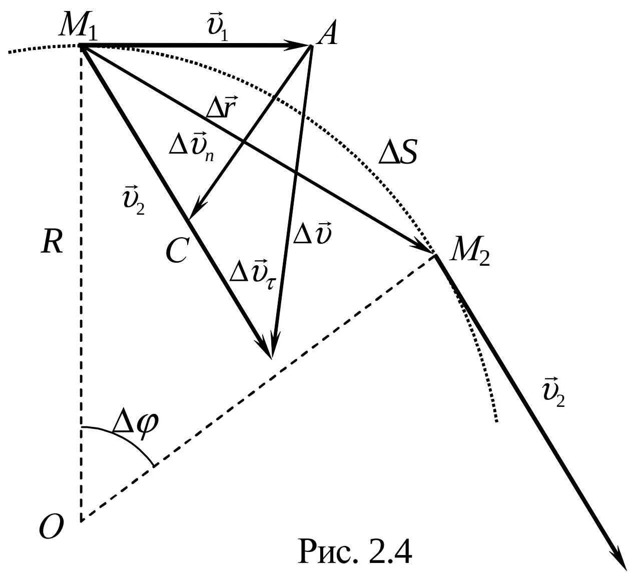


Рис. 2.4

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_\tau}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}, \qquad (2.5)$$

т.е. он характеризует быстроту изменения вектора скорости по величине. Этот вектор называется *касательным*, или *тангенциальным* (от лат. *tangens* – касающийся), ускорением.

Определим величину и направление второго вектора $\vec{a}_n$. Пусть все точки траектории лежат в одной плоскости. Восставим в точках M_1 и M_2 перпендикуляры к касательным до их пересечения в точке O. Дуга $\Delta S = M_1M_2$ будет практически дугой окружности с центром в точке O и радиусом $R=OM_1= OM_2$.

Пусть угол между отрезками OM_1 и OM_2, измеряемый в радианах, равен $\Delta\varphi$. Тогда длина дуги равна $\Delta S= R\Delta\varphi$. R носит название *радиуса кривизны* траектории, а величина $1/R$ – *кривизной траектории*. Точка O называется *центром кривизны*.

Соединив точки M_1 и M_2, получим второй равнобедренный треугольник OM_1M_2 вдобавок к существующему M_1AC. Т.к. $OM_1 \perp AM_1$ и $OM_2 \perp CM_1$, эти треугольники подобны друг другу. Из их подобия получим $\Delta r/\Delta\upsilon_n = R/\upsilon_1$, или $\Delta\upsilon_n = \Delta r\cdot \upsilon_1/R$. Отсюда можно найти величину вектора $\vec{a}_n$:

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon_1 \cdot \Delta r}{R \cdot \Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (2.6)$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ угол при вершине M_1 треугольника M_1AC стремится к нулю, а углы при основаниях стремятся к 90°. Следовательно, $\vec{a}_n$ в пределе перпендикулярен скорости и направлен к центру кривизны траектории. Вектор $\vec{a}_n$ определяет быстроту изменения вектора скорости по направлению и носит название *нормального ускорения*. Так как тангенциальное и нормальное ускорения взаимно перпендикулярны, модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}\,. \qquad (2.7)$$

Лекция 3

- *Преобразование координат.*
- *Сложение скоростей.*
- *Поступательное и вращательное движение.*
- *Угловая скорость и угловое ускорение.*
- *Простейшие законы движения.*

Основные понятия кинематики (продолжение)

Преобразования Галилея

В предыдущей лекции мы выяснили, что форма траектории зависит от выбранной для наблюдения за движением системы отсчета. В общем случае, когда характер относительного движения систем сложен, догадаться, как будет выглядеть движение в этих системах, достаточно трудно. Тем не менее, зная закон движения одной системы относительно другой, можно легко записать правила для перехода от координат одной системы к другой математически. Такие правила называются *преобразованиями координат*. Далее мы проанализируем пример для самого простого, но очень важного случая равномерного и прямолинейного относительного движения двух систем.

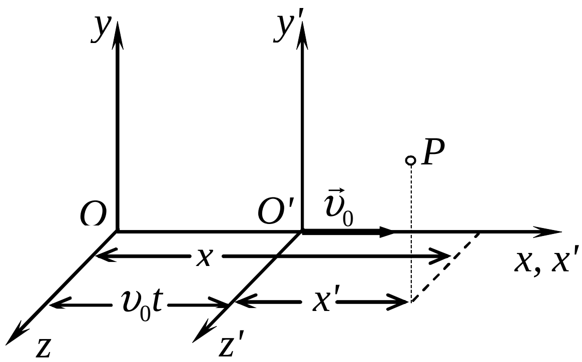


Рис. 3.1.

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 3.1). В этом случае оси абсцисс (x и x') для обеих систем удобно выбрать вдоль направления движения. Найдем связь между координатами x, y и z некоторой точки P в системе O и координатами x', y' и z' той же точки в системе O'. Отсчет времени ведется от момента, когда оси обеих систем совпадали. Как видно из рисунка,

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t, \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Совокупность этих уравнений называется *преобразованиями Галилея*. Их легко можно записать в векторной форме, учитывая, что $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ и $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$,

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{\upsilon}_0 t\,.$$

К системе (3.1) необходимо добавить принятое в нерелятивистской механике (и, казалось бы, совершенно очевидное) положение о том, что время в обеих системах координат протекает одинаково:

$$t = t'. \tag{3.2}$$

Классический закон сложения скоростей

Вспомним связь между радиус-вектором точки и ее скоростью, записанную на предыдущей лекции:

$$\vec{\upsilon} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

С учетом соотношения (2.9)

$$\vec{\upsilon}\,' = (\upsilon'_x, \upsilon'_y, \upsilon'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) = \left(\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}\right).$$

Продифференцировав соотношения (3.1) по времени, найдем связь между скоростями точки в системах *O* и *O'*:

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + \upsilon_0; \quad \upsilon_y = \upsilon'_y; \quad \upsilon_z = \upsilon'_z.$$

Три скалярных уравнения можно заменить одним векторным:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0\,. \tag{3.3}$$

Это соотношение называется *классическим законом сложения скоростей*. Итак, для определения скорости точки относительно системы отсчета, считающейся неподвижной, нужно *векторно* сложить скорость точки относительно подвижной системы со скоростью подвижной системы относительно неподвижной.

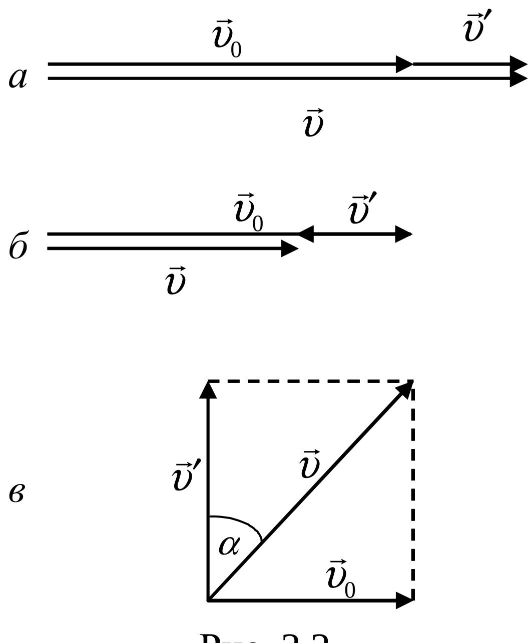


Рис. 3.2.

Говорят, Ньютон неоднократно подчеркивал, что примеры в науке – полезней правил. Поэтому поясним приведенный выше «набор слов» парой простых примеров (рис. 6).

Пусть вдоль перрона движется вагон со скоростью υ_0=10 м/с. Вдоль вагона идет человек со скоростью υ'=2 м/с (относительно вагона, конечно).

Если человек движется в том же направлении, что и вагон (рис 3.2*а*), его скорость относительно перрона равна 12 м/с.

Если же скорости вагона и человека противоположны (рис. 3.2*б*), скорость человека относительно перрона равна 8 м/с.

Пусть гребец держит лодку перпендикулярно течению, скорость которого υ_0=1 км/ч, и гребет со скоростью υ'=1 км/ч относительно воды (рис. 3.2*в*). Тогда скорость лодки относительно берега составляет $\upsilon = \sqrt{\upsilon'^2 + \upsilon_0^{\,2}} = \sqrt{2}$ км/ч и направлена под углом 45° к берегу $\left(\alpha = arctg\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon'}\right)$. Заметьте, во всех трех случаях нужно складывать векторы, так как закон сложения скоростей – векторный закон.

Продифференцируем выражение (3.3) еще раз по времени. В соответствии с (2.3), учитывая, что производная от постоянного вектора равна нулю, получим:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{3.4}$$

Следовательно, ускорение тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же.

Этот вывод об ускорении имеет очень большое значение, выходящее за рамки кинематики, поэтому мы еще вернемся к нему, изучая динамику.

Движение твердого тела

До сих пор мы рассматривали движение тела, представляющего собой всего одну точку. Но для реального протяженного тела движение различных точек происходит, вообще говоря, по разным законам. Поэтому описание движения такого тела представляет довольно сложную задачу. Тем не менее, если пренебречь возможными деформациями тела, т.е. считать его *абсолютно твердым*, то для описания движения можно пользоваться очень удобным приближением.

Оказывается, что сложное движение твердого тела можно представить в виде комбинации всего двух простых: *поступательного* и *вращательного* (доказательство этого факта мы оставим курсу теоретической механики).

Поступательное движение

Если при движении твердого тела прямая, проведенная через любые две точки, принадлежащие телу, остается параллельной самой себе, то говорят, что тело движется *поступательно* (см. рис. 3.3*а*).

Вращательное движение

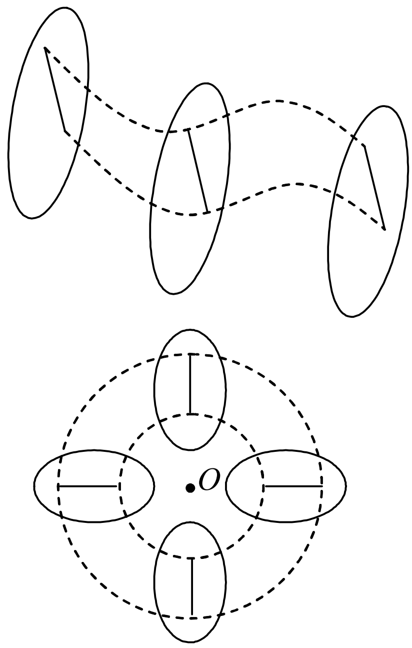


Рис. 3.3.

Если при движении твердого тела траектории всех его точек являются окружностями, то говорят, что тело движется *вращательно*. При этом прямая, на которой лежат центры всех окружностей, называется *осью вращения* (см. рис. 3.3*б*).

Нетрудно заметить, что при поступательном движении траектории всех точек тела идентичны. Поэтому для описания такого движения достаточно задать закон движения всего одной точки тела, что нам уже знакомо.

При вращательном движении траектории всех точек тела одинаковы только по форме. Перемещения и скорости различных точек неодинаковы: точки, лежащие дальше от оси вращения, за то же время проходят больший путь, чем ближние точки, а, следовательно, имеют большую по величине скорость. Тем не менее, для упрощения описания вращательного движения есть свой подход.

Движение по окружности

Нетрудно заметить, что, хотя различные точки вращающегося твердого тела за одинаковое время проходят разный путь, все они при этом поворачиваются на одинаковый угол. Поэтому *угол поворота* можно считать естественной мерой изменения положения тела при вращении вокруг оси. В определенном смысле угол при вращении – аналог перемещения для поступательного движения.

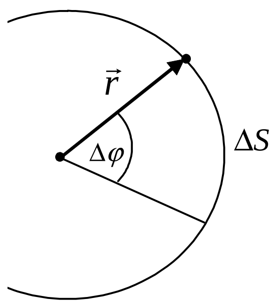


Рис. 3.4.

Пусть за время Δt одна из точек тела, находящаяся на расстоянии r от оси вращения, прошла путь ΔS, при этом ее радиус-вектор повернулся на угол $\Delta\varphi$. Угол, радиус и путь (длина дуги) связаны соотношением

$$\Delta S = r\cdot\Delta\varphi.$$

Разделив путь на время, получим $\Delta S/\Delta t = r\cdot\Delta\varphi/\Delta t$, или

$$\upsilon = r\cdot\omega, \tag{3.5}$$

где величина $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$, характеризующая быстроту поворота, носит название *угловой скорости* и измеряется в рад/с (или просто с$^{-1}$). Знак угловой скорости определяет, в какую сторону совершается поворот: на нашем рисунке $\omega > 0$, если точка вращается против часовой стрелки; $\omega < 0$, если точка вращается по часовой стрелке. Очевидно, что приведенное выше определение угловой скорости относится к ее средней за время Δt величине. Для характеристики мгновенной величины угловой скорости, как и в случае поступательного движения, нужно найти предельное значение:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{3.6}$$

Из определения угловой скорости видно, что она является аналогом обычной скорости при поступательном движении, называемой, в противоположность угловой, *линейной скоростью*.

Чтобы понять, почему знак угловой скорости был выбран нами именно так, а не иначе, отметим, что все вращательные величины, в том числе и скорость, можно представить в векторной форме. Однако, эти векторы не совсем обычные. В отличие от «обычных» векторов, иногда называемых *полярными* (таких, например, как перемещение или скорость), «вращательные» векторы всегда направлены вдоль оси вращения и, поэтому, называются аксиальными (лат. *axis* – ось). С аксиальными векторами обычно можно поступать как с обычными полярными, однако, если вы хотите, чтобы результат имел физический смысл, аксиальные векторы можно складывать и перемножать скалярно только между собой.

Существует особая векторная операция, связывающая между собой полярные и аксиальные векторы – *векторное произведение*. Так, например, векторное произведение двух полярных векторов – аксиальный вектор, а произведение аксиального вектора на полярный – полярный вектор. Векторное же произведение двух аксиальных векторов снова дает аксиальный вектор.

Математически координаты векторного произведения в декартовой системе записываются в виде определителя, составленного из ортов и координат векторов-сомножителей. Например, координаты векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно определить из следующего выражения:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z .$$

Из этого выражения легко сделать вывод, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Например, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в плоскости *xy*, т.е. a_z=0 и b_z=0, то вектор $\vec{c}$ имеет только компоненту вдоль оси z. Направление векторного произведения удобно определять при помощи правила «правого винта»: *если установить винт с правой резьбой так, чтобы он был перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы-сомножители, и вращать в направлении кратчайшего перемещения от первого сомножителя ко второму, то поступательное движение винта (вкручивается или выкручивается) совпадает с направлением векторного произведения*. Из этого определения, в частности, видно, что векторное произведение, в отличие от скалярного, зависит от порядка сомножителей (т.е. *некоммутативно*).

Это правило дает следующую связь между линейной и угловой скоростью

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{3.7}$$

На практике направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ удобнее определять несколько модифицированным правилом «правого винта»: *если поворачивать винт в направлении вращения тела, то его поступательное движение укажет направление вектора угловой скорости*.

Пусть точка движется по окружности с постоянной по модулю линейной скоростью. В соответствии с формулой (3.5) угловая скорость также остается постоянной. В этом случае вектор ускорения имеет только постоянную нормальную составляющую, направленную к центру окружности, и называется *центростремительным*. Такое движение называется *равномерным вращательным движением*. Не стоит забывать, что это все-таки ускоренное движение, потому что оно происходит с постоянным нормальным ускорением. Равномерное вращение характеризуется *периодом обращения T*, под которым понимается время, за которое каждая точка тела делает один оборот, т.е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$. Очевидно, что

$$\omega = 2\pi/T.$$

Число оборотов в единицу времени ν, *частота вращения*, равна

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi.$$

Следовательно, угловая скорость есть

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (3.8)$$

Если точка движется по окружности с непостоянной угловой скоростью, то можно ввести величину, характеризующую быстроту ее изменяется по времени и называемую *угловым ускорением*, $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Очевидно, что это выражение определяет среднее значение углового ускорения за время Δt, а *мгновенное угловое ускорение* следует по аналогии с (2.2) и (2.3) определить как *производную от вектора угловой скорости по времени*:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (3.9)$$

Направление вектора углового ускорения совпадает с направлением угловой скорости, если скорость вращения увеличивается, и противоположно направлению вектора угловой скорости, если она уменьшается.

Чтобы найти связь между величинами линейного и углового ускорения, выразим величину угловой скорости из (3.5) и учтем определение касательного (тангенциального) ускорения (2.5):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{a_\tau}{r}$$

Примеры законов движения

Знание законов движения, т.е. зависимостей, определяемых для каждой точки выражениями типа (2.1), позволяет определять положения тел в пространстве в любой момент времени в прошлом или будущем. Например, если бы вы знали точный закон движения вашего автобуса (или, что то же самое, расписание его движения), то никогда не опаздывали бы на лекции. К сожалению, в реальных условиях движение тел, как правило, происходит под воздействием многих трудноучитываемых факторов, таких, например, как прокол колеса автобуса. Кроме того, есть и другие более принципиальные причины, о которых мы поговорим позднее, при изучении квантовой механики, делающие совершенно невозможным определение точных законов движения для очень маленьких тел, таких как элементарные частицы.

Вывод законов движения представляет собой одну из *основных задач классической механики* и основывается на решении дифференциальных уравнений движения, определяемых законами динамики, речь о которых пойдет на следующей лекции. Однако самые простые законы движения могут быть получены лишь на основе определения характера движения.

Закон прямолинейного равномерного движения

Если скорость тела не изменяется ни по величине, ни по направлению ($\vec{\upsilon} = const$), то его движение называют *равномерным прямолинейным*. В этом случае систему координат удобно выбрать так, чтобы ось *x* совпала с направлением движения, $\vec{\upsilon} = (\upsilon_x, 0, 0)$. Тогда положение тела можно характеризовать всего одной координатой *x* (две другие не меняются).

По определению скорости

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x = const. \tag{3.10}$$

С точки зрения математики выражение (3.10) представляет собой простейшее *дифференциальное уравнение*. Для решения таких уравнений разработан целый раздел математики, но в нашем случае все не так сложно. Если понимать производную, как отношение бесконечно малых приращений (математики с этим согласны), то бесконечно маленькое перемещение *dx*, происходящее за время *dt* определяется соотношением:

$$dx = \upsilon_x dt.$$

Для нахождения перемещения за конечное время необходимо сложить бесконечное число бесконечно малых слагаемых в левой и правой частях этого равенства. Такая операция, называется интегрированием и обозначается стилизованной латинской буквой S ($\int$), начальной буквой слова сумма:

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \upsilon_x \int_{0}^{t} dt.$$

На самом деле последняя запись не совсем правильна: нельзя обозначать одним символом переменную интегрирования и предел интегрирования. Если быть математически корректным, то надо писать $\Delta x = \int_{x_0}^{x} d\xi = \upsilon_x \int_0^t d\tau$. Но мы-то, надеюсь, понимаем разницу, а настоящих математиков попросим быть к нам снисходительными!

Пределы интегрирования указывают, что отсчет времени ($t = 0$) начат в тот момент, когда координата тела была x_0 – *начальная координата*

дината, а к моменту времени t координата становится равной x. После интегрирования (мы надеемся, что вы умеете вычислять простейшие интегралы) получим:

$$x = x_0 + \upsilon_x t, \quad \text{где} \quad \upsilon_x = const. \qquad (3.11)$$

Это выражение и есть закон равномерного прямолинейного движения. Если кому-то нравится даже при прямолинейном движении вычислять все три координаты, он может пользоваться общим векторным выражением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon} t, \quad \text{где} \quad \vec{\upsilon} = const.$$

Равномерное вращение

В соответствии с (3.6) для равномерного вращения можно записать

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = const.$$

Заметим, что это выражение с точностью до буквенных обозначений совпадает с выражением (3.10), поэтому его решение можно записать сразу, заменив линейные величины (координаты и скорость) их вращательными аналогами (угол поворота и угловая скорость).

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \text{где} \quad \omega = const. \qquad (3.12)$$

Закон прямолинейного равноускоренного движения

Если тело движется так, что его скорость не изменяется по направлению и при этом его ускорение постоянно по величине ($a = const$), то его движение называют *прямолинейным равноускоренным* (иногда – *равнопеременным*). Эти условия можно представить и так: $a_n = 0, \quad a = a_\tau = const$. Систему координат снова удобно выбрать так, чтобы ось x совпала с направлением движения: $\vec{\upsilon} = (\upsilon_x, 0, 0)$, $\vec{a} = (a_x, 0, 0)$.

По определению ускорения

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = a_x = const.$$

Снова заметим, что это выражение с точностью до буквенных обозначений совпадает с выражением (3.10), поэтому

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \quad \text{где} \quad a_x = const; \qquad (3.13)$$

Здесь υ_{0x} – *начальная скорость* (скорость в момент времени t=0). Полученное выражение определяет зависимость скорости от времени при равноускоренном движении.

Теперь вернемся к определению скорости

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t\,.$$

Бесконечно маленькое перемещение dx, происходящее за время dt определяется соотношением $dx = \upsilon_{0x} dt + a_x t dt$, а конечное перемещение найдем интегрированием (математиков вновь попросим быть снисходительными)

$$\int_{x_0}^{x} dx = \upsilon_{0x} \int_{0}^{t} dt + a_x \int_{0}^{t} t dt\,.$$

Постоянные величины мы вынесли из-под интеграла. Первые два интеграла нам уже очень хорошо знакомы, ну а последний – ненамного сложнее! После интегрирования получим:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (3.14)$$

Это и есть знакомый вам со школьных времен закон равноускоренного движения, только получен он теперь по всем правилам науки (если, конечно, математики простят нам маленькие неточности при записи интегралов).

Ускоренное вращение

Мы легко можем распространить только что проведенные рассуждения на вращение с постоянным угловым ускорением. Так как определения для углового ускорения и угловой скорости совпадают с аналогичными определениями для линейных величин с точностью до буквенных обозначений, решения соответствующих дифференциальных уравнений тоже будут совпадать по форме. Поэтому, заменив в выражениях (3.13) и (3.14) соответствующие линейные величины их вращательными аналогами, сразу запишем:

$$\omega = \omega_0 + \beta t, \quad \text{где } \beta = const\,; \qquad (3.15)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}. \qquad (3.16)$$

Лекция 4

- *Принцип инерции, инерциальные системы.*
- *Сила и импульс. Уравнение движения.*
- *Принцип относительности.*
- *Действие и противодействие.*
- *Состояние системы.*

Основы динамики

Введение

Как мы уже говорили, механика состоит из трех частей: кинематики, динамики и статики. Одну из частей (кинематику) мы уже рассмотрели.

Динамика изучает движение в связи с теми причинами, которые определяют тот или иной характер движения.

Проблема возникновения движения и изменения его состояния является одной из основных в механике. Первые систематизированные данные по этому вопросу принадлежат, как мы уже отмечали во второй лекции, Аристотелю. По его представлениям, господствовавшим в мире около двух тысяч лет, для поддержания постоянного движения тела нужно непрерывно воздействовать на него, «подталкивать». При этом, чем больше сила, с которой толкают тело, тем больше его скорость. Если для движения телеги это, казалось бы, очевидно, то для объяснения полета стрелы пришлось придумывать гипотезу, согласно которой воздух устремляется в оставляемую стрелой после себя пустоту, подталкивая ее тем самым. Падение тел на землю объяснялось как «естественное» стремление всех «тяжелых» тел двигаться «вниз» (чем тяжелее тело, тем быстрее оно падает), в отличие от «легких» (огонь, воздух), которые стремятся «вверх». Для объяснения движения звезд и планет также пришлось придумать отдельную «теорию», согласно которой существуют «правильные» движения, которые «на кругах своя» осуществляются вечно без воздействия извне. Абсолютизация понятий «верх» и «низ», также, как и «кругов», по которым движутся звезды и планеты, указывает на то, что Аристотель считал Землю центром мира (*геоцентрическая* система мира – от греч. *ge* – Земля).

Первым ударом по этим представлениям стало *гелиоцентрическое* (от греч. *helios* – Солнце) учение Коперника, поставившего Землю в ряд обычных планет, вращающихся вокруг Солнца. А если Земля сама является обычным небесным телом, то и все тела на ней должны подчиняться одинаковым законам. В частности, падение всех тел должно описываться одинаково.

Исследованием проблемы падения тел занялся Галилей. Опыты по изучению падения тел и их движения по наклонной плоскости привели его к отрицанию идей Аристотеля и открытию ряда фундаментальных физических принципов, лежащих в основе механики и всей современной физики. Важнейшими из них являются *принцип инерции Галилея* и *принцип относительности Галилея*.

Принцип инерции заключается в том, что прямолинейное и равномерное движение тела будет сохраняться «само по себе» до тех пор, пока на него не действуют другие тела. Такое движение называют движением «по инерции».

Способ, которым Галилей пришел к пониманию этого принципа, можно представить примерно так. Будем рассматривать движение тела по горизонтальной поверхности после того, как оно соскользнуло с наклонной плоскости. Чем более гладкой является поверхность, тем больший путь пройдет тело до остановки, то есть тем медленнее изменяется его скорость. Если теперь представить себе бесконечную абсолютно гладкую горизонтальную поверхность, по которой тело скользит без сопротивления движению, то можно предположить, что его скорость вообще не будет изменяться.

Согласно принципу инерции (и вопреки Аристотелю) для поддержания постоянного движения не нужна сила, сила нужна для изменения движения. Правда сам Галилей ошибочно считал, что и движение планет по окружностям – тоже инерционное движение.

Суть принципа относительности Галилея можно выразить следующим образом. Одни и те же механические явления, происходящие в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью, протекают совершенно одинаково. Например, мяч будет падать вертикально и совершенно одинаково подскакивать как в самолете, стоящем на взлетной полосе, так и в самолете, летящем после набора высоты с постоянной скоростью.

Следующий этап в развитии механики связан с именем Исаака Ньютона (1643-1727). Он оставил огромное наследие в различных областях науки. Его работы по оптике, астрономии, математике явились важнейшими этапами в развитии этих наук. Но самым главным, прославившим имя Ньютона, было создание основ механики, открытие закона всемирного тяготения и разработка на его основе теории движения небесных тел.

Законы Ньютона

В основе классической или ньютоновской механики лежат три закона, сформулированные Ньютоном в 1687 году.

Первый закон Ньютона

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит изменить это состояние.

Этот закон является, по сути, формулировкой принципа инерции Галилея.

Первый закон выполняется не во всякой системе. Система отсчета, в которой выполняется первый закон, называется *инерциальной*. Часто первый закон Ньютона считают законом, определяющим инерциальные системы отсчета. Инерциальными системами являются все системы, которые либо покоятся, либо движутся равномерно и прямолинейно относительно какой-то инерциальной системы отсчета, установленной с помощью первого закона Ньютона.

С большой степенью точности инерциальной можно считать гелиоцентрическую систему координат, т.е. систему координат, связанную с Солнцем.

Земля не является инерциальной системой координат. Однако ускорение такой системы, связанное с вращением Земли, настолько мало, что в большинстве случаев ее можно считать инерциальной.

Второй закон Ньютона

Если на тело не действуют другие тела, то оно сохраняет состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно, т.е. с постоянной скоростью. Если же на тело воздействуют другие тела, то оно изменяет свою скорость. Опыт показывает, что одинаковые воздействия сообщают различным телам разные по величине изменения скорости. Совершенно очевидно, что если вы ударите ногой футбольный мяч и примерно такое же по размерам чугунное пушечное ядро, то скорости, приобретенные этими телами после удара (как, впрочем, и ваши ощущения) будут совершенно разными. Всякое тело сопротивляется попыткам изменить его состояние движения, причем для ядра в нашем примере это проявляется более отчетливо, чем для мяча. Свойство материальных тел сопротивляться изменению своей скорости под действием других тел называется *инертностью*. В принципе смысл инертности понятен интуитивно. Мы всегда говорим об инертности, если состояние какого-то объекта не изменяется под действием внешних факторов (например, химически инертные вещества или социально инертные люди). Не следует путать между собой понятий инерции и инертности: *инерция – это явление*, выражающееся в сохранении состояния движения тел, обладающих *свойством инертности*.

Для того чтобы описать изменение скорости тела при воздействии на него, введем понятие силы. Как мы уже говорили на первой лекции, сила – мера взаимодействия тел. То есть, вместо того чтобы говорить: «На первое тело действует второе тело», будем говорить: «На первое тело действует сила со стороны второго». Казалось бы, почти никакой разницы, но второй способ описания взаимодействия заметно удобнее.

Итак, пусть на тело действует сила F. Очевидно, что величина изменения скорости $\Delta \upsilon$, будет определяться как величиной силы, так и продолжительностью ее действия Δt. Для малого промежутка времени изменение скорости можно считать пропорциональным произведению силы на продолжительность ее действия

$$\Delta \upsilon = \frac{1}{m} F \Delta t .$$

Коэффициент пропорциональности записан так, чтобы величину m можно было ассоциировать с инертностью тела. Действительно, чем больше m, тем меньше изменение скорости, вызванное той же силой за одинаковый промежуток времени. Определенная таким образом величина m называется *массой тела* и является *количественной мерой его инертности*. В системе СИ масса измеряется в килограммах (кг), а сила – в ньютонах (Н = кг·м/с^2).

Так как определенная нами величина m является постоянной, последнее выражение может быть записано в виде:

$$\Delta(m\upsilon) = F \Delta t . \tag{4.1}$$

Величина, равная произведению массы на скорость (с учетом векторного характера скорости) называется импульсом тела

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} , \tag{4.2}$$

а произведение силы на промежуток времени ее действия – импульсом силы.

Переходя к пределу при Δt, стремящемся к нулю, и учитывая векторный характер величин, получим:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{4.3}$$

Скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе. Это и есть выражение для *второго закона Ньютона* или *основного закона динамики*. Дифференциальное уравнение (4.3) называют уравнением движения тела, поскольку его решение (совместно с условиями (4.2) и (2.2)) определяет закон движения – зависимость координат от времени.

Приведенные выше рассуждения ни в коем случае не стоит рассматривать как вывод второго закона. Этот закон является обобщением экспериментальных данных о движении тел под действием сил и играет роль одной из аксиом физики.

Отметим несколько особенностей использования второго закона Ньютона. Во-первых, в реальном мире редко встречаются ситуации, когда на тело действует всего одна сила (или когда всеми остальными пренебрегают). Сил, действующих на тело, столько, сколько реальных тел взаимодействует с нашим телом. А в выражение (4.3) входит *результирующая сила* – геометрическая сумма всех действующих на тело сил. В общем случае, если на тело действует N сил

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \tag{4.4}$$

Это выражение определяет *принцип суперпозиции*, являющийся следствием *линейности* основного закона динамики. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие (или на проекции вдоль осей координат). Использование принципа суперпозиции позволяет существенно упростить решение задач.

Во-вторых, если при движении масса тела не изменяется, то уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \text{ или}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \tag{4.5}$$

Ускорение, приобретаемое телом, совпадает по направлению с действующей на него результирующей силой и равно отношению этой силы к массе тела. Например, на рис. 4.1 ускорение тела $\vec{a}$ определяется результирующей силой $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$.

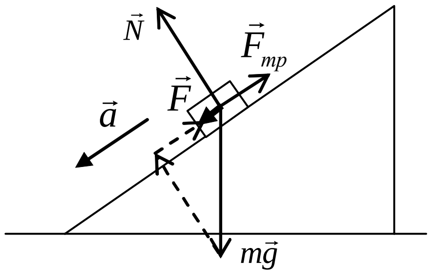


Рис. 4.1.

Второй закон в такой форме положен в основу определения единицы силы в системе СИ. За единицу силы принимают силу, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2. Эта единица называется *ньютоном* (Н).

Наконец, очень важно отметить, что второй закон Ньютона полностью соответствует принципу относительности Галилея.

Как было показано в предыдущей лекции ускорение тела одинаково в двух различных системах отсчета, движущихся с постоянной скоростью друг относительно друга (см. выражение (3.4)). С учетом (4.5) отсюда следует, что силы, действующие на тела в системах, будут одинаковы. Это означает, что уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, и с механической точки зрения все инерциальные системы отсчета эквиваленты. То есть:

Никакими механическими опытами, проведенными в данной системе невозможно установить, находится ли она в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.

В произведении Галилея «Диалог о двух системах мира» (1632 г.) главный герой Сальвиати говорит: «Заключите себя с каким-либо приятелем в возможно просторном помещении под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных животных. Пусть там будет также большой сосуд и в нем рыбки. Повесьте также на потолок ведро, из которого капля за каплей вытекла бы вода в другой сосуд с узким горлышком, находящимся внизу под ним. Пока не движется корабль, наблюдайте, как эти летающие животные с равною быстротой будут летать во все стороны комнаты. Увидите, что рыбы будут плавать безразлично во все стороны; падающие капли будут попадать в подставленный сосуд. И вы, бросая приятелю какую-нибудь вещь, не будете принуждены употреблять большую силу для того, чтобы бросить ее в одну сторону, чем в другую, если только расстояния одинаковы. Прыгая, вы будете проходить одинаковые пространства во все стороны, куда бы вы ни прыгали. Наблюдайте за всем этим и заставьте привести в движение корабль, с какою угодно быстротой. Если движение будет равномерно, вы не заметите ни малейшей перемены во всех указанных действиях и не по одному из них не в состоянии будете судить, движется ли корабль или стоит на месте. Вы, прыгая, будете проходить по полу те же самые пространства, как и прежде, т.е. вы не сделаете вследствие того, что корабль движется весьма быстро, больших прыжков к корме, чем к носу корабля, хотя в то время, когда вы находитесь в воздухе, пол, находящийся под вами, бежит к части противоположной вашему прыжку. Бросая вещь товарищу, вам не нужно с большей силой бросать, если он будет около носа корабля, вы же около кормы, чем наоборот. Капли будут падать, как и прежде, в нижний сосуд».

Из приведенной цитаты видно, насколько глубоко Галилей понимал принцип относительности. Он считал равномерное прямолинейное движение равноправным состоянию покоя. При описании движения все инерциальные системы эквивалентны. Нет никаких оснований отдавать предпочтение одной из них.

Третий закон Ньютона

Характер взаимодействия между телами определяется третьим законом Ньютона.

Возьмем два тела с массами m_1 и m_2 и поставим их в такие условия, чтобы они взаимодействовали между собой. Скорости частиц получат приращение $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$. Опыт показывает, что эти приращения всегда противоположно направлены. Отношение модулей приращений всегда определяется выражением

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|}=\frac{m_1}{m_2}.$$

Это отношение, с учетом направлений векторов скорости можно переписать в виде

$$m_1\cdot\Delta\vec{v}_1=-m_2\cdot\Delta\vec{v}_2 \qquad \text{или} \qquad \Delta(m_1\cdot\vec{v}_1)=-\Delta(m_2\cdot\vec{v}_2).$$

С учетом (4.1) можно тогда записать:

$$\vec{F}_{12}\Delta t=-\vec{F}_{21}\Delta t,$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила действующая на первое тело со стороны второго, $\vec{F}_{21}$ – сила действующая на второе тело со стороны первого, Δt – время столкновения. Откуда получается следующее соотношение между силами:

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$$

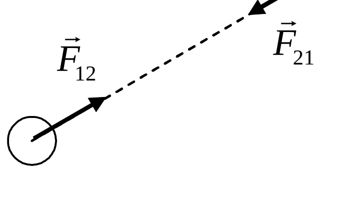


Рис. 4.2.

Это соотношение является выражением третьего закона Ньютона:

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга тела, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей центры инерции тел (рис. 4.2).

Иногда третий закон Ньютона формулируют и так: *сила действия равна силе противодействия*. При этом часто допускают ошибку, утверждая, что если действующая сила вызывает равную и противоположно направленную силу, то их равнодействующая должна быть равна нулю и тела вообще не могут приобрести ускорение. Третий закон говорит о равенстве сил, приложенных *к разным телам*. На каждое из взаимодействующих тел действует только одна из этих сил, которая и сообщает данному телу ускорение.

Так, например, совершенно неправильно считать, что силой противодействия для притяжения тела к Земле является реакция опоры. В этом случае силой противодействия будет сила притяжения Земли к телу, а реакция опоры противодействует весу тела.

Второй закон Ньютона как уравнение движения

Рассмотрим ряд примеров поясняющих использование второго закона Ньютона для нахождения законов движения тел.

Пусть действующая на тело результирующая сила равна нулю. Тогда в соответствии с (4.5) $m\vec{a} = 0$ или $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 0$. То есть $\vec{\upsilon} = const$. Следовательно, решением нашей задачи является закон равномерного прямолинейного движения (3.11), полученный в прошлой лекции.

Очевидно, что если на тело действует постоянная по величине равнодействующая сила, направленная вдоль его движения, то решением уравнения $m\vec{a} = \vec{F} = const$ или $\vec{a} = const$ будет закон равноускоренного движения (3.14).

Рассмотрим более интересный пример. Пусть на тело при его движении действует сила сопротивления, пропорциональная скорости тела. Такая ситуация реализуется, например, в случае не очень быстрого движения небольшого тела в вязкой среде. Пусть в начальный момент времени телу придали скорость $\vec{\upsilon}_0$. Найдем время движения тела до полной остановки и пройденный им за это время путь.

Тело движется под действием только одной силы – силы сопротивления, поэтому второй закон Ньютона имеет вид: $\vec{F}_{сопр.} = m\vec{a}$. Направим ось x вдоль скорости тела (рис. 4.3). Тогда в проекциях на эту ось уравнение движения запишется следующим образом: $ma = m\dfrac{d\upsilon}{dt} = -F_{сопр.}$. Зависимость силы сопротивления от скорости формально можно записать так: $F_{сопр.} = \alpha\upsilon$. Тогда для скорости получим следующее дифференциальное уравнение:

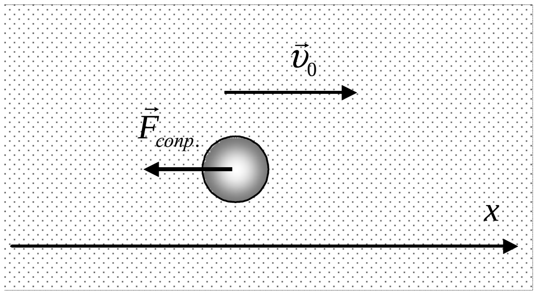


Рис. 4.3.

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -\alpha\upsilon \quad \text{или} \quad \frac{d\upsilon}{dt} = -\beta\upsilon, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\alpha}{m}.$$

Каждый уважающий себя студент знает, что если производная от функции – это сама функция, умноженная на константу, то эта функция – ничто иное, как экспонента. Итак, мы только что выяснили, как изменяется со временем скорость тела: $\upsilon = Ce^{-\beta t}$. Константу найдем, зная начальную скорость $\upsilon(t=0) = \upsilon_0$. Откуда окончательно для закона изменения скорости имеем

$$\upsilon = \upsilon_0 e^{-\beta t}.$$

Нетрудно заметить, что скорость тела постоянно уменьшается и станет равной нулю только через бесконечно большое время. Означает ли это, что тело никогда не остановится? Формально, да. Но какой тогда смысл имеет второй вопрос о пройденном до остановки пути? А вот здесь нас поджидает парадокс не хуже, чем у Зенона: *несмотря на то, что тело будет двигаться бесконечно долго, оно пройдет конечное расстояние*. Действительно, за время dt тело пройдет путь $\upsilon \cdot dt$, тогда весь путь равен сумме этих бесконечно маленьких «шажков»

$$s = \int_0^\infty \upsilon dt = \upsilon_0 \int_0^\infty e^{-\beta t} dt = -\frac{\upsilon_0}{\beta} e^{-\beta t}\Big|_0^\infty = \frac{\upsilon_0}{\beta} = \frac{\upsilon_0 m}{\alpha}.$$

Пройденный путь действительно оказался конечной величиной, тем большей, чем больше начальная скорость и масса тела и меньше коэффициент сопротивления α.

Таким образом, знание начальных координат и скоростей тел позволяет с помощью второго закона Ньютона однозначно определять состояние их дальнейшего движения.

Понятие состояния в классической механике

Понятие *состояния физической системы* является одной из наиболее общих идей, объединяющих все физические теории в единое научное мировоззрение. Совершенно по-разному задаются, например, состояния систем в физике частиц и в физике полей, а возникшая на их стыке квантовая физика, определяет состояние систем микрообъектов совершенно немыслимым с классической точки зрения способом. Но главная и определяющая идея при формировании понятия состояния едина для всех физических подходов: *начальное состояние однозначно определяет конечное состояние в зависимости от взаимодействий внутри системы, а также в зависимости от внешних воздействий на систему.*

Понятие состояния в физике было впервые отчетливо выявлено при построении классической механики. В классической механике Ньютона начальные условия задаются совокупностью координат $\vec{r}_i$ и импульсов $\vec{p}_i$, (или скоростей $\vec{v}_i$) всех частиц. Эти величины могут принимать произвольные значения: положение и импульс любой частицы не зависят от положений и импульсов всех других частиц.

Эволюция состояния системы описывается *уравнениями движения*. Уравнением движения классической механической системы является второй закон Ньютона, полностью определяющий поведение объектов. Это обстоятельство является решающим для того, чтобы *совокупность координат и импульсов* всех частиц рассматривать как характеристику *состояния системы*. Уравнения движения однозначно описывают изменение этого состояния во времени. Они определяют ускорения частиц в зависимости от сил. Силы являются однозначными функциями расстояний между частицами и их относительных скоростей.

В дальнейшем мы рассмотрим и способы описания других немеханических систем.

Лекция 5

- *Фундаментальные и нефундаментальные взаимодействия.*
- *Гравитация, сила тяжести, вес, невесомость.*
- *Упругость. Трение.*

Силы в природе

Введение

Познакомившись с законами Ньютона, мы попытаемся глубже проникнуть в смысл понятия «сила». Сила входит во второй и третий законы. Сила – есть мера взаимодействия тел. А что такое взаимодействие, почему оно возникает? Почему два магнита действуют друг на друга на расстоянии, а два деревянных кубика – нет?

Фундаментальные взаимодействия

По современным представлениям все многообразие явлений, наблюдаемых во Вселенной, обусловлено всего четырьмя видами взаимодействий, называемых *фундаментальными*. К ним относятся: *гравитационное, электромагнитное, слабое* и *сильное* взаимодействия.

Гравитационное взаимодействие (от лат. *gravitas* – тяжесть) осуществляется между любыми телами, обладающими массами, и проявляется в форме сил тяготения. Роль сил тяготения возрастает при переходе к большим массам. Именно они определяют структуру Вселенной в космических масштабах, удерживая планеты вблизи звезд и создавая звездные скопления. Благодаря гравитационным силам, вблизи Земли удерживается атмосфера и мы с вами. В микромире силы тяготения практически никакой роли не играют.

Электромагнитные взаимодействия осуществляются между телами, в состав которых входят электрически заряженные частицы. Эти взаимодействия удерживают электроны вблизи ядер, обеспечивая существование стабильных атомов, связывают атомы в молекулы, являются причиной действия сил между частицами газов, жидкостей и твердых тел, плазмы и играют основную роль во всех физико-химических и биологических процессах. Недаром иногда говорят, что жизнь – электромагнитный процесс.

Слабые взаимодействия обуславливают нестабильность многих микроскопических частиц, приводя их к распадам, и характерны только для определенного круга микроскопических квантовых процессов. Они не способны создавать устойчивые состояния вещества.

Сильные или *ядерные* взаимодействия связывают протоны и нейтроны в атомных ядрах, несмотря на электростатическое отталкивание положительно заряженных протонов друг от друга. Не будь ядерных сил, во Вселенной не могло бы существовать никаких атомов, сложнее атома водорода.

Ниже в таблице приведены результаты сравнения различных фундаментальных взаимодействий. Как видно, самым «сильным» действительно является сильное взаимодействие. Его интенсивность в сто раз больше, чем у электромагнитного; в сто тысяч миллиардов раз больше, чем у слабого и в невообразимое число раз (10^{39}) больше, чем у гравитационного.

Взаимодействие	Относительная интенсивность	Радиус действия
Гравитационное	1	∞
Слабое	10^{25}	$< 10^{-15}$ м
Электромагнитное	10^{37}	∞
Сильное	10^{39}	$< 10^{-15}$ м

Конечно, такое сравнение является довольно условным из-за трудности сопоставления сил различной природы. Например, характерной особенностью как сильных, так и слабых взаимодействий является их ограниченный и очень малый радиус действия. Они проявляются только в том случае, когда расстояние между взаимодействующими частицами не превышает 10^{-15} м. В отличие от них гравитационные и электромагнитные силы имеют неограниченный радиус действия. На малых расстояниях, порядка размеров атома и меньше, понятие силы вообще теряет смысл, а интенсивность взаимодействия определяется его энергией. Так энергия сильного взаимодействия протонов и нейтронов в ядре составляет в пересчете на одну частицу примерно 10 МэВ (мегаэлектронвольт), а энергия гравитационного взаимодействия двух протонов (или нейтронов, или протона с нейтроном) на таком расстоянии (10^{-15} м) примерно $2\cdot10^{-49}$ Дж $\approx 10^{-36}$ МэВ. При увеличении расстояния сильное взаимодействие быстро спадает до нуля, тогда как гравитационное уменьшается достаточно медленно и вскоре становится «сильнее» сильного.

Часто гравитационное и электромагнитное взаимодействие сравнивают по силам, действующим между заряженными частицами. Однако надо помнить, что если отношение сил электрического отталкивания и гравитационного притяжения двух электронов равно примерно $4 \cdot 10^{42}$, то аналогичное отношение для двух протонов в три с лишним миллиона раз меньше.

В настоящее время считается, что взаимодействие между телами передается при помощи *поля* – особой формы материи. Соответственно существуют гравитационное и электромагнитное поле, а также поля слабых и сильных взаимодействий. В классической физике поле принципиально отличается от *вещества*. Вещество – *дискретно* (от лат. *discretus* – разделённый, прерывистый), поле – *непрерывно*; поле распространяется в пространстве с конечной скоростью в виде волн.

Квантовая физика показала, что обе формы материи совершенно равноправны. При определенных условиях волны поля могут проявлять свойства частиц вещества, а частицы – волновые свойства. В квантовой электродинамике вводится понятия о «частицах» поля – *квантах*. Само взаимодействие тел представляется как обмен квантами. Частицы электромагнитного поля – *фотоны*; слабое взаимодействие передается *промежуточными векторными бозонами*; при описании ядерных взаимодействий вводят понятия о *мезонах* – частицах ядерного поля. Имеются попытки описать поле тяготения особыми частицами – квантами гравитационного поля – *гравитонами*. Однако квантовой теории гравитации в настоящее время нет.

Многие ученые считают, что все известные на сегодняшний день четыре типа фундаментальных взаимодействий – это проявления единого Взаимодействия, которое определяло движение единой протоматерии (греч. *protos* – первый) во Вселенной в первые мгновения после ее рождения. Затем, по мере возникновения структуры Вселенной, из него выделялись взаимодействия, связанные с возникшими у материальных частиц различными свойствами. Такой подход позволил в конце 60-х годов XX века создать единую теорию слабого и электромагнитного взаимодействий – *электрослабого* взаимодействия (Вайнберг С., Глэшоу Ш., Салам А.). В принципе, ясно, как включить в эту схему сильное взаимодействие, и работы в этом направлении активно ведутся. Гораздо сложнее объединить с этими взаимодействиями гравитационное, в основном, по причине отсутствия квантовой теории гравитации.

В классической механике все силы имеют гравитационную или электромагнитную природу. Например, силы трения, упругости, давления или реакции, в конце концов, являются проявлением электромагнитных взаимодействий атомов или молекул, т.е. не являются фундаментальными.

Закон всемирного тяготения

К началу XVII века большинство ученых признало гелиоцентрическую систему, предложенную Николаем Коперником (1473-1545). Согласно этой системе все планеты движутся вокруг Солнца. Однако ученым того времени не были ясны ни законы движения планет, ни причины, определяющие характер их движения. Через полвека после Коперника Иоган Кеплер (1571-1630), обрабатывая точные наблюдения Тихо Браге (1546-1601), а также свои собственные, нашел три кинематических закона движения планет:

1. *Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце* (1609).

2. *Радиус-вектор, связанный с планетой, «заметает» в равные промежутки времени равные площади* (1609).

3. *Кубы больших полуосей эллипсов пропорциональны квадратам времен обращения планет* (1619).

В 1687 году Ньютон опубликовал труд, в котором изложил закон всемирного тяготения. Мы попытаемся проследить за ходом мысли Ньютона, упростив математическую сторону дела.

В первом приближении можно считать, что планеты движутся почти равномерно по орбитам, которые мало отличаются от окружностей. Но при движении тела по окружности имеется центростремительное ускорение, направленное к центру орбиты, т.е. к Солнцу. Из основного закона динамики следует, что это ускорение вызывается некоторой силой. Значит, Солнце действует на каждую планету с некоторой силой.

Известно, что Луна вращается вокруг Земли, значит, они притягиваются друг к другу. Ньютон выдвинул решающее предположение, что сила тяжести, действующая на тела вблизи поверхности Земли, сила, с которой Земля притягивает Луну, а также сила, с которой взаимодействует Солнце с планетами, имеют совершенно одинаковое происхождение.

Итак, пусть планета движется по окружности, тогда $a_n = \upsilon^2/R =$

$\dfrac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R = \dfrac{4 \cdot \pi^2}{T^2} R$. Согласно третьему закону Кеплера для двух планет $R_1^3 / R_2^3 = T_1^2 / T_2^2$, откуда $R_1^3 / T_1^2 = R_2^3 / T_2^2 = const = K$, где $K = \dfrac{R^3}{T^2}$ – постоянная Кеплера. Поэтому $a_n = \dfrac{4 \cdot \pi^2}{T^2} R = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot K}{R^2}$. Так как $F = m \cdot a_n$, то $F = 4 \cdot \pi^2 \cdot K \cdot m \cdot \dfrac{1}{R^2}$ или $F \sim 1/R^2$.

Коэффициент $4\pi^2 K$ не зависит от параметров планет. Для всех планет Солнечной системы имеет одно и то же значение. Ньютон предположил, что этот коэффициент зависит от параметров Солнца. Так как сила пропорциональна массе планеты, то она должна быть пропорциональной и массе Солнца, т.е. $4\pi^2 K = \gamma \cdot M$; откуда

$$F = \gamma \frac{Mm}{R^2}.$$

Коэффициент γ, входящий в закон тяготения, называется *гравитационной постоянной*. Он численно равен силе, с которой взаимодействуют частицы с единичными массами, расположенные на расстоянии равном единице. Следует отметить, что Ньютон не знал ни одного численного значения масс небесных тел, как и постоянной γ.

Закон всемирного тяготения формулируется следующим образом: *сила тяготения между двумя <u>точечными</u> телами пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*.

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{5.1}$$

От сил тяготения нельзя экранироваться, их действие не зависит от промежуточной среды.

Отметим, что изложенные выше соображения могут служить лишь иллюстрацией к возможным рассуждениям Ньютона.

Выражение (5.1) справедливо только для точечных тел. Если необходимо рассчитать силу взаимодействия между протяженными телами, их нужно разбить на точки, найти силы взаимодействия между всеми парами точек, принадлежащих различным телам, и определить результирующую этих сил. В частности, для тел, обладающих сферически симметричным распределением масс, такая процедура дает выражение, совпадающее по форме с (5.1), где r – расстояние между центрами тел.

Опытное определение гравитационной постоянной

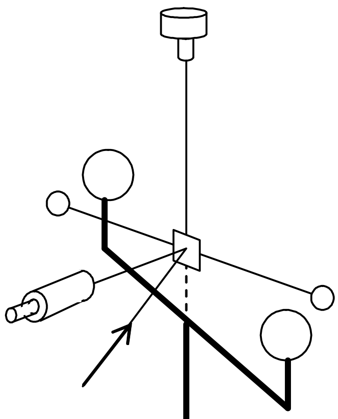


Рис. 5.1.

Генри Кавендиш (1731-1810) в 1798 году опытным путем определил гравитационную постоянную γ. Для этого он создал специальную установку. К концам деревянного стержня были прикреплены два шарика по 730 г каждый. Стержень был подвешен на медной проволоке. К другому горизонтальному деревянному стержню были прикреплены два свинцовых шара по 158 кг каждый. Центры тяжести всех четырех грузов лежали в одной горизонтальной плоскости (рис.5.1). Когда стержни перпендикулярны друг другу, силы взаимного притяжения уравновешиваются. Затем, вращая стержень с тяжелыми шарами, можно приблизить шары друг к другу. Медная проволока, на которой подвешены лёгкие шары, закручивается на некоторый угол φ. Угол закручивания измеряется с помощью зрительной трубы. Все устройство находилось в специальном помещении, защищенном от колебания температуры и колебаний воздуха. По углу закручивания можно определить силу взаимодействия между шарами. Кавендиш провел серию опытов и определил гравитационную постоянную. Он получил $\gamma = 6{,}717\cdot10^{-11}$ м^3/кг·с^2. По современным уточненным данным $\gamma = 6{,}6745\cdot10^{-11}$ м^3/кг·с^2.

На основании закона всемирного тяготения нетрудно определить массу и плотность Земли. Ускорение на поверхности Земли $g = \dfrac{\gamma M_З}{R_З^2}$ = 9,8 м/с^2, поэтому, зная $R_З$ и считая Землю однородным шаром, можно найти ее массу. Расчет дает для массы Земли значение $M_З \approx 6\cdot10^{24}$ кг.

Отсюда средняя плотность Земли ρ =5500 кг/м^3, это более чем вдвое превосходит плотность поверхностных слоев Земли, что позволяет предполагать наличие внутри Земли плотного ядра. Аналогично можно определить массу Солнца $M_С \approx 2\cdot10^{30}$ кг.

Кстати, когда Кавендиш создавал установку, у него спрашивали: «Чем вы занимаетесь, что строите?» Он отвечал: «Делаю весы для измерения массы Земли». И «умные» люди не спорили с ним, а, глубокомысленно вращая пальцем у виска, «понимали», с кем имеют дело.

Сила тяжести, вес, невесомость

Итак, притяжение тел к Земле есть следствие закона всемирного тяготения. Значит сила тяжести, действующая на небольшое тело массой m, находящееся на высоте h над поверхностью Земли, может быть найдена по формуле (5.1): $F_T = \gamma \dfrac{M \cdot m}{(R+h)^2}$, где M – масса Земли, а R – ее радиус.

Если на тело действует только сила тяжести, то оно приобретает ускорение $g(h) = \dfrac{F_T}{m} = \gamma \dfrac{M}{(R+h)^2}$. Это ускорение называется ускорением силы тяжести или *ускорением свободного падения*. Обычно под ускорением свободного падения подразумевают величину, измеренную вблизи поверхности Земли, т.е. при $h = 0$. В этом случае $g = g(0) = \gamma \dfrac{M}{R^2} \approx 9{,}8$ м/с^2. Часто силу тяжести так и записывают: $\vec{F}_T = m\vec{g}$.

В принципе, ускорение свободного падения зависит от высоты местности над уровнем моря. Но если вспомнить, что высочайшая вершина на Земле *Эверест* или *Джомолунгма*, или *Сагарматха* находится в Гималаях на высоте 8848 м ≈ 9 км над уровнем моря, а радиус Земли составляет примерно 6400 км, то можно считать земную поверхность практически гладкой. Вместе с тем при решении некоторых задач необходимо учитывать и столь малые поправки. Нелишне напомнить, что из-за вращения вокруг своей оси Земля имеет не совсем шарообразную форму: она сплюснута у полюсов и вытянута к экватору. Поэтому полярный радиус короче экваториального, а ускорение свободного падения, и, следовательно, сила тяжести, на полюсах больше, чем у экватора.

А как будет изменяться сила тяжести, если мы начнем «зарываться под землю», например, спустимся в очень глубокую шахту? На первый взгляд может показаться, что в соответствии с (5.1) сила должна увеличиваться, но это не так. Ведь совершенно очевидно, что в центре Земли никакой силы действовать на тело не должно. Здесь нужно поступить, как было отмечено выше: разбить Землю на точки и найти результирующую силу, действующую со стороны всех точек на находящееся внутри Земли тело, которое тоже можно считать точкой.

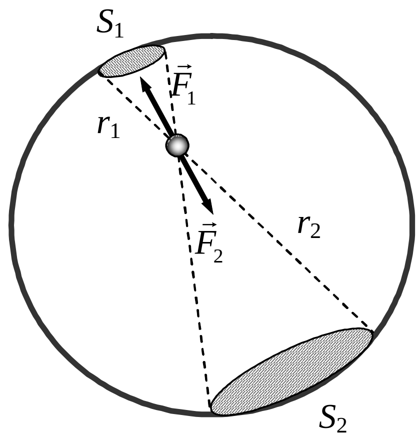


Рис. 5.2.

Можно поступить проще. Сначала покажем, что гравитационная сила, действующая на находящееся внутри тонкого сферического слоя маленькое тело, равна нулю. Выделим на сфере два небольших диаметрально противоположных сегмента (см. рис. 5.2). Массы сегментов пропорциональны их площадям, которые в свою очередь пропорциональны квадратам расстояний от тела до соответствующего сегмента: $m_1 \sim r_1^2$, $m_2 \sim r_2^2$. Силы, действующие на тело со стороны сегментов, пропорциональны их массам и обратно пропорциональны квадратам расстояний до сегментов, а, следовательно, одинаковы. Так как $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены противоположно, их результирующая равна нулю. А так как выбор сегментов произволен, то такое соотношение справедливо для любых пар сегментов. Значит результирующая сила, действующая на тело со стороны всего сферического слоя также равна нулю.

Если теперь тело находится на расстоянии $r < R$ от центра Земли, то все верхние слои не будут давать вклада в гравитационную силу, а притяжение будет определяться той частью массы, которая сосредоточена в шаре радиусом r. То есть сила тяжести будет уменьшаться по мере приближения к центру Земли. Характер уменьшения зависит от распределения массы, например, если бы плотность земного вещества была постоянной, то сила тяжести уменьшалась бы пропорционально расстоянию до центра Земли (покажите самостоятельно!).

Вес

Иногда силу тяжести отождествляют с *весом* тела. Однако мы, как и большинство физиков, будем различать эти понятия: *вес тела – это сила, с которой тело давит на опору или натягивает подвес*. При таком определении вес и сила тяжести совсем не одно и то же. Покажем, что они могут иметь разные значения для одного и того же тела. Рассмотрим тело массой m, подвешенное на нити. Предположим, что нить вместе с телом может ускоренно двигаться в вертикальном на-

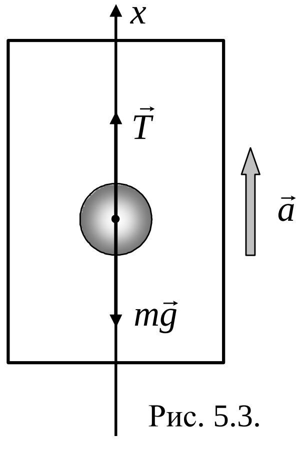


Рис. 5.3.

правлении, например, тело подвешено в кабине лифта. Пусть сначала ускорение нити с телом $\vec{a}$ направлено вверх (см. рис. 5.3). Заметьте, что это не означает только ускоренное движение вверх (как многие считают), но также и «замедленное» движение вниз (лифт движется вниз, уменьшая скорость). Запишем для тела второй закон Ньютона в проекции на выбранную ось x:

$$T - mg = ma$$

Согласно определению, вес тела $\vec{P}$ – это сила, с которой тело растягивает нить. Но с другой стороны натянутая нить действует на тела с силой $\vec{T}$ (сила натяжения или упругости, или реакция нити). По третьему закону Ньютона эти силы равны по величине, следовательно:

$$P = T = m(g + a).$$

Как видно из полученного результата, если, то вес тела превышает силу тяжести ($P > mg$). В этом случае говорят, что тело испытывает *перегрузку*.

Аналогично, если ускорение направлено вниз (лифт движется, разгоняясь, вниз или, замедляясь, вверх), то: $T - mg = -ma$ или

$$P = T = m(g - a).$$

В этом случае при $a \neq 0$ вес меньше силы тяжести, а в случае $a = g$ вес вообще исчезает. Такое состояние называется *невесомостью*.

Итак, проще всего испытать невесомость, забравшись в лифт и позволив ему свободно падать с верхнего этажа. Во время падения ваш вес исчезнет, и вы сможете свободно парить в кабине лифта, как космонавт в космическом корабле. К несчастью – недолго. Как только лифт достигнет поверхности земли (или дна лифтовой шахты), его скорость почти мгновенно уменьшится до нуля. Это означает, что возникнет огромное ускорение, направленное вверх, а ваше тело начнет испытывать очень большую перегрузку, и, скорее всего, разрушится, не выдержав собственного веса.

А как же космонавты? Они действительно постоянно падают на Землю вместе с космическим кораблем. Точнее центростремительное ускорение при движении корабля по орбите точно равно ускорению свободного падения на данной высоте (*первая космическая скорость*).

Подобный эффект наблюдается и на поверхности Земли. Из-за ее вращения все точки обладают центростремительным ускорением, направленным к оси вращения. В наибольшей степени это явление наблюдается на экваторе, где центростремительное ускорение направлено точно к центру Земли («вниз»), и в соответствии с приведенными выше рассуждениями вес тел уменьшается. По мере удаления от экватора скорость вращения поверхности Земли, а следовательно и центростремительное ускорение, уменьшается, и у полюсов эффект уменьшения веса исчезает.

Заметьте, что этот эффект складывается с эффектом изменения силы тяжести из-за сплюснутости Земли, усиливая его. Так что, если вы будете возить экзотические фрукты из экваториальных стран в приполярные районы, то можете иметь дополнительную прибыль в виде примерно шести килограммов товара с каждой тонны без всяких ухищрений. Только взвешивать нужно обязательно на пружинных, а не на рычажных весах. Кстати, объясните почему?

Силы упругости. Закон Гука

Согласно первому закону Ньютона, если скорость тела не изменяется, то на него *не действуют силы* или *действие всех сил уравновешено*. А можно ли физически различить два этих случая? На первый взгляд – нет, потому что не происходит никаких изменений состояния тела. Однако такой ответ справедлив лишь для мира, в котором все тела абсолютно твердые. Все реальные тела под действием сил изменяют размеры и форму, т.е. деформируются. Таким образом, действие сил может проявляться не только в ускорении тела, но и в его деформации.

Если деформации не слишком велики, тела почти полностью восстанавливают свои первоначальные размеры и форму. Такие деформации называются *упругими*. Деформации, которые остаются после прекращения действия силы, называются *пластическими*.

При деформации реального тела форма никогда не восстанавливается полностью, т.е. реальные деформации – всегда пластические. Однако, если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь. В этом случае тело считается *абсолютно упругим*.

Наличие сил упругости объясняется тем, что между электрическими зарядами, из которых состоят атомы, возникают электромагнитные взаимодействия. Положение, занимаемое атомом в твердом теле, соответствует равновесию между силами притяжения и отталкивания. Это равновесие – устойчивое, т.е. при смещении атома возникают силы, стремящиеся вернуть его в исходное положение. Если на тело воздействует внешняя сила, оно деформируется, и атомы смещаются. Когда действие сил прекращается, система вновь стремиться перейти в состояние равновесия. Правда, при больших смещениях новое положение равновесия может не совпасть со старым: положение равновесия определяется конфигурацией атомов, и если ее сильно изменить, изменится и положение равновесия.

Введем некоторые понятия, с помощью которых описываются процессы деформации. Для этой цели рассмотрим стержень длиной L с поперечным сечением S. К концу стержня приложим силу F. Длина стержня под действием силы измениться на величину ΔL.

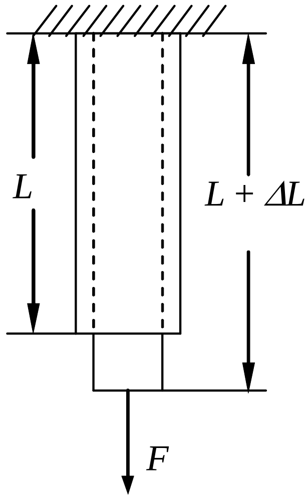


Рис. 5.4.

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения S, называется *механическим напряжением*.

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, является его *относительная деформация*.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}.$$

Одно из первых исследований сил упругости было проделано Робертом Гуком (1635-1703). Согласно полученному им закону (закон Гука):

Для малых деформаций относительное удлинение и напряжение прямо пропорциональны друг другу

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{5.2}$$

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем Юнга*.

Можно записать закон Гука в виде, знакомом вам из школьного курса: $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{F}{SE}$; или

$$F = \ =k \cdot \Delta L,$$

где $k = \dfrac{ES}{L}$ – *коэффициент упругости*, или упругость, а для пружины – *жесткость*. Удлинение стержня или пружины при упругой деформации пропорционально действующей силе.

Закон Гука лежит в основе измерения сил в быту и технике, например, при помощи динамометра или пружинных весов.

Деформация сдвига

Деформацию сдвига можно осуществить, если взять брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда и приложить к нему силу F_τ касательную к его поверхности. Относительная деформация определяется в этом случае по формуле: $tg\gamma = a/b$. *Тангенциальным напряжением* называется величина $\tau = F_\tau/S$. Опыт показывает, что

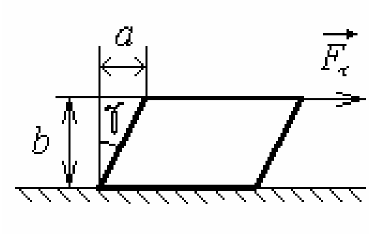


Рис. 5.5.

$$\tau = G\gamma, \qquad (5.2а)$$

где G – *модуль сдвига*.

Силы трения

Всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него со стороны других тел с течением времени останавливается. В соответствие с законами динамики, это можно объяснить существованием некоторой силы, которая препятствует движению. Эта сила – сила сопротивления или *трения* направленная противоположно относительному перемещению данного тела и приложена по касательной к соприкасающимся поверхностям.

Различают *внешне* (сухое, т.е. трение без смазки) и *внутреннее* (жидкое или *вязкое*) трение. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, то говорят о *трении покоя*.

Рассмотрим некоторые закономерности внешнего трения.

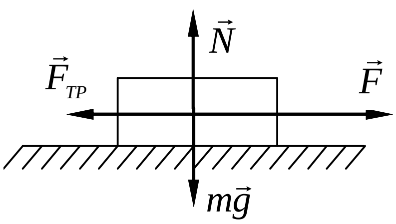


Рис. 5.6.

Пусть к телу, лежащему на горизонтальной плоскости, приложена горизонтальная сила, значение которой F. Тело придет в движение, когда приложенная сила будет больше силы трения $F_{тр}$. Французские физики Гильом Амонтон (1663-1705) и Шарль Кулон (1736-1806) опытным путем установили следующий закон: *сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления*

$$F_{тр} = \mu \cdot N, \qquad (5.3)$$

где μ - *коэффициент трения скольжения***,** зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

Парадоксально, что трение скольжения не зависит от скорости движения. Оно лишь немного падает с увеличением скорости и колеблется около среднего значения. Еще одна парадоксальная особенность силы сухого трения: *Сила трения покоя и сила трения скольжения не зависят от площади соприкасающихся поверхностей.*

Как объяснить этот факт? Самые совершенно отполированные поверхности имеют беспорядочно расположенные выступы, высота которых составляет несколько сотен атомных диаметров. Поэтому у двух прижатые друг к другу поверхности молекулярное соприкосновение происходит только в малых, строго локализованных зонах. Общее сечение всех этих зон составляет лишь очень малую часть бруска. Но в этих зонах давления очень высоки. Поперечные сечения вследствие пластической деформации увеличиваются. Они растут до тех пор, пока общее сечение всех зон не сможет выдержать груз. Итак, общее сечение зависит только от силы давления, которая сжимает тела. Сумма площадей всех зон молекулярного контакта не зависит от площади соприкосновения тел, на которой распределены зоны.

Трение качения

Пусть колесо радиуса r прижато к горизонтальному полотну дороги силой N. Экспериментально установлено, что, чтобы заставить колесо катиться с постоянной скоростью, следует приложить силу

$$F_к = \mu_к \cdot \frac{N}{r}. \tag{5.4}$$

Отношение силы трения качения к силе трения скольжения при одинаковых нагрузках имеет очень малую величину. Понять это можно, рассматривая оба вида трения как обрыв адгезионных связей (от лат. *adhaesio* – прилипание). При скольжении адгезионные связи на контакте обрываются одновременно, а при качении – последовательно и притом весьма малыми порциями. Попробуйте, например, оторвать липкую ленту от гладкой поверхности стола, прикладывая усилие к одному из ее концов в первом случае горизонтально, вдоль ленты, а во втором – вертикально вверх. Ясно, что во втором случае добиться результата можно, прилагая значительно меньшее усилие.

Внутреннее трение или вязкость

Опыт показывает, что между двумя слоями жидкости (или газа), движущимися параллельно друг другу, возникает сила вязкого трения, величина которой определяется выражением (закон Ньютона для вязкого трения):

$$F = \eta \cdot \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \cdot S, \qquad (5.5)$$

где S – площадь каждого слоя, Δx – расстояние между «средними линиями» слоев, Δv – разность скоростей их движения, η – коэффициент вязкости жидкости. Величина $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от одного слоя к другому, и называется *градиентом* скорости (от лат. *gradiens* – последовательно повышающийся, ступенчатый).

Если в жидкости (или газе) движется тело, то в результате адгезии слой, непосредственно прилегающий к нему начинает двигаться со скоростью тела. В жидкости возникает градиент скорости, а на тело действует сила сопротивления, обусловленная вязким трением. При не очень большой скорости движения тела (как оценить степень малости мы обсудим в лекции 13, посвященной гидродинамике) сила сопротивления оказывается пропорциональной скорости тела υ, его характерному размеру l, а также вязкости жидкости (газа):

$$F = A \cdot \eta \cdot l \cdot \upsilon .$$

Коэффициент A зависит от формы тела. Например, для медленно движущегося в жидкости шарика английский физик Джордж Габриель Стокс (1819-1903) получил следующее выражение для силы сопротивления:

$$F_C = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot \upsilon, \qquad (5.6)$$

где R – радиус шарика.

Особенностью силы вязкого трения является отсутствие силы трения покоя. Поэтому малой силой в воде можно сдвинуть с места большой корабль.

Подробней о вязкости мы поговорим в лекции, посвященной гидродинамике (лекция 13).

Лекция 6

- *Концепция энергии.*
- *Работа силы. Мощность силы.*
- *Кинетическая энергия – энергия движения.*
- *Потенциальная энергия – энергия взаимодействия.*
- *Потенциальные и непотенциальные силы.*
- *Связь силы и энергии. Равновесие.*
- *Силовое поле*

Механическая работа и механическая энергии

Введение

В предыдущей лекции при описании фундаментальных взаимодействий отмечалось, что в некоторых случаях наглядные механические модели теряют смысл. Например, понятие силы невозможно использовать при описании взаимодействий микрочастиц, когда они проявляют волновые свойства. Тем не менее, все материальные объекты в природе обладают неким общим свойством, позволяющим их сравнивать при любых условиях. Количественной мерой этого свойства является *энергия* (от греч. *energeia* – действие, деятельность). В некотором смысле понятие энергии сродни понятию стоимости в товарных отношениях: каждому товару приписывается количественная величина, позволяющая сравнивать его с другими для проведения равноценного обмена. Точно так же энергия является наиболее общей количественной мерой различных форм движения и взаимодействия материи: понятие энергии связывает воедино все явления природы. Различным физическим процессам соответствует тот или иной вид энергии: механическая, тепловая, электромагнитная, гравитационная, ядерная и т. д. Особое значение энергия имеет вследствие существования закона ее сохранения, о котором мы поговорим чуть позднее.

Работа

Термин «энергия» в физику ввел в начале XIX века английский физик Томас Юнг. Он считал энергию мерой способности тел совершать работу. Поэтому далее обсудим подробнее физический смысл понятия работы, или точнее говоря, *механической работы*.

С бытовой точки зрения понятие работы не однозначно. Например, если математик доказывает новую теорему, то с точки зрения общества он работает (и за это ему иногда даже деньги платят). С точки зрения малограмотного обывателя этот чудак занимается ерундой (и за что только ему платят), а с точки зрения самого математика он вообще, быть может, просто удовольствие получает.

В физике понятие работы максимально объективно и однозначно. Пусть на тело действует сила $\vec{F}$, и при этом тело совершает перемещение $\Delta\vec{r}$. *Механической работой* называют величину, равную скалярному произведению силы на перемещение

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos\alpha, \qquad (6.1)$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения.

В системе СИ единицей работы является *джоуль*. Джоуль – это работа, совершаемая силой в 1 Н на расстоянии 1 м: Дж = Н·м.

Как видно из выражения (6.1) понятие работы в механике заметно отличается от понятия работы в обыденной жизни. Если тело не перемещается ($\Delta r = 0$), то работа силы равна нулю. Например, человек держит в руках двухпудовую гирю. Его бросает в пот, руки дрожат, он тяжело дышит, как будто вбежал по лестнице на шестнадцатый этаж, но механической работы он не совершает. Не будет совершаться никакой механической работы, если человек переносит груз горизонтально. В этом случае направление всех действующих сил вертикально (если, конечно, не учитывать трение), $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, и, следовательно, $A = 0$. Наконец, работа может оказаться и отрицательной, если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. В такой ситуации иногда говорят, что работа совершается против данной силы.

Вернемся к описанной выше ситуации с гирей. Почему в этом случае физиологически человек явно ощущает повышенный расход энергии: возникает чувство усталости и даже голода. С другой стороны человек мог бы просто положить груз на стол и держать на этой высоте сколь угодно долго, не затрачивая никакой энергии. Почему стол не тратит энергии, а человеку необходимо ее затрачивать?

Все дело в особенностях физиологии работы мышц. Для осуществления движения тела человек использует мышцы, называемые *поперечно-полосатыми, или скелетными*. Эти мышцы могут контролироваться нашей волей при помощи нервных импульсов. Когда нервный импульс достигает мышечного волокна, оно несколько сокращается и затем опять расслабляется; когда мы держим груз, то в мышцу сплошным потоком текут нервные импульсы, множество волокон сокращается, пока другие отдыхают. Это можно даже увидеть: когда рука устает держать тяжесть, она начинает дрожать. Таким образом, процесс удержания тяжести связан с постоянным сокращением и расслаблением мышц, т.е. с совершением ими настоящей механической работы.

Неужели природа не смогла создать такие мышцы, которые удерживали бы тело в заданном положении без затрат энергии, как стол? Оказывается, смогла. Есть другие мышцы, называемые *гладкими* (например, мышцы внутренностей). Гладкие мышцы способны «оцепенеть». Например, моллюск может многие часы без устали удерживать свои створки, подобно столу, на который положен груз. Мышца, удерживающая створки «застывает» в определенном положении, не совершая никакой работы, не требуя от моллюска никаких усилий. Правда, у гладких мышц один существенный недостаток: они очень медленно работают. Для увеличения скорости приходится идти на дополнительные энергетические затраты.

Работа переменной силы

Выражение (6.1) не может быть использовано для вычисления работы, если во время перемещения тела сила изменяется по величине или направлению. В этом случае всю траекторию следует разбить на элементарные участки, выбрав перемещения $\Delta\vec{r}_i$ столь малыми, чтобы за время прохождения этого участка силу можно было считать почти постоянной. Тогда работа силы на каждом элементарном участке приблизительно равна

$$A_i \approx \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i ,$$

а работа на всем пути может быть вычислена как сумма элементарных работ:

$$A \approx \sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i .$$

При устремлении величин всех перемещений к нулю, в соответствии с правилами математики, придем к точному равенству

$$A = \int \delta A = \int_{\{L\}} \vec{F} \cdot d\vec{r} . \qquad (6.2)$$

Интеграл берется вдоль кривой $\{L\}$, определяющей траекторию движения тела. Величина $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ называется *элементарной работой*. Обозначение δA используется, чтобы подчеркнуть, что элементарная работа не является дифференциалом (приращением).

Рассмотрим ряд примеров вычисления работы для сил различной природы: упругости и тяготения.

Работа силы упругости

Найдем работу, совершаемую силой упругости при растяжении (или сжатии) пружинки. Закрепим один конец пружины, а второй совместим с началом координат (пружина не растянута). Координатную ось x направим вдоль пружины (рис. 6.1). При растяжении (или сжатии) пружины деформация равна значению координаты незакрепленного конца x, а проекция силы упругости противоположна ей по знаку. Тогда закон Гука в проекции на ось x выглядит следующим образом:

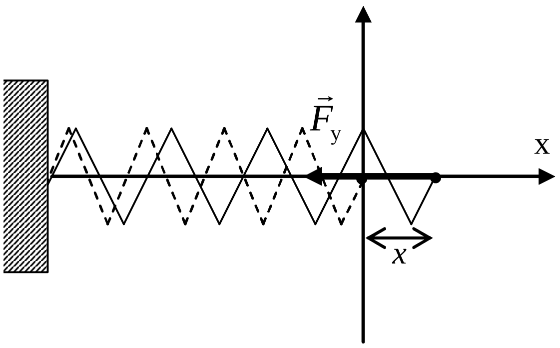


Рис. 6.1.

$$F_у = -kx, \qquad (6.3)$$

где k – коэффициент жесткости пружины. Согласно (6.2) при перемещении конца пружины от положения x_1 до x_2, работа силы упругости составит

$$A_у = \int_{x_1}^{x_2} F_у \cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx \cdot dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \qquad (6.4)$$

Работа гравитационной силы

Рассмотрим перемещение небольшого тела массой m, на которое действует сила тяготения со стороны тяжелого тела массой M. Найдем работу этой силы при перемещении малого тела из точки, находящейся на расстоянии r_1 от большого тела (которое считается неподвижным), в точку, находящуюся на расстоянии r_2.

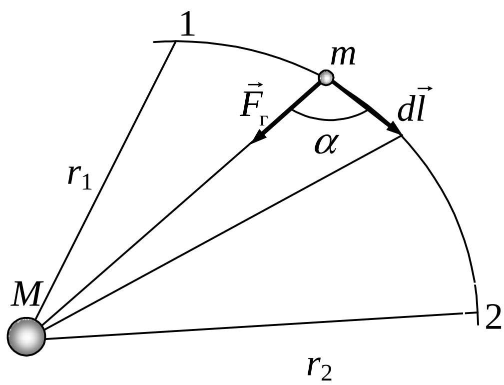


Рис. 6.2.

Пусть пробное тело массой m перемещается между точками 1 и 2 по произвольной траектории (рис 6.2). Элементарная работа силы тяготения на элементарном участке $d\vec{l}$ (для перемещения использовано другое обозначение, т.к. буквой r обозначается расстояние между телами) равна

$$\delta A_{\text{г}} = \vec{F}_{\text{г}} d\vec{l} = \gamma \frac{M \cdot m \cdot dl \cdot \cos\alpha}{r^2} = -\gamma \frac{M \cdot m \cdot dr}{r^2}.$$

Мы учли, что $dl \cdot \cos\alpha = dr$, а также тот факт, что положительное направление радиальной оси (ось r) противоположно направлению силы притяжения.

Отсюда для работы на полном пути от положения 1 до 2 получается выражение:

$$A_{\text{г}} = -\gamma \cdot M \cdot m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \qquad (6.5).$$

Работа силы тяжести

Нетрудно показать (предлагаем вам сделать это самостоятельно), что работа силы тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ определяется следующим соотношением:

$$A_{\text{т}} = mgh_1 - mgh_2, \qquad (6.6)$$

где h_1 и h_2 – начальная и конечная высота тела над поверхностью земли.

Мощность

На практике часто имеет значение не только величина работы, но и время за которое она совершается. *Средней мощностью* за промежуток времени Δt называется отношение работы, совершаемой за это время, к промежутку времени:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t}.$$

Таким образом, мощность характеризует быстроту совершения работы. *Мгновенной мощностью* называется предел

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A}{\Delta t} = \frac{\delta A}{dt}. \qquad (6.7)$$

Мгновенную мощность можно выразить через силу и мгновенную скорость

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (6.8)$$

Единицей измерения мощности в системе СИ служит *ватт*: Вт = Дж/с. Внесистемной единицей мощности является *лошадиная сила*:

1 л.с. = 75 кгс·м/с = 749,5 Вт.

Не забывайте, что лошадиная сила – это вовсе не сила, а мощность. *Килограмм силы* (кгс) – техническая единица силы: 1 кгс равен весу тела массой 1 кг (1 кгс = 1 кг · 9,81 м/с^2 = 9,81 Н).

Кинетическая энергия.

Найдем работу всех сил, действующих на тело. Очевидно, она равна работе результирующей силы $\delta A = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, а перемещение $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$. Тогда $\delta A = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot \vec{\upsilon}dt = m\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}$. Учтем, что в соответствии со свойствами скалярного произведения и правилами дифференцирования $d(\upsilon^2) = d(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}) = 2\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}$. Следовательно, $\delta A = \dfrac{1}{2} md(\upsilon^2) = = d\left(\dfrac{m\upsilon^2}{2} \right) = dK$ или после интегрирования

$$A = K_2 - K_1 = \Delta K. \tag{6.9}$$

Оказывается, что работа результирующей силы может быть представлена в виде приращения некоторой величины

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{6.10}$$

Эта величина по смыслу (мера совершаемой работы) является энергией, и так как она связана с движением тела, ее называют *кинетической энергией* (от греч. *kinetikos* – движущий).

Если действующая на тело результирующая сила равна нулю**,** то кинетическая энергия тела остается постоянной.

В общем случае сила и скорость не параллельны друг другу. В этом случае силу можно разложить на две составляющие параллельную и перпендикулярную скорости. Работа силы, которая перпендикулярна скорости, равна нулю. Такая сила изменяет лишь направление скорости, но не меняет ее значения, а в выражение кинетический энергии входит модуль скорости.

Потенциальная энергия

Движущееся тело обладает энергией, т.е. может совершить работу. Однако тело может совершить работу и, находясь в особом положении среди других тел. Например, сила тяжести может совершить работу по перемещению поднятого над землей камня. Причем, работа будет тем больше, чем выше поднят камень.

Выше мы показали, что существуют силы, *работа которых не зависит от формы траектории*. К их числу относятся упругие и гравитационные силы. Работа в поле таких сил определяется разностью величин, зависящих только от начального и конечного положений тела (см. (6.4), (6.5), (6.6))

$$A_{\text{п}} = \Pi_1 - \Pi_2 = -(\Pi_2 - \Pi_1) = -\Delta\Pi . \qquad (6.11)$$

Так как величина Π представляет меру совершаемой работы, она является энергией. Этот вид энергии называется *потенциальной* (от лат. *potentia* – сила), так как характеризует силовое взаимодействие тел.

Совершенно недопустимо говорить о потенциальной энергии тела, не указывая поле, в котором находится это тело. Согласно (6.4), (6.5) и (6.6) потенциальные энергии упругого и гравитационного взаимодействий, а также взаимодействия в поле силы тяжести соответственно равны:

$$\Pi_{\text{у}} = \frac{kx^2}{2};$$

$$\Pi_{\text{г}} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r} \qquad (6.12)$$

$$\Pi_{\text{т}} = mgh$$

Заметим, что потенциальную энергию можно найти только с точностью до некоторой произвольной постоянной, т.к. работа определяется разностью потенциальных энергий. Значит, нулевой уровень потенциальной энергии может быть выбран произвольно. Например, в первом из определений (6.12) потенциальная энергия выбрана равной нулю при отсутствии деформации пружины. Во втором – на бесконечности, когда сила притяжения равна нулю (тела не взаимодействуют). В третьем определении считается, что начало отсчета потенциальной энергии совпадает с поверхностью Земли (ясно, что этот выбор очень условен, т.к. сама «поверхность» находится не на одинаковом расстоянии, например, от центра Земли). Обычно положительный знак потенциальной энергии соответствует возможности тел совершить работу против внешних сил, а отрицательный характеризует связывающее состояние (когда тела притягиваются).

Силы, для которых можно ввести понятие потенциальной энергии называются потенциальными силами. Если потенциальные силы не зависят явно от времени, то их называют *консервативными* (от лат. *conservatio* – сохранение). Что же сохраняют эти силы? В одной из следующих лекций мы покажем, что они сохраняют неизменной механическую энергию**.**

Легко доказать, что работа консервативной силы по замкнутой траектории равна нулю. Действительно, если начало и конец траектории совпадают, то совпадают и потенциальные энергии в этих точках, а их разность равна нулю. Это условие математически записывается так:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0. \tag{6.13}$$

Условие (6.13) называют *условием потенциальности силового поля*.

Если сила не удовлетворяет условию (6.13), то она является *неконсервативной*, и для нее невозможно ввести понятие потенциала. Примером такой силы является сила трения. Действительно, независимо от формы траектории, работа силы трения всегда имеет отрицательную величину, т.к. сила трения всегда противоположна перемещению тела. Значит $\oint \vec{F}_{\text{тр}} \cdot d\vec{r} < 0$.

Связь между силой и потенциальной энергией

Пусть на тело действует потенциальная сила. Работу такой силы можно выразить двумя способами. С одной стороны работа может быть вычислена согласно определению

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r};$$

с другой (см. (6.11))

$$\delta A = -\, d\Pi$$

Конечно, работа по перемещению тела не зависит от того, с помощью какой формулы ее вычислять, поэтому

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\Pi$$

Скалярное произведение $\vec{F} d\vec{r}$ можно записать так:

$\vec{F} d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$. Стало быть,

$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\, d\Pi$.

Взяв от этого выражения частные производные по x, y и z, получим:

$$F_x = -\partial П/\partial x; \quad F_y = -\partial П/\partial y; \quad F_z = -\partial П/\partial z,$$

или

$$\vec{F} = -(\vec{i}\,\partial/\partial x + \vec{j}\,\partial/\partial y + \vec{k}\,\partial/\partial z)П = -\,\mathrm{grad}П \qquad (6.14)$$

Указанная процедура дифференцирования потенциальной энергии носит название нахождения ее градиента. Таким образом, потенциальная сила может быть представлена как градиент потенциальной энергии, взятый со знаком минус.

Для тех, кто забыл, напомним, что частная производная от функции нескольких переменных берется так, будто все переменные, кроме выбранной, являются постоянными. Чтобы отличать ее от полной производной, используется круглая буква «дэ» (∂).

Равновесие

Учитывая, что вектор градиента скалярной величины (энергия – скалярная величина) направлен в сторону максимально быстрого возрастания этой величины, можно сказать, что сила направлена в сторону наиболее быстрого уменьшения потенциальной энергии.

Это означает, что в потенциальном поле силы стремятся придать телу такое положение, при котором его *потенциальная энергия минимальна*.

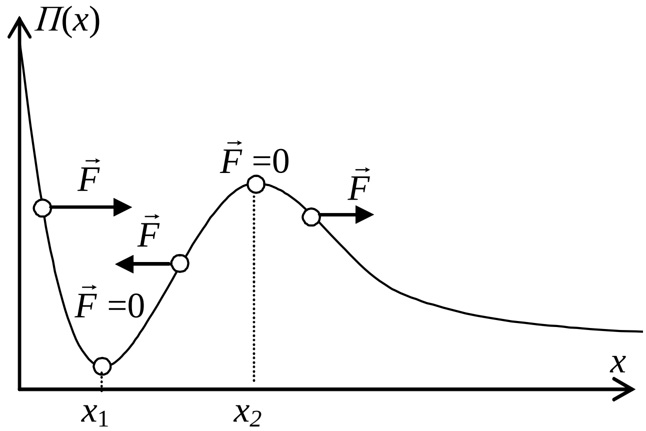


Рис. 6.3.

Пусть положение тела задается всего одной координатой (в этом случае говорят, что у тела имеется всего одна *степень свободы*), например движение точки осуществляется вдоль оси x. На рис. 6.3 изображена зависимость потенциальной энергии этого тела от координаты.

В соответствии с (6.14) $F_x = -\partial П/\partial x$. Поэтому в точках минимума или максимума потенциальной энергии результирующая сила, действующая на тело, обращается в нуль (в экстремальных точках производная функции равна нулю). Эти точки соответствуют *равновесным положениям* тела. Равновесие в точке x_1 называется *устойчивым*, т.к. при небольших смещениях тела из этой точки в любую сторону возникают силы, стремящиеся вернуть ее в положение равновесия. Говорят, что тело находится на дне *потенциальной ямы*. При небольших смещениях тела из точки x_2 возникают силы, стремящиеся еще больше удалить точку от равновесия. Такое равновесие называется *неустойчивым* (тело находится на вершине «горки»).

В случае возможности движения тела в любом направлении (три степени свободы) положения равновесия задаются условием $\mathrm{grad}\Pi = 0$. В частности, трехмерная поверхность потенциальной энергии в случай силы тяжести совпадает с поверхностью земли, и маленький шарик действительно будет стремиться скатиться с горки на дно какой-нибудь ямки.

Понятие о силовом поле

Если тело поставлено в такие условия, что оно подвержено действию других тел с силой, закономерно изменяющейся от точки к точке, то говорят, что тело находится в *силовом поле*. Так, например, тело вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести: в каждой точке пространства на него действует сила $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$. Эта сила в каждой точке пространства одинакова по величине и направлению. Такое силовое поле называют *однородным*.

На тело, находящееся вблизи другого массивного тела, например Солнца, действует гравитационная сила притяжения. Поле такой силы характерно тем, линия действия силы в любой точке траектории тела, проходит через центр Солнца. Поле сил, обладающее таким свойством, называется *центральным*. По характеру действующих сил поля бывают потенциальными и непотенциальными (консервативными и неконсервативными).

В гравитационном поле сила, действующая на пробное тело массой m_0, пропорциональна этой массе. В таком случае удобно ввести величину, характеризующую силовые свойства поля и не зависящую от массы пробного тела

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0}. \qquad (6.15)$$

Такая величина называется *напряженностью* гравитационного поля.

Очевидно, что для поля силы тяжести напряженность эквивалентна ускорению свободного падения.

$$\vec{G} \equiv \vec{g}$$

Величина вектора напряженности гравитационного поля, создаваемого точечной массой m в соответствии с (6.15) и (5.1) равна

$$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2}.$$

Аналогично можно ввести энергетическую характеристику гравитационного поля. Она определяется отношением потенциальной энергии пробного тела к его массе и называется *потенциалом* гравитационного поля

$$\varphi = \frac{\Pi}{m_0}. \qquad (6.16)$$

В частности, потенциал поля силы тяжести в соответствии с (6.16) и (6.12)

$$\varphi(h) = gh,$$

а потенциал гравитационного поля, создаваемого точечной массой

$$\varphi(r) = -\gamma \frac{m}{r}.$$

Между напряженностью и потенциалом силового поля существует такая же связь, как и между силой и потенциальной энергией: напряженность поля равна градиенту его потенциальной энергии, взятому с обратным знаком

$$\vec{G} = -\mathrm{grad}\,\varphi. \qquad (6.17)$$

При решении стандартных задач механики понятия напряженности и потенциала поля используются не слишком часто, но в некоторых физических приложениях концепция поля очень плодотворна. Мы более подробно рассмотрим эту концепцию при изучении электромагнетизма. Там, в частности, будет показано, что физические силовые поля обладают материальной сущностью и могут существовать независимо от порождающих их материальных тел.

Лекция 7

- *Законы Ньютона на «вращательном» языке.*
- *У физиков «момент» – не всегда момент времени!*
- *«Странности» вращения.*

Динамика твердого тела

Введение

До сих пор мы рассматривали динамику движения точки, а также поступательного движение твердого тела, которое, как отмечалось в лекции 3, полностью определяется движением любой его точки.

Теперь рассмотрим динамику твердого тела подробнее, и, прежде всего, разберемся, как описывать его вращение. Вращательное движение тела важно не только в связи с его распространенностью, но и потому, что в соответствии с принципом независимости движений (также упоминавшемся в лекции 3), любое произвольное движение может быть представлено совокупностью вращения тела относительно его центра масс и поступательного движения этой точки.

В самом общем случае твердое тело может вращаться вокруг неподвижной точки; при этом его движение можно свести к трем независимым вращениям вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через точку (три *вращательных степени свободы*). Однако эта задача очень сложна, и мы ограничимся рассмотрением вращения тела вокруг одной оси (одна вращательная степень свободы). Такое вращение называется плоским. Ось может быть неподвижной (например, ось ротора электродвигателя), а может и перемещаться в пространстве (например, ось катящегося по шоссе колеса).

Во всех случаях бросается в глаза устойчивость, приобретаемая телом при вращении. Так, тонкий диск (например, монету) трудно поставить на ребро, чтобы при этом он стоял устойчиво, но если закрутить диск вокруг вертикального диаметра, то он приобретает значительную устойчивость. Кольцо из легкой металлической цепочки, поставленное на стол, тотчас же падает, принимая неправильную форму. Но если раскрутить его на шкиве двигателя, имеющего горизонтальную ось вращения, и осторожно стянуть со шкива, действуя с силой, направленной вдоль оси шкива, то кольцо побежит по столу и даже поднимется по наклонной плоскости, как твердое.

Момент силы и момент инерции

Обобщая результаты наблюдений, можно заключить, что тело, вращающееся вокруг оси, проходящей через центр масс, если оно освобождено от внешних воздействий, должно сохранять вращение с *постоянной угловой скоростью* сколь угодно долго. Это заключение аналогично первому закону Ньютона для поступательного движения, определяющему принцип инерции. Конечно, при этом отдельные точки тела движутся ускоренно (равномерное вращение – ускоренное движение). Ускорение обеспечивается внутренними силами упругости, возникающими при деформации тела (хотя мы ими и пренебрегаем, считая тело абсолютно твердым, но в действительности деформации имеются).

Если при вращательном движении имеется нечто подобное инерции, то есть смысл поискать величину являющуюся своеобразной мерой инертности тела при таком движении. Вы, конечно, помните, что свойство массы, как меры инертности вытекает из второго закона Ньютона (см. лекцию 4). Поэтому попытаемся установить вид второго закона Ньютона в форме удобной для вращательного движения, т.е. найти связь между причиной изменения угловой скорости и быстротой ее изменения (угловым ускорением).

Прежде всего, выясним, что является причиной изменения угловой скорости? При поступательном движении причиной изменения скорости является сила. Но совершенно очевидно, что сила, приложенная к телу так, что линия ее действия проходит через ось вращения, не сможет изменить угловой скорости тела: вы никогда не сможете раскрутить колесо, прикладывая к ободу силу, направленную вдоль радиуса колеса. Более того, понятно, что, чем дальше от оси вращения проходит линия действия силы, тем «охотнее» и быстрее меняется угловая скорость тела. В качестве примера попробуйте вращать (открывать или закрывать) дверь, давя на нее на разных расстояниях от оси вращения.

Выберем в качестве меры воздействия на тело при вращательном движении произведение величины силы F на расстояние d от линии ее действия до оси вращения, называемое *плечом силы*. Такое произведение называют *моментом силы*:

$$M = F \cdot d\ .$$

Как показывает опыт, угловое ускорение тела пропорционально величине момента силы:

$$\beta = \frac{1}{I} M \text{ или } M = I \cdot \beta.$$

Записанное выражение полностью аналогично второму закону Ньютона для поступательного движения в виде $F = m \cdot a$. При этом понятие силы заменяется понятием момента силы, а величина I, называемая *моментом инерции тела относительно выбранной оси*, аналогична массе, т.е. является мерой инертности при вращательном движении: *чем больше момент инерции, тем труднее изменить угловую скорость тела*.

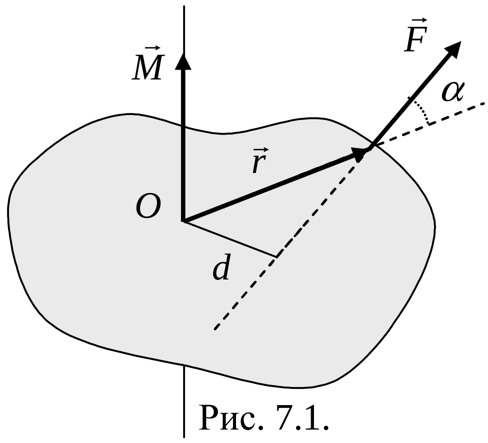


Рис. 7.1.

Полученный второй закон Ньютона для вращательного движения можно представить и в векторной форме (рис. 7.1):

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\beta}. \quad (7.1)$$

Вектор момента силы определяется векторным произведением следующего вида:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (7.2)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный (в нашем плоском случае) перпендикулярно оси вращения в точку приложения силы.

Из рисунка 7.1 видно, что плечо силы связано с величиной радиус-вектора и углом между радиус-вектором и силой:

$$d = r \cdot \sin\alpha$$

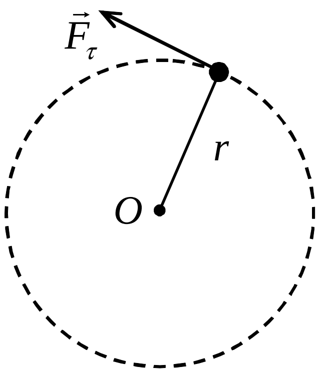


Рис.7.2.

Для того чтобы установить форму выражения для момента инерции, рассмотрим вначале вращение одной материальной точки массой m по окружности радиуса r (рис. 7.2). Пусть на точку действует постоянная сила $\vec{F}_\tau$, направленная по касательной к окружности. Тогда точка приобретает постоянное тангенциальное ускорение a_τ, определяемое равенством: $F_\tau = m \cdot a_\tau$. Учтем, что угловое ускорение связано с линейным соотношением $\beta = \dfrac{a_\tau}{r}$, тогда $F_\tau = mr \cdot \beta$. Умножив правую и левую части этого уравнения на r, получим: $F_\tau \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \beta$. Учтем, что величина, стоящая слева есть момент силы F_τ, тогда величина, численно равная *произведению массы точки на квадрат расстояния от нее до оси вращения*

$$I = m{\cdot}r^2 , \qquad (7.3)$$

представляет собой *момент инерции точки* относительно оси вращения.

Перейдем теперь к рассмотрению твердого тела, вращающегося вокруг оси *OO'*. Разобьем тело на большое число малых элементов с массами Δm_i . Пусть расстояние от одного из таких элементов до оси вращения равно r_i, а сила, действующая на него, равна $\vec{F}_i$. Раскладывая этот вектор на три составляющих, как показано на рис. 7.3, мы видим, что только сила $\vec{f}_i$ влияет на вращение выбранного элемента. Для этого элемента запишем уравнение $f_i = \Delta m_i{\cdot}a_i$, или $f_i = \Delta m_i{\cdot}r_i{\cdot}\beta$, или, домножив на r_i , $f_i\, r_i = \Delta m_i{\cdot}r_i^2{\cdot}\beta$.

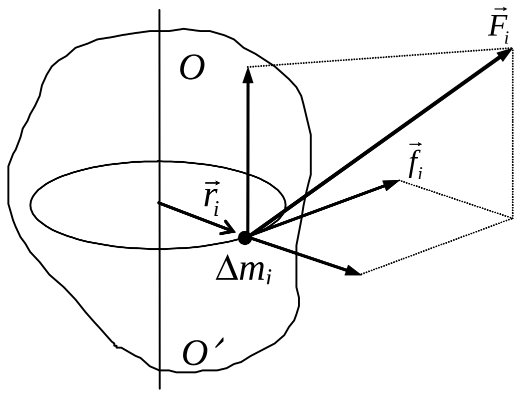


Рис. 7.3.

Такие же равенства мы можем записать для всех остальных элементов, а затем просуммировать их:

$$\sum f_i\, r_i = \sum \Delta m_i{\cdot}r_i^2{\cdot}\beta.$$

Величина $M = \sum f_i{\cdot}r_i$ является полным моментом сил, действующих на тело, относительно оси вращения *OO'*. Следовательно, величина, равная сумме моментов инерции отдельных элементов, составляющих тело, является *моментом инерции тела* относительно данной оси:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad (7.4)$$

Вычисление моментов инерции

Как следует из определения (7.4) момент инерции тела – *аддитивная* величина, то есть момент инерции тела, состоящего из нескольких частей, относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции этих частей относительно той же оси. Формула (7.4) является приближенной, так как мы разбивали тело на конечные элементы, а момент инерции элемента считали, как для точки. Для того чтобы сделать эту формулу точной, нужно перейти к пределу, устремив размеры всех элементов к нулю (ясно, что число элементов станет тогда бесконечно большим).

Это удобно сделать, введя понятие *плотности* $\rho_i = \Delta m_i / \Delta V_i$, тогда можно преобразовать формулу для момента инерции тела к виду

$I = \Sigma\rho_i\, r_i^2 \cdot \Delta V_i$.

Перейдем к пределу при $\Delta V_i \to 0$, что соответствует замене суммирования интегрированием:

$$I = \int\limits_{\{V_{\text{тела}}\}} \rho \cdot r^2 dV \,. \qquad (7.5)$$

Если тело *однородно*, величину плотности можно вынести за знак интеграла.

Момент инерции тонкостенного полого цилиндра (кольца)

Пусть ось вращения проходит вдоль оси симметрии цилиндра. Разобьем его на полоски, идущие параллельно его оси. Ввиду малой толщины стенок цилиндра мы можем считать, что все части такой полоски лежат на одинаковых расстояниях от оси OO'. Поэтому момент инерции одной такой полоски равен

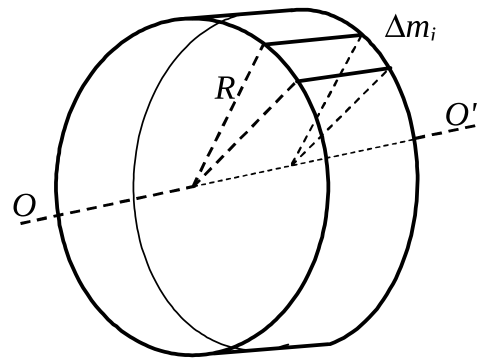


Рис. 7.4.

$\Delta I = \Delta m_i \cdot R^2$,   где Δm_i – масса полоски.

Момент инерции всего тонкостенного полого цилиндра

$I = \sum\Delta m_i \cdot R^2 = R^2 \cdot \sum\Delta m_i$.

Но $\sum\Delta m_i$ есть масса всего цилиндра, поэтому

$$I = m \cdot R^2. \qquad (7.6)$$

Отметим, что момент инерции, согласно (7.4) или (7.5), определяется распределением массы тела относительно оси и поэтому результат вычисления зависит от выбора оси. В частности в данном случае столь простой результат получен благодаря тому, что расстояние от любой точки цилиндра до оси вращения – одинаково. Относительно какой-либо другой оси момент инерции того же цилиндра будет иным. Поэтому, если вы говорите о моменте инерции какого-то тела, обязательно указывайте ось, о которой идет речь.

Момент инерции однородного диска (сплошного цилиндра)

Выберем в качестве оси вращения ось симметрии диска. Разобьем диск на кольцевые слои бесконечно малой толщины dr (рис. 7.5). В соответствии с формулой (7.6) момент инерции такого кольца

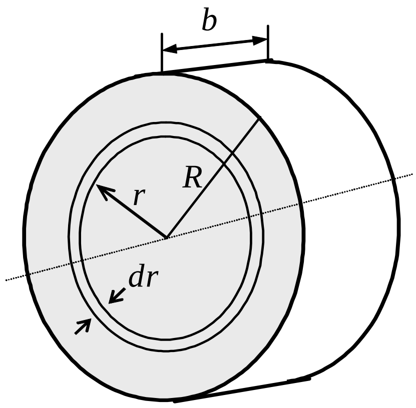


Рис 7.5.

$dI = r^2 dm$, где $dm = \rho\, dV$ – масса кольца. Объем кольцевого слоя равен $dV = 2\pi{\cdot}b{\cdot}r{\cdot}dr$, где b – толщина диска. Чтобы понять, почему объем именно такой, разрежьте мысленно боковую стенку консервной банки вдоль образующей и найдите объем полученного тонкого прямоугольного параллелепипеда. Момент инерции диска найдем, суммируя бесконечно малые моменты инерции кольцевых слоев (т.е. интегрируя):

$$I = \int dI = \rho \cdot 2\pi b \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\rho\pi b R^4,$$

где R – радиус диска. Т.к. масса диска $m = \rho{\cdot}\pi{\cdot}b{\cdot}R^2$, то

$$I = \tfrac{1}{2} m{\cdot}R^2. \tag{7.7}$$

Момент инерции однородного шара

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр, можно найти, разбив шар на тонкие диски (дисков одинакового радиуса будет по два). Предлагаем вам проделать вычисления самостоятельно. Для этого нужно обязательно вспомнить геометрию и правила вычисления интегралов от степенной функции. Те, у кого в результате вычислений получится

$$I = \frac{2}{5} mR^2, \tag{7.8}$$

могут рассчитывать на положительную оценку на экзамене по математике.

Момент инерции тонкого однородного стержня

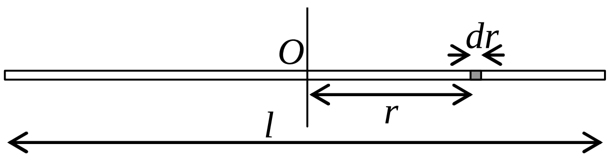


Рис. 7.6.

Пусть ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его средину (рис. 7.6). Выделим на расстоянии r от оси вращения бесконечно малый участок длиной dr. Его масса $dm = \lambda\, dr$, где λ – линейная плотность массы, равная отношению массы стержня к его длине $\lambda = m/l$. В силу малой толщины стержня выделенный элемент можно считать материальной точкой. Ее момент инерции согласно (7.3) равен $dI = r^2dm = r^2\lambda\, dr$. Принимая во внимание, что таких элементов два (с обеих сторон от оси), получим

$$I = 2\int dI = 2\lambda\int_0^{l/2} r^2dr = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12}ml^2. \qquad (7.9)$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляет собой алгебраическую сумму кинетических энергий отдельных его элементов, т.е. $K_{вр} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i \upsilon_i^2$. Это выражение неудобно для расчетов, т.к. элементы движутся с разными скоростями. Поэтому переведем его на «вращательный» язык, т.е. заменим массы и скорости их вращательными аналогами: моментами инерции и угловыми скоростями. Формально это можно сделать, вспомнив связь между линейной и угловой скоростью $\upsilon = r\cdot\omega$ (см. (3.5)). Учтем также, что угловые скорости элементов одинаковы $K_{вр} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i r_i^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i r_i^2$.

Или, как следует из (7.4)

$$K_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (7.10)$$

Если тело движется поступательно со скоростью v и одновременно вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, то его полная кинетическая энергия равна

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (7.11)$$

Работа при вращении

Найдем работу внешней силы при повороте тела на угол $\Delta\varphi$. Пусть к телу приложена сила $\vec{F}$. Величина момента силы относительно оси вращения есть $M = F\cdot r\cdot\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (см. рис. 7.7). При повороте тела на угол $\Delta\varphi$ точка приложения силы переместится на длину дуги ΔS, откуда работа, совершенная силой $\vec{F}$, будет равна $A = F\cdot\Delta S\cdot\cos(\alpha - \pi/2) = F\cdot\Delta S\cdot\sin\alpha$. Но $\Delta S = r\cdot\Delta\varphi$. Поэтому

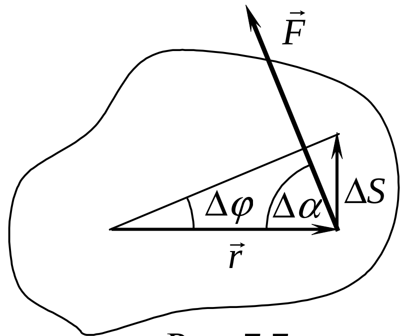


Рис. 7.7.

$A = F{\cdot}\Delta\varphi{\cdot}r{\cdot}\sin\alpha$. Или, так как $F{\cdot}r{\cdot}\sin\alpha = M$,

$\Delta A = M{\cdot}\Delta\varphi$.

Полученное выражение справедливо только в случае, когда момент M постоянен. Для нахождения работы переменного момента сил воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущей лекции для нахождения работы переменной силы. Величина элементарной работы $\delta A = M{\cdot}d\varphi$. Суммирование (интегрирование) всех элементарных работ дает

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \qquad (7.12)$$

Отметим, что формально размерность работы совпадает с размерностью момента силы: и то, и другое – произведение силы на расстояние. Но физики их различают. Размерность работы – Дж, а момента силы – Н·м.

Теорема Штейнера

Моменты инерции некоторых простых тел нам удалось достаточно легко рассчитать, благодаря выбору оси: все полученные выражения (7.6)-(7.9) выведены для случая, когда ось проходит через центр масс тел. Однако в жизни часто приходится встречаться с вращениями тел, ось которых не проходит через центр масс. Например, если повесить на вбитый горизонтально гвоздь тонкий обруч, его вращение вокруг гвоздя не будет характеризоваться моментом инерции, рассчитанным по формуле (7.6), в этом случае ось не проходит через центр масс, а распределение масс относительно оси несимметрично.

Конечно, в подобных случаях можно вычислить интеграл типа (7.5). Это сложно, но вполне решаемо, особенно, если у вас имеются навыки проведения численного интегрирования с помощью компьютера.

Можно поступить иначе. Оказывается, что если для какого-либо тела известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, то легко может быть найден момент инерции относительно любой оси, параллельной данной. Определение этого момента инерции производится по *теореме Штейнера*. Докажем эту теорему.

Если тело вращается вокруг оси, не проходящей через центр масс, то его движение можно представить как сумму поступательного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс. Кинетическая энергия в этом случае может быть найдена по формуле (7.11):

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}.$$

Здесь I_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, а υ – скорость вращения центра масс тела вокруг выбранной оси. Так как оборот вокруг центра масс тело совершает одновременно с оборотом вокруг выбранной оси, эта скорость равна $\upsilon = \omega b$, где b – расстояние от оси вращения до оси, проходящей через центр масс. Тогда

$$K = \frac{m\omega^2 b^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{\left(I_0 + mb^2\right)\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2},$$

откуда

$$I = I_0 + m \cdot b^2. \qquad (7.13)$$

Момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы этого тела на квадрат расстояния между осями

Пример. Вычислить момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей вдоль его образующей, используя прямое интегрирование, довольно сложно. По теореме Штейнера легко получим:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Основной закон динамики вращательного движения

Второй закон Ньютона для вращательного движения в форме (7.1), вообще говоря, справедлив только для тел с постоянным моментом инерции. Учитывая этот факт его можно преобразовать так: $\vec{M} = I\vec{\beta} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$. Величина

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (7.14)$$

называется *моментом импульса* (или моментом количества движения) тела и является вращательным аналогом импульса.

Таким образом

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (7.15)$$

Сумма моментов всех сил, действующих на тело, равна быстроте изменения его момента импульса: – это и есть самая общая форма второго закона Ньютона для вращательного движения или *основного закона вращательного движения*. Нетрудно заметить, что выражение (7.15) является аналогом (4.3).

Можно составить целую таблицу аналогии между поступательными и вращательными величинами. Некоторым студентам такая таблица помогает запомнить формулы вращательных законов: достаточно вспомнить аналогичный «поступательный» закон и заменить в нем все поступательные величины их вращательными аналогами.

Величины и связи между ними		***Вращательные аналоги***	
Координата	x, y, z или $\vec{r}$	Угол поворота	φ
Скорость	υ	Угловая скорость	ω
Ускорение	a	Угловое ускорение	β
Равномерное движение	$x = x_0 + \upsilon t$	Равномерное вращение	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Равноускоренное движение	$x = x_0 + \upsilon_0 t + \dfrac{at^2}{2}$	Равноускоренное вращение	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\beta t^2}{2}$
Масса	m	Момент инерции	I
Импульс	p	Момент импульса	L
Сила	F	Момент силы	M
Работа	$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$	Работа при повороте	$A = M\Delta\varphi$
Кинетическая энергия	$K = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	Вращательная кинетическая энергия	$K_{\text{вр}} = \dfrac{I\omega^2}{2}$

У некоторых студентов вызывает недоумение использование слова *момент* в названиях вращательных величин. Действительно, чаще всего это слово означает маленький промежуток времени: фраза «Момент!» означает «Подождите немного!». Однако у этого слова есть и другой смысл. Например, всем понятна фраза «Поворотный момент истории», – заметьте *поворотный*!

Слово «момент» происходит от латинского «*movimentum*», означавшего «что-то решительно изменяющее ход событий», «поворотный момент» и, в частности «точка приложения рычага». Т.е. в нашем контексте слово «момент» нужно понимать как «поворотный» или «вращательный». Например, момент инерции – «вращательная инертность» (масса – мера инертности); момент силы – «вращательная сила»; момент импульса – «вращательный импульс».

Несмотря на аналогию, вращательные величины не эквивалентны поступательным. Так, например, массу тела невозможно (по крайней мере, в классическом смысле) изменить, не нарушая его целостности, а момент инерции меняется при деформации тела.

Еще один пример. Попробуйте очень быстро раскрутить лежащее на боку вареное куриное яйцо вокруг вертикальной оси. Оно не будет продолжать вращаться на боку, а поднимется вертикально! Подобные странности вращения особенно заметны при наблюдении поведения *гироскопов*.

Гироскопы

Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Эту ось называют осью гироскопа. Гироскоп обычно закрепляется в *кардановом* (или карданном) подвесе (Джероламо Кардано (1501-1576), итальянский математик, философ и врач). Карданов подвес состоит из двух колец внешнего и внутреннего. Внешнее кольцо поворачивается вокруг оси, проходящей через острия, а внутреннее – вокруг оси, перпендикулярной ей. Ось гироскопа опирается на внутреннее кольцо карданова подвеса, что обеспечивает ей возможность свободно поворачиваться во всех направлениях. Если привести гироскоп в быстрое вращение, то при любом повороте подставки ось его вращения сохраняет неизменным свое направление в пространстве.

Если к вращающемуся гироскопу приложить пару сил, стремящуюся повернуть его около оси, перпендикулярной к оси его вращения, то он станет поворачиваться около третей оси, перпендикулярной к первым двум. Пусть, например, гироскоп вращается около оси OO' в направлении, указанном стрелкой, а пара сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, перпендикулярных плоскости рисунка, стремятся повернуть его около оси AA' (рис. 7.8). Гироскоп, однако, повернется вокруг оси BB'. Странное поведение гироскопа

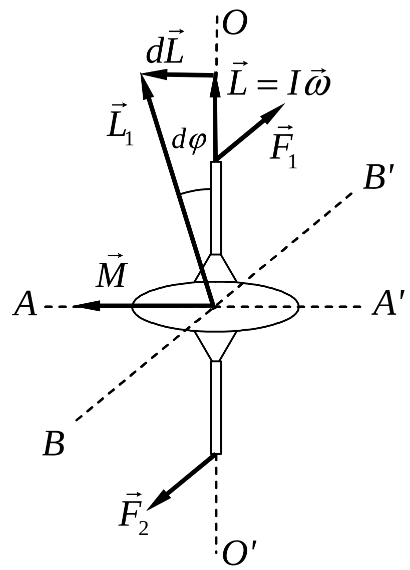


Рис. 7.8.

полностью соответствует законам динамики вращательного движения.

В самом деле, момент сил $\vec{M}$ направлен вдоль прямой AA'. Согласно уравнению (7.15), за время dt момент импульса гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$, которое имеет такое же направление, как и $\vec{M}$. Спустя время dt момент импульса гироскопа будет равен результирующей $\vec{L}_1 = \vec{L} + d\vec{L}$, лежащей в плоскости рисунка. Направление $\vec{L}_1$ совпадает с новым направлением оси гироскопа. Таким образом, ось гироскопа повернется вокруг оси BB' на некоторый угол $d\varphi$. Скорость этого поворота $\Omega = d\varphi \,/\, dt$. Вычислим ее. Из рисунка видно, что $d\varphi = dL/L$, тогда

$$\Omega = \frac{dL}{Ldt} = \frac{Mdt}{Ldt} = \frac{M}{L}. \qquad (7.16)$$

При попытке вызвать поворот гироскопа в заданном направлении возникают так называемые *гироскопические силы*, действующие на подшипники, в которых вращается ось гироскопа. Эти силы проявляются, например, при движении обычного волчка. При наклонном положении вращающегося волчка составляющая силы тяжести стремиться наклонить ось волчка еще больше. Но волчок не падает, а начинает *прецессировать* (лат. *praecessio* – движение впереди), т.е. его ось поворачивается вокруг вертикального направления с угловой скоростью Ω (*скорость прецессии*).

В результате гироскопического эффекта гироскоп стремится расположить ось своего вращения таким образом, чтобы она образовала как можно меньший угол с осью вынужденного вращения.

Гироскопический эффект положен в основу гироскопического компаса. Под влиянием суточного вращения Земли ось гирокомпаса установится в такое положение, при котором угол между этой осью и осью вращения Земли будет минимальным.

Гироскопический эффект находит применение в военной технике. Например, винтовые нарезы в стволе оружия сообщают вылетающему снаряду быстрое вращение вокруг оси, и превращает его в гироскоп с большим собственным моментом импульса.

Гироскопы используются для регулирования движения мин, торпед, управления ракетами, самолетами, ориентации в пространстве спутников и космических станций и т.д.

Лекция 8

- *Законы сохранения как принципы запрета.*
- *Сохранение энергии.*
- *Сохранение импульса.*
- *Сохранение момента импульса.*
- *Симметрия пространства-времени – фундамент законов сохранения.*

Законы сохранения

Введение

Мы переходим к рассмотрению особых законов – законов сохранения. Так же как и принцип относительности, законы сохранения импульса, энергии и ряда других величин выделяются среди всех физических законов своей всеобщностью, т.е. высшей степенью фундаментальности.

Далее мы «выведем» законы сохранения энергии, импульса и момента импульса на основе законов Ньютона. Однако следует иметь в виду, что законы сохранения обладают гораздо большей общностью, чем законы Ньютона. Поэтому приведенные ниже рассуждения, конечно, не следует рассматривать в качестве теоретического обоснования законов сохранения, являющихся (как впрочем, и законы Ньютона) обобщением опытных фактов. Законы сохранения являются точными законами, которые, насколько сегодня известно, выполняются всегда, тогда как законы Ньютона справедливы лишь в рамках классической физики. Можно предположить, что в основе такой универсальности должен лежать какой-то фундаментальный принцип. Эту идею мы обсудим подробней в конце лекции.

Законы сохранения представляют собой мощное орудие исследования. Они, например, не зависят от характера действующих сил. Часто бывает, что точное решение уравнений движения оказывается весьма сложным. В этих случаях с помощью законов сохранения можно и без решений уравнений движения получить ряд важных данных о протекании процесса.

Важным свойством законов сохранения является их роль универсального *принципа запрета*: если какое-либо явление нарушает хотя бы один из законов сохранения, оно физически невозможно. Этот принцип (хотя и не сразу) был признан всеми здравомыслящими людьми. Например, ни одно патентное бюро в настоящее время не примет у вас на рассмотрение никаких проектов вечных двигателей. Хотя, до сих пор находятся люди (видимо плохо изучавшие физику), которые впустую тратят время на разработку конструкций таких устройств.

Отметим, правда, что есть ученые теоретики, очень хорошо знающие физику, которые считают, что все известные на сегодняшний день научные теории и принципы являются лишь одним из приближений к настоящей «Теории», в рамках которой многие сегодняшние «запреты» могут быть сняты. В конце лекции мы еще вернемся к этой теме.

Закон сохранения энергии

Рассмотрим, какую работу совершают все силы, действующие на тела в некоторой механической системе. Прежде всего, запишем отдельно вклад в работу со стороны потенциальных и непотенциальных сил: $A = A_{\text{пот}} + A_{\text{непот}}$.

Согласно выражениям (6.9) и (6.11), работа всех сил может быть выражена через приращение кинетической энергии тел системы, $A = K_2 - K_1$, а работа потенциальных сил – через изменение потенциальной энергии, $A_{\text{п}} = \Pi_1 - \Pi_2$. Тогда: $K_2 - K_1 = \Pi_1 - \Pi_2 + A_{\text{непот}}$ или $\left(K_2 + \Pi_2\right) = \left(K_1 + \Pi_1\right) + A_{\text{непот}}$. Величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, называется *полной механической энергией*:

$$W = K + \Pi. \tag{8.1}$$

В лекции 6 мы отмечали, что непотенциальные силы, которые способны совершать работу, называют неконсервативными. Поэтому работа непотенциальных сил равна работе неконсервативных сил: $A_{\text{непот}} = A_{\text{неконсерват}}$. Поэтому можно записать, что:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{\text{неконсерват}}. \tag{8.2}$$

Приращение полной механической энергии механической системы равно работе неконсервативных сил.

Если в системе действуют <u>только консервативные силы</u>, то ее полная механическая энергия сохраняется

$$\Delta W = 0 \text{ или } W = K + \Pi = \text{const}. \tag{8.3}$$

Выражение (8.3) называют *законом сохранения полной механической энергии*.

Таким образом, консервативные силы, как уже отмечалось в лекции 6, сохраняют («консервируют») механическую энергию. Обычно неконсервативные силы (например, трение) совершают отрицательную работу, при этом полная механическая энергия системы уменьшается. Однако можно заметить, что в результате трения тела нагреваются, т.е. часть энергии переходит в тепловую (немеханическую) форму. Как показывает опыт, уменьшение механической энергии точно компенсируется увеличением тепловой энергии системы. Об этом мы подробней поговорим, изучая термодинамику.

Вечный двигатель

Вечный двигатель, *perpetuum mobile* (перпе́туум мо́биле) – это такой воображаемый механизм, который безостановочно движет сам себя и, кроме того, совершает какую-нибудь полезную работу.

Идея об устройстве вечного двигателя впервые, по-видимому, возникла в Индии в XII веке. Первые проекты в Европе появились в XIII веке и связаны они с именем французского инженера д'Оннекура. Он оставил «книгу рисунков», где приведено описание одного из достоверно известных двигателей. Это было колесо с нечетным числом молотков.

В XVII и XVIII веках многие серьезные ученые верили в то, что вечный двигатель можно создать. Положение о невозможности создания такого закона не подкреплялось никаким общим законом.

Становление закона сохранения энергии происходило с трудом. В XVIII веке Готфрид Лейбниц и Михайло Ломоносов сформировали представление о «сохранении энергии» и переходе ее от одного тела к другому и из механической формы в тепловую. Нужно было найти количественные связи между формами движения. Решить эту задачу удалось только в XIX веке. Это сделал Роберт Майер. После опубликования работ Джеймсом Джоулем в середине XIX века закон сохранения энергии победил окончательно.

Примеры на применение закона сохранения энергии

Пример 1. Шайба массой $m = 0{,}2$ кг пущена по льду со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Какую работу совершит сила трения за время движения шайбы до ее полной остановки?

Казалось бы, нам не известен ни коэффициент трения, ни путь, пройденный шайбой. Тем не менее, решение может быть очень легко найдено на основе выражения (8.2). Полная механическая энергия шайбы вначале движения $W_1 = K_1 + П_1 = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + 0$, а после остановки $W_2 = K_2 + П_2 = 0 + 0$. Тогда, в соответствии с (8.2), $A_{\text{тр}} = W_2 - W_1 = = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ = 10 Дж.

Пример 2. Санки соскальзывают без трения с горки высотой h = 5 м. Какую скорость υ они приобретут у ее подножия?

Если склон горки – не наклонная плоскость (а в условии об этом ничего не сказано), то решение задачи на основе законов динамики – довольно сложная задача. Но если воспользоваться законом сохранения полной механической энергии в форме (8.3) (т.к. трения нет), то решение будет очень простым. $W_1 = 0 + mgh$, $W_2 = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + 0$. Согласно (8.3) $W_1 = W_2$ или $mgh = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$. Откуда $\upsilon = \sqrt{2gh} \approx$ 10 м/с.

Пример 3. Обруч скатывается без трения с горки высотой h . Какую скорость он приобретет?

На первый взгляд задача такая же, как предыдущая. Это действительно так, но с одним замечанием: скатывающийся обруч обладает кроме поступательной еще и вращательной составляющей кинетической энергии. Поэтому $mgh = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$. Так как для обруча $I = mR^2$, а $\omega = \upsilon / R$, получим $mgh = m\upsilon^2$ или $\upsilon = \sqrt{gh}$. Как ни странно, для горки той же высоты поступательная скорость обруча будет в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем у санок!

Закон сохранения импульса

Введем некоторые необходимые в дальнейшем понятия.

1. Совокупность движущихся тел, рассматриваемых как единое целое, называется *механической системой*.
2. *Внутренние силы* – это силы взаимодействия между составными частями системы.
3. *Внешние силы* – это силы, приложенные к составным частям системы со стороны тел, не включенных в систему.
4. Если на систему не действуют внешние силы, то систему называют *замкнутой* (или *изолированной*).

Рассмотрим в качестве примера систему, состоящую из трех тел (рис. 8.1). Запишем основное уравнение динамики для каждого тела.

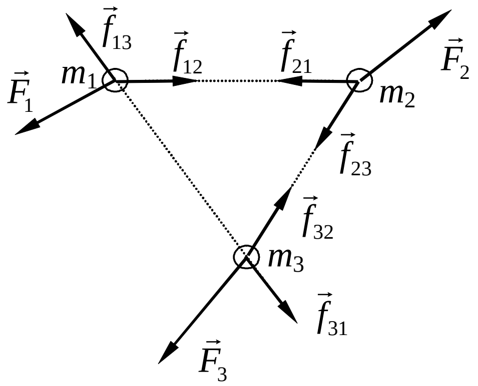


Рис. 8.1.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1,$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2,$$
$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3,$$

где $\vec{f}_{ij}$ – внутренние, а $\vec{F}_i$ – внешние силы. Внутренние силы удовлетворяют третьему закону Ньютона ($\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$), поэтому, если произвести векторное сложение всех внутренних сил, то в результате получится нуль. Складывая уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \tag{8.4}$$

Введем обозначения $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ – импульс системы; $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ – результирующая внешних сил. Таким образом, *быстрота изменения импульса системы равна сумме внешних сил*: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. По форме этот результат совпадает со вторым законом Ньютона, но имеет более широкий смысл.

Если система изолирована, то равнодействующая внешних сил равна нулю. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ или } \vec{p} = \text{const}. \tag{8.5}$$

Итак, *импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени*. Это утверждение носит название *закона сохранения импульса*. Записывая выражение для импульсов тел, входящих в систему в явном виде можно представить закон сохранения импульса в следующей удобной для использования форме:

$$\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const} \tag{8.6}$$

Закон движения центра масс

Понятие «центр масс» уже неоднократно употреблялось нами в предыдущих лекциях. Например, при описании динамики твердого тела под центром масс мы интуитивно понимали точку, относительно которой массы составляющих тело точек расположены каким-то образом симметрично.

По определению *центр масс* (или *центр инерции*) системы материальных точек – это точка, которая при движении тела движется как материальная точка с массой, равной массе всего тела, к которой приложены все силы, действующие на это тело. В поле силы тяжести центр масс твердого тела соответствует точке, относительно которой моменты всех сил тяжести, действующих на тело при любом его положении, уравновешиваются (в этом случае точка называется *центром тяжести*).

Положение центра масс задается следующим радиус-вектором (предлагаем вам самостоятельно записать его проекции в декартовой системе координат):

$$\vec{r}_{ц} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i \,, \tag{8.7}$$

где $m = \sum_i m_i$ - масса тела (системы точек), m_i – массы точек, $\vec{r}_i$ – радиус-векторы, определяющие их положения.

Выясним, как будет двигаться центр масс тела под действием внешних и внутренних сил? Рассмотрим, например поступательное движение системы, состоящей из материальных точек. Если система представляет собой абсолютно твердое тело, то никаких проблем не возникает: траектории движения всех его точек, в том числе и центра масс – идентичны. А вот в случае, когда система представляет собой совокупность движущихся и взаимодействующих между собой тел, ответ не так очевиден.

Перепишем уравнение (8.4), обобщив его на произвольную систему тел и записав импульсы тел в явном виде $\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = \vec{F}$. Учтем, что $\vec{\upsilon}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, тогда $\frac{d}{dt}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{F}$. Будем считать массы входящих в систему тел постоянными. В этом случае суммирование и дифференцирование можно поменять местами $\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{F}$. Чтобы получить в последнем выражении радиус-вектор центра масс, домножим и разделим его на массу системы (которая постоянна)

$m\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i = m\frac{d^2\vec{r}_{\text{ц}}}{dt^2} = \vec{F}$. Но вторая производная от радиус-вектора по времени – это ускорение, поэтому $\vec{a}_{\text{ц}} = \frac{\vec{F}}{m}$, т.е. ускорение центра масс пропорционально сумме внешних сил, действующих на систему. Это и есть *закон движения центра масс*, согласно которому, *скорость центра масс изменяется только под действием внешних сил*. Внутренние силы не способны изменить скорость центра масс. Т.е.

$$\vec{F} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}_{\text{ц}} = \text{const}. \qquad (8.8)$$

В частности, если центр масс в некоторой системе координат покоится, то никакие внутренние силы не смогут заставить изменить его положение. Это обстоятельство позволяет иногда существенно упростить решение задачи, рассматривая ее в системе координат, связанной с центром масс всех взаимодействующих тел (т.е. в *системе центра масс*).

Реактивное движение

Движение ракеты также объясняется законом сохранения импульса. При сгорании топлива из сопла с большой скоростью вырываются газы, в результате чего ракета движется в противоположном направлении так, что сумма импульсов ракеты и газов остается постоянной величиной.

Пусть в некоторый момент времени t_0 масса ракеты (вместе с горючим и окислителем) равна M, а скорость ее относительно некоторой неподвижной системы координат равна v (разумеется, речь идет о проекции скорости на направление движения ракеты). При сгорании некоторого количества топлива ракета к моменту времени $t_1 = t_0 + dt$ ракета будет иметь массу $M - dm$ и скорость относительно этой системы $\upsilon + d\upsilon$. Скорость истечения газов относительно ракеты равна u и направлена в сторону, противоположную движению ракеты. Тогда скорость газов относительно выбранной системы координат в момент t_1 равна разности скорости ракеты и скорости истечения газов: $\upsilon_{\text{газ}} = \upsilon + d\,\upsilon - u$.

Поскольку система «ракета и газы» является замкнутой, то к ней применим закон сохранения импульса:

$$M\cdot\upsilon = (M - dm)\cdot(\upsilon + d\upsilon) + dm\,(\upsilon + d\upsilon - u).$$

Раскрыв скобки и сделав соответствующие преобразования, получим

$M \cdot d\upsilon = u \cdot dm.$ (8.9)

Газы, вырываясь из сопла ракеты, действуют на нее с некоторой силой, которая называется *реактивной тягой*. Чтобы найти ее, разделим обе части равенства на dt. Учитывая, что $M \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = F$ представляет собой *силу тяги*, а $\mu = \frac{dm}{dt}$ – ежесекундный расход топлива, получим $F = -\mu \cdot u$.

Итак, реактивная сила тяги равна произведению расхода топлива и скорости истечения газов. Она направлена в сторону, противоположную направлению истечения газов.

Далее, т.к. $dM = -dm$, из (8.9) получим $M \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = -u \cdot \frac{dM}{dt}$. Разделив переменные и проинтегрировав, найдем, что $\upsilon = -u \cdot \int \frac{dM}{M} =$ $= -u \ln M + C$.

Значение постоянной C определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее масса M_0, то $C = u \cdot \ln M_0$. Следовательно,

$$\upsilon = \mathrm{u} \cdot ln \frac{M_0}{M}. \quad (8.10)$$

Это выражение называется *формулой Циолковского*.

Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему состоящую (для простоты) всего из двух взаимодействующих тел (рис 8.2). Как и в предыдущем случае, вывод можно обобщить на произвольную систему. Запишем уравнения основного закона динамики вращательного движения для этих тел (см. (7.15) и (7.2)):

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1,$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$

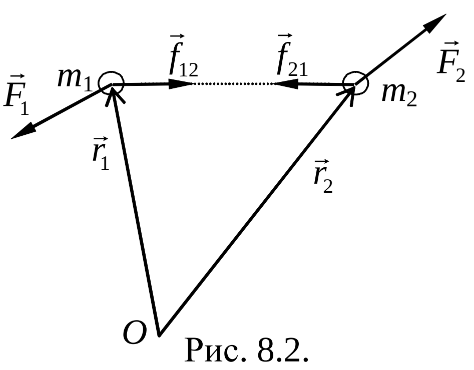


Рис. 8.2.

Как и в предыдущем случае сложим эти уравнения:

$$\frac{d\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)}{dt}=\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{f}_{12}+\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2.$$

Здесь учтено, что по третьему закону Ньютона $\vec{f}_{21}=-\vec{f}_{12}$. Заметим, что, по правилам сложения векторов, вектор $\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ направлен от второго тела к первому и поэтому параллелен вектору $\vec{f}_{12}$. Но векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю. Значит

$$\frac{d\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)}{dt}=\vec{M}_1+\vec{M}_2 \qquad (8.11)$$

Итак, *быстрота изменения суммарного момента импульса тел системы равна сумме моментов внешних сил*. Внутренние силы не могут изменить суммарного момента импульса системы.

Если система замкнута, то $\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2=0$, тогда

$$\frac{d\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)}{dt}=0 \text{ или } \vec{L}=\vec{L}_1+\vec{L}_2=\text{const}. \qquad (8.12)$$

Это утверждение называется *законом сохранения момента импульса* системы.

Перепишем (8.12) с учетом определения момента импульса (7.14), обобщая на произвольную замкнутую систему, получим

$$\sum_i I_i\vec{\omega}_i=\text{const}. \qquad (8.13)$$

Закон сохранения момента импульса, записанный в такой форме иногда более удобен для решения задач.

Рассмотрим одну из них. Человек стоит на способной вращаться вокруг вертикальной оси почти без трения платформе (*скамья Жуковского*), расставив руки в стороны. При этом скамья вместе с человеком вращается с некоторой угловой скоростью ω_1. Затем человек прижимает руки к телу. Что при этом произойдет со скоростью вращения системы?

Согласно закону сохранения момента импульса $(I_{ск}+I_{чел1})\omega_1=(I_{ск}+I_{чел2})\omega_2$ или $I_1\omega_1=I_2\omega_2$. Но суммарный момент инерции скамьи и человека с расставленными в стороны руками больше, чем суммарный момент инерции скамьи и человека с прижатыми руками $I_1>I_2$. Следовательно, $\omega_2=\dfrac{I_1}{I_2}\omega_1>\omega_1$. Т.е. угловая скорость увеличится! Кстати, именно так и поступает фигуристка или балерина, закручиваясь в волчке.

Важно отметить, что изменение угловой скорости произошло под действием внутренних сил системы, за счет изменения ее момента инерции. Этот пример очень ярко демонстрирует отличие между поступательным и вращательным движением.

Столкновения тел

Столкновением (или *ударом*) двух тел называется их кратковременное взаимодействие при сближении, приводящее к изменению скоростей тел.

К ударам относятся, например, столкновения бильярдных шаров, отскок мяча от пола и от стенки, столкновение атомов, ядер и элементарных частиц и многие другие аналогичные явления. Типичной задачей при рассмотрении таких явлений является определение скоростей тел после удара по известным их скоростям до удара.

Прежде всего, отметим, что детальный анализ взаимодействий, возникающих при столкновениях, достаточно сложен, а иногда и невозможен, например, детали взаимодействия элементарных частиц до настоящего времени вообще неизвестны. Поэтому при решении таких задач часто используется ряд упрощенных моделей.

Абсолютно неупругим называется удар, после которого тела двигаются как одно целое (слипаются). Примером может служить удар пластилинового шарика о другой такой же шарик. При ударе шары деформируются, кинетическая энергия частично или полностью превращается во внутреннюю энергию. Поэтому закон сохранения механической энергии не выполняется.

Абсолютно упругим называется удар, в результате которого механическая энергия системы соударяющихся тел сохраняется (т.е. равна энергии системы до удара). Примером почти абсолютно упругого удара является удар бильярдных шаров.

Центральным называется такой удар, при котором вектор скорости относительного движения соударяющихся тел проходит через центры их масс.

Если удар *нецентральный* или тела до удара вращаются, то в результате удара они могут изменить также свое вращательное состояние. Поэтому необходимо использовать закон сохранения момента импульса и учитывать тот факт, что часть кинетической энергии переходит во вращательную форму.

Абсолютно неупругий удар

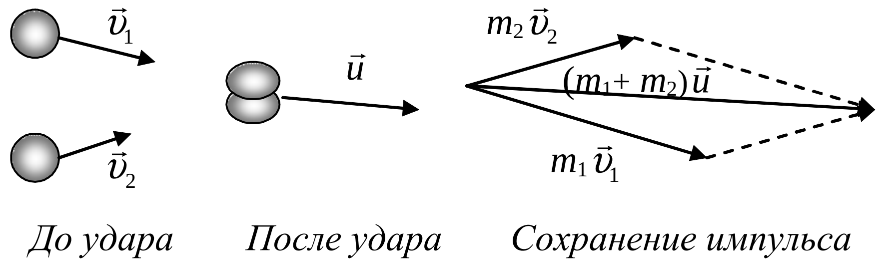


Рис. 8.3.

Рассмотрим неупругий удар двух шаров массами m_1 и m_2. Пусть скорости шаров до удара равны $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. Суммарный импульс шаров после удара должен равняться импульсу до удара (рис. 8.3):

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

где $\vec{u}$ – скорость шаров после удара (не забывайте, что импульс – векторная величина). Отсюда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

При абсолютно неупругом ударе произойдет потеря механической энергии, которая переходит в тепло. Она равна разности механической энергии до и после удара:

$$\Delta W = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u_2^2}{2}.$$

Подставляя в это выражение скорость шаров после удара, находим:

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2\left(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right)^2}{2\left(m_1 + m_2\right)}.$$

Абсолютно упругий центральный удар

Обозначим массы шаров через m_1 и m_2, скорости их до удара через υ_1 и υ_2, а после удара – через u_1 и u_2 (рис. 8.4). Так как удар центральный, движение одномерное, а законы сохранения энергии и импульса (в проекции на ось x) будут иметь вид:

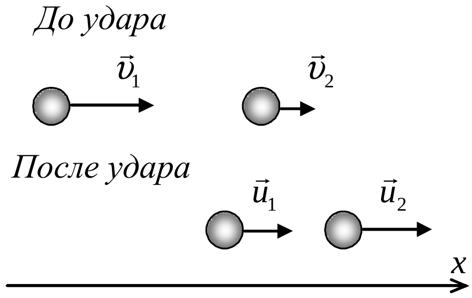


Рис. 8.4.

$$m_1\cdot \upsilon_1 + m_2\cdot \upsilon_2 = m_1\cdot u_1 + m_2\cdot u_2\,,$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_1u_2^2}{2}\,.$$

Перенеся члены, относящиеся к m_1, влево, а к m_2 – вправо и сокращая на 2, получим систему уравнений:

$$m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2),$$

$$m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2). \qquad (8.14)$$

Разделив почленно первое уравнение на второе, получаем:

$$\upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2\,. \qquad (8.15)$$

Мы освобождаемся, таким образом, от квадратов в уравнениях. Решая совместно (8.14) и (8.15), находим:

$$u_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2}, \qquad (8.16а)$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (8.16б)$$

Рассмотрим подробнее несколько частных случаев упругого центрального столкновения.

1. Пусть $m_1 = m_2$ и $\upsilon_2 = 0$, т.е. упругий шар налетает на точно такой же покоящийся шар. Из (8.16а) $u_1 = 0$, а из (8.16б) $u_2 = \upsilon_1$, Следовательно, налетающий шар останавливается, полностью передав свой импульс (и кинетическую энергию) второму шару.

2. Пусть $m_1 \ll m_2$ и $\upsilon_2 = 0$, т.е. упругий шар налетает на неподвижную стенку. Из (8.16а) $u_1 = -\upsilon_1$, Следовательно, налетающий шар отскакивает с той же скоростью в противоположном направлении.

3. Пусть $m_1 \ll m_2$ и $\upsilon_2 = -\upsilon$, т.е. упругий шар налетает на движущуюся навстречу со скоростью υ стенку. Из (8.16а) $u_1 = -(2\upsilon + \upsilon_1)$, Следовательно, налетающий шар отскакивает со скоростью, превышающей его первоначальную скорость на две скорости стенки. Как видите, в этом случае скорость шарика и его энергия возрастают. Такой способ увеличения скорости используют для разгона межпланетных станций: подлетая к достаточно крупному небесному телу (планете, астероиду) по параболической траектории навстречу его движению, станция делает «пол-оборота» и улетает по другой ветви параболы почти в противоположном направлении с увеличенной скоростью.

Законы сохранения и симметрия пространства-времени

Сначала законы сохранения были установлены опытным путем, как обобщение большого количества экспериментальных фактов. Значительно позже пришло понимание природы этих законов, как отражения одного из самых фундаментальных принципов природы – *принципа симметрии* (от греч. *symmetria* – соразмерность). *Симметрия* в физике понимается как инвариантность (от лат. *invarians*, родительный падеж *invariantis* – неизменяющийся) свойств материальных объектов (или физических законов) относительно их преобразований. Свойства симметрии относятся к числу самых основных, коренных свойств физических систем.

Наиболее просто понять, что такое симметрия, можно на основе ее геометрического определения. Например, поворот однородного шара вокруг любой оси, проходящей через его центр, на любой угол «переводит» шар сам в себя. Говорят, что шар симметричен относительно таких поворотов.

Заметить симметрию физических законов сложнее, но, по сути, ее смысл остается тем же. Например, как было показано в лекциях 3 и 4, переход от одной инерциальной системы к другой не меняет вида основного закона динамики. Так как такой переход в рамках ньютоновской физики осуществляется с помощью преобразований Галилея, говорят, что законы Ньютона симметричны (или инвариантны) относительно преобразований Галилея.

Своим происхождением законы сохранения обязаны именно свойствам симметрии законов природы. Эта идея была впервые сформулирована в 1918 году Эмми Нётер (1882-1935), немецким математиком. Она доказала фундаментальную теорему, носящую теперь её имя. Согласно этой теореме, основные законы сохранения следуют из свойств симметрии пространства и времени.

<u>Закон сохранения энергии</u> является следствием *инвариантности* (неизменности) физических законов относительно сдвига во времени (что выражает физическое свойство равноправия всех моментов времени – *однородность времени*).

<u>Закон сохранения импульса</u> (или количества движения) отражает *однородность пространства* (свойство равноправия всех точек пространства), т.е. инвариантность относительно пространственных сдвигов.

Из инвариантности физических законов относительно поворотов в пространстве (свойство равноправия всех направлений в пространстве или *изотропность пространства*) следует закон сохранения момента импульса.

Теорема Нётер дает наиболее простой и универсальный метод получения законов сохранения в классической и квантовой механике. Особенно широкое применение теорема имеет Нётер в квантовой теории поля, где законы сохранения, вытекающие из существования определенной группы симметрии, являются часто основным источником информации о свойствах изучаемых объектов. Большая часть теории элементарных частиц построена именно на анализе свойств их симметрии.

Могут ли нарушаться законы сохранения? Некоторые из них не являются абсолютно строгими. Существуют приближенные законы сохранения, которые справедливы лишь для определенного круга процессов. Например, сохранение четности нарушается слабыми взаимодействиями. Под сохранением четности понимается невозможность экспериментально выделить преимущество, например, «правого» над «левым». Некоторое время считалось, что это так. Но исследование некоторых типов распадов элементарных частиц дало физический способ различать «правое» и «левое».

А как же «строгие» законы сохранения, всегда ли они справедливы? Очевидно, что в соответствии с теоремой Нётер они должны действовать до тех пор, пока сохраняется порождающая их симметрия пространства-времени.

Если однородность пространства-времени при каких-то условиях может нарушаться (как следует из некоторых современных физических гипотез), то, в принципе, возможны и нарушения порождаемых симметрией законов. Тем не менее, на сегодняшний день не было найдено ни одного их нарушения, ни в микромире, ни в космических масштабах.

Лекция 9

- *Повторение – суть колебаний.*
- *«Музыкальные» колебания.*
- *Маятники.*
- *Резонанс – значит: отклик.*
- *Автоколебания.*

Колебания

Введение

Колебания представляют один из наиболее распространенных видов движений в природе. Наиболее общими признаками колебательного движения является их повторяемость и движение в ограниченном пространстве. Можно дать такое определение колебаниям:

Колебания – это процесс (движение), при котором состояние системы точно или приблизительно повторяется во времени.

Колебания, как правило, осуществляются возле некоторого среднего значения, соответствующего устойчивому равновесию системы. Можно привести множество примеров колебательных процессов: вибрации машин, колебания струн и мембран, тепловое движение атомов в узлах кристаллической решетки, смещение электронов в антенне приемника или передатчика и т.д.

Некоторые колебательные движения могут привести к нежелательным или катастрофическим последствиям, например неконтролируемая вибрация крыльев самолета. С другой стороны, колебательные процессы лежат в основе работы различных полезных устройств от вибромассажеров до уплотнителей бетонной смеси. Особенная роль колебаниям отводится в радиотехнике.

Гармонические колебания

Если состояние системы повторяется через определенные промежутки времени T, то колебание называется *периодическим*, а время T – *периодом колебаний*. Число повторений состояния системы (число колебаний) в единицу времени ν называется *частотой колебаний*. Очевидно, что $\nu = 1/T$. Единицей частоты служит 1 *герц* (Гц = 1/с) – частота колебаний, при которых за одну секунду совершается одно колебание.

Особую роль среди периодических колебаний занимают *гармонические* (от греч. *harmonia* – созвучие, согласие) или музыкальные колебания. Чистый музыкального тон называется *гармоникой*. Оказывается, что любой сложный звук, будь то красиво звучащий аккорд или шипение испуганного кота, может быть представлен как набор различных гармоник. Точно также любой сколь угодно сложный колебательный процесс можно представить как результат наложения некоторого числа гармонических колебаний разных частот, также называемых гармониками. Математически эта возможность выражается разложением произвольной периодической функции в *ряд Фурье*.

С точки зрения математики гармонические колебания представляют собой периодический процесс, в котором изменение величины происходит по закону синуса или косинуса.

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{9.1}$$

где x – *элонгация* (от позднелат. *elongatio* – удаление) или величина удаления от положения равновесия;

A – *амплитуда* (от лат. *amplitudo* – величина) максимальное удаление от положения равновесия;

$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ – *фаза* (от греч. *phasis* – появление) гармонического колебания, т.е величина, определяющая состояние колебательного процесса в определенный момент времени;

φ_0 – *начальная фаза* гармонического колебания;

ω_0 – *циклическая* (или круговая) *частота*.

Так как период синуса или косинуса равен 2π, а период гармонических колебаний T, одному колебанию соответствует изменение фазы на 2π, за время T, т.е.

$$\varphi(t+T) - \varphi(t) = \omega_0(t+T) + \varphi_0 - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi .$$

Откуда

$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu. \tag{9.2}$$

Не стоит забывать, что выражение (9.1) представляет собой не чистый синус, а сумму синуса и косинуса с разными амплитудами:

$$A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$,

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{A_2}{A_1}.$$

Уравнение гармонических колебаний

Найдем вид уравнения движения, решением которого является закон гармонических колебаний (т.е. функция вида (9.1)). Для этого вычислим первую и вторую производные от (9.1) по времени:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Сравнивая вторую производную с исходным выражением (9.1) получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2 x \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (9.3)$$

Уравнение (9.3) является *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*, выражающим общее свойство синусоидальной функции.

Грузик на пружинке

Рассмотрим движение тела массой m под действием силы упругости со стороны невесомой пружинки жесткостью k. Чтобы не принимать во внимание действие силы тяжести «наденем» грузик на горизонтальную ось, по которой он может скользить без трения, и расположим систему горизонтально (рис. 9.1). В этом случае сила тяжести компенсируется нормальной реакцией оси, и движение вдоль оси осуществляется только под действием силы упругости $F = -kx$. По второму закону Ньютона

$$-\,kx = m\,a\cdot.$$

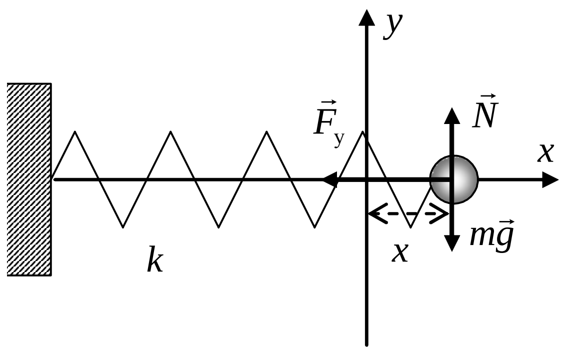


Рис. 9.1.

Но величина проекции ускорения грузика на ось x равна второй производной от координаты, поэтому $-kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Перенесем оба слагаемых в одну сторону и разделим на массу. Тогда получим выражение, совпадающее по форме с (9.3): $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (9.4)$$

Таким образом, под действием силы упругости тело совершает гармонические колебания, с частотой, определяемой выражением (9.4). В принципе, из проведенного анализа можно сделать следующий вывод: если система имеет *положение устойчивого равновесия*, при выведении из которого возникает *возвращающая сила, пропорциональная смещению* (или *потенциальная энергия пропорциональна квадрату смещения*), то законом движения такой системы будут гармонические колебания.

Вообще, если вторая производная какой-либо функции по времени пропорциональна этой функции, взятой с обратным знаком, то эта функция изменяется по гармоническому закону, причем коэффициент пропорциональности равен квадрату круговой частоты гармонического колебания.

Если возвращающая сила не является по своей природе упругой, но пропорциональна смещению, то она называется *квазиупругой силой* (от лат. *quasi* – как бы).

Между прочим, знаете ли вы, что такое квазар? Оказывается, в этом слове тоже есть «квази»: английское слово *quasar* представляет собой сокращение от латинского *quasi-stellar* или от английского же *quasi-star*. В любом случае это означает – звездообразный.

Энергия гармонических колебаний

Найдем кинетическую, потенциальную и полную механическую энергии грузика на пружинке. Скорость грузика определяется первой производной от его координаты $\upsilon = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, следовательно:

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Потенциальная энергия определяется только энергией деформации пружины:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ т.к. } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Наконец:

$$W = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (9.5)$$

Как и следовало ожидать, полная механическая энергия системы при отсутствии трения остается одинаковой в любой момент времени, хотя кинетическая и потенциальная энергии постоянно изменяются от нуля до максимального значения с частотой, вдвое превышающей собственную частоту системы (не забывайте, что $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ и $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$). Важно также отметить, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты колебаний.

Маятники

Маятниками в физике называют системы способные совершать колебания. Например, рассмотренный выше «грузик на пружинке» представляет собой пружинный маятник.

Маятники не обязательно совершают гармонические колебания, но повторяемость процесса обязательна. В лабораторном курсе вы обязательно встретитесь с примерами таких маятников: маятником Обербека и маятником Максвелла.

Чаще всего под маятником понимают подвешенное тело, способное колебаться под действием силы тяжести. В механике рассматривают две модели таких систем: математический и физический маятники.

Физический маятник

Рассмотрим сначала колебания *физического маятника*, которым может служить любое твердое тело (рис. 9.2), способное свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

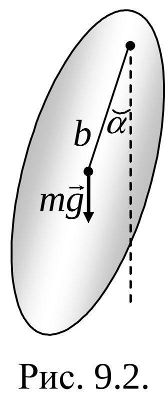


Рис. 9.2.

Момент внешних сил относительно этой оси равен

$$M = -mgb\sin\alpha,$$

где m – масса физического маятника, b – расстояние от оси вращения до центра масс. Знак минус означает, что момент M препятствует повороту на угол α.

Известно, что, если угол измерять в естественных единицах, т.е. в радианах (но не в градусах!), то при малых углах поворота $\sin\alpha \approx \alpha$ (если вы еще не знакомы с рядами Тейлора, просто проверьте это с помощью калькулятора). Согласно второму закону Ньютона для вращательного движения $M = I\cdot\beta$, где I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса. Угловое ускорение по определению – это вторая производная от угла поворота по времени $\beta = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$. Поэтому

$$I\,\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\,mgb\cdot\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{mgb}{I}.$$

Видно, что при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания по закону

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где α_0 угол максимального отклонения от положения равновесия (амплитуда). Частота колебаний зависит от ускорения свободного падения и распределения массы маятника относительно оси вращения. Период колебаний физического маятника в соответствии с (9.2) определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}. \qquad (9.6)$$

Математический маятник

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (материальная точка).

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити (рис. 9.3).

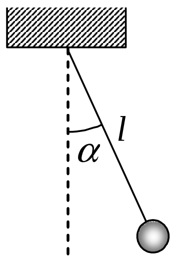


Рис. 9.3.

Такой маятник является предельным случаем физического, у которого $b = l$, а момент инерции $I = ml^2$. Подставив эти величины в (9.6), получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (9.7)$$

Из сопоставления формул (9.6) и (9.7) видно, что математический маятник длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{mb}$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Эту величину называют *приведенной длиной* физического маятника.

Затухающие колебания

Если помимо квазиупругой силы на колеблющуюся точку действует сила сопротивления (трения), то она приводит к уменьшению механической энергии системы. Амплитуда колебаний такой системы должна уменьшаться со временем. Реальные колебания, если их специально не поддерживать, затухают со временем. Следовательно, они являются *затухающими*.

Снова рассмотрим грузик, колеблющийся на пружинке. Пусть на тело действует упругая сила $F_{упр} = -kx$ и сила трения $F_{тр}$, которую будем считать (как при вязком трении) пропорциональной скорости: $F_{тр} = -\mu\upsilon$ (знак минус указывает на то, что сила трения направлена противоположно скорости). Тогда уравнение движения груза (второй закон Ньютона) запишется так:

$$-kx - \mu\upsilon = ma,$$

или, учитывая, что скорость $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$, а ускорение $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ и перенося слагаемые в одну сторону, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Вводя обозначения $\dfrac{\mu}{m} = 2\beta$ – величина, характеризующая затухание колебаний, и $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$ – *собственная циклическая частота* системы (частота без учета трения), можно записать:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (9.8)$$

Это достаточно простое однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Пройдя курс высшей математики, вы будете решать такие уравнения «с завязанными глазами». Пока же отметим, что его решение зависит от знака величины $\beta^2 - \omega_0^2$. Если затухание невелико и эта величина от-

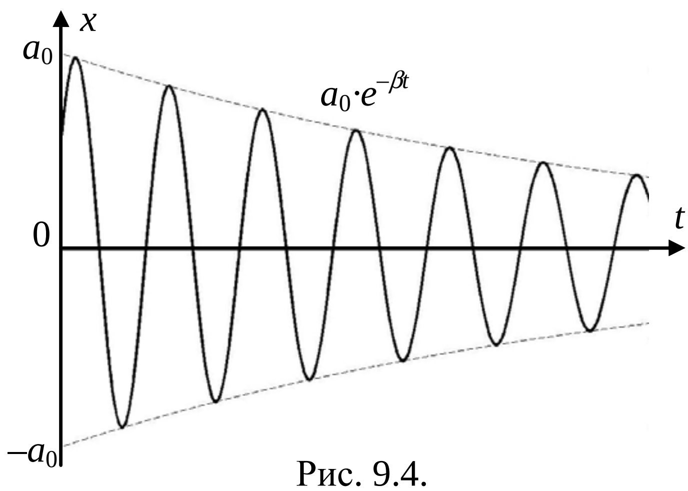


Рис. 9.4.

рицательна, то решение имеет вид

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \qquad (9.9)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – *частота затухающих колебаний*.

Такое движение тела можно условно рассматривать как гармоническое колебание частоты ω с амплитудой $a(t)$, меняющейся по закону (рис. 9.4)

$$a(t) = a_0 e^{-\beta t}.$$

Степень затухания колебаний определяется величиной $\beta = \frac{\mu}{2m}$, которую называют *коэффициентом затухания*.

Найдем время τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз. Т.к. $a_0 e^{-\beta\tau} = a_0 e^{-1}$, получим $\beta\tau = 1$. Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени τ, за которое амплитуда уменьшается в e раз, т.е. $\beta = 1/\tau$. Найдем число колебаний N_e, которое система совершит за время τ:

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}.$$

Для характеристики колебательной системы употребляется величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \qquad (9.10)$$

называемая *добротностью* колебательной системы. Как видно, добротность пропорциональна числу колебаний за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.

Последовательные максимальные отклонения тела от положения равновесия будут наступать через равные промежутки времени $T = 2\pi/\omega$. Если первый из них равен $x_0 = a(t_0)$, то второй будет $x_0 e^{-\beta T}$, третий – $x_0 e^{-2\beta T}$ и т.д. Отношение предыдущего размаха к последующему является *декрементом затухания*: $\delta = e^{\beta T}$, а его логарифм – *логарифмическим декрементом* затухания:

$$\lambda = \ln \delta = \beta T.$$

Еще раз вернемся к уравнению затухающих колебаний (9.8). При $\beta = \omega_0$ частота колебаний делается равной нулю, а при $\beta > \omega_0$ она становится мнимой величиной (*мнимыми числами* называют корни из отрицательных чисел), и движение, как говорят, становится *апериодическим*. Так, например, шарик на пружине или физический маятник, погруженные в достаточно вязкую жидкость, возвращаясь к положению равновесия, будут приближаться к нему с неограниченно убывающей скоростью без колебаний. Это явление используется, например, для успокоения или *демпфирования* (от нем. *dampfen* – уменьшать, заглушать) стрелок электроизмерительных приборов.

Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы (так называемой *вынуждающей силы*).

Пусть вынуждающая сила изменяется со временем по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos\omega_{\text{в}} t.$$

Составим уравнение движения с учетом вынуждающей силы:

$$-kx - \mu\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega_{\text{в}} t = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Преобразуем это выражение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega_{\text{в}} t$$

где $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$, $\beta = \dfrac{\mu}{2m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения (9.8), которое описывает затухающие колебания, мы уже знаем. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$x_{\text{неодн}} = a\cos(\omega_{\text{в}} t + \varphi)$, где

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{в}}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{в}}^2}}. \qquad (9.11)$$

Свободные колебания довольно быстро затухают, и амплитуда определяется выражением (9.11). Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы, и при некоторой частоте она достигает максимального значения. Это явление называется *резонансом* (от лат. *resono* – откликаюсь), а соответствующая частота – *резонансной частотой*. Смысл названия заключается в том, что

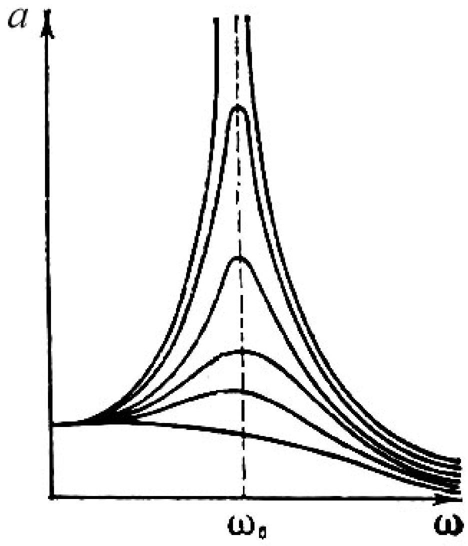


Рис. 9.5.

система «откликается» на те воздействия, которые осуществляются с частотой, близкой собственной частоте системы. Если, например, стоя около рояля, певец «возьмет» чистую ноту, то рояль «откликнется» колебаниями струны, соответствующей этой ноте.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{рез}$, нужно найти максимум функции (9.10). Продифференцировав выражение для амплитуды по частоте и приравняв к нулю, мы получим условие, определяющее $\omega_{рез}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_в^2)\,\omega_в + 8\beta^2\omega_в = 0.$$

Это уравнение имеет три корня:

$\omega_в = 0$ и $\omega_в = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Подставив последнее значение в формулу (9.10), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$a_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (9.12)$$

На рис. 9.5 показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях затухания. При отсутствии сопротивления среды ($\beta = 0$) амплитуда при резонансе увеличивалась бы неограниченно. В связи с этим существует мнение, что, подобрав резонансную частоту, можно «голыми руками» раскачать или даже разрушить любые объекты: деревья, машины, здания, мосты. Покажем, что это обычный «околонаучный» миф.

Согласно (9.12), при малом затухании амплитуда при резонансе приближенно равна

$$a_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}.$$

Разделим это выражение на смещение x_0 из положения равновесия под действием постоянной силы F_0, равное $\frac{f_0}{\omega_0^2}$ (т.е. эта величина показывает, насколько бы деформировалась система, приложи мы к ней такую постоянную силу). В результате получим:

$$\frac{a_{рез}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.$$

Таким образом, отношение амплитуды колебаний в момент резонанса к смещению колеблющегося тела из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы, равно добротности системы.

Добротность систем вроде здания вряд ли слишком высока. Скажем, она не превышает десяти. Поэтому если вам удастся, надавив на стену здания, отклонить его хотя бы сантиметров на пятьдесять, то, возможно, вам и удастся разрушить его руками, подобрав резонансную частоту.

Тем не менее, с явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различного рода сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств не должна быть равна частоте вынуждающей силы. Например, собственная частота крыльев самолета не должна быть равна частоте вращения винта. В противном случае вибрации могут его разрушить. Могут возникнуть опасные резонансные вибрации зданий, кораблей, турбин и других устройств.

Но если в одних случаях резонанс выступает как технически вредное явление, то в других он может быть целесообразно использован, например, в акустике, радиотехнике, измерительной технике.

Автоколебания

При затухающих колебаниях энергия системы постоянно расходуется. Если восполнять эту энергию, то колебания можно сделать незатухающими. Пополнять энергию можно за счет толчков извне в такт с собственными колебаниями. Однако можно сделать так, чтобы сама колеблющаяся система управляла внешними воздействиями. Такая система называется *автоколебательной*. Важной чертой автоколебаний является то, что система сама (автоматически) определяет нужный момент и фазу внешнего воздействия так, чтобы согласовать его с собственным движением.

Например, в механических часах роль регулирующего механизма выполняет *анкерный механизм* (нем. *Anker* – якорь). На концах анкера, напоминающего по форме якорь, имеются изогнутые выступы специальной формы. Зубчатое ходовое колесо приводится в действие гирей или пружиной (рис.9.6). Однако большую часть времени

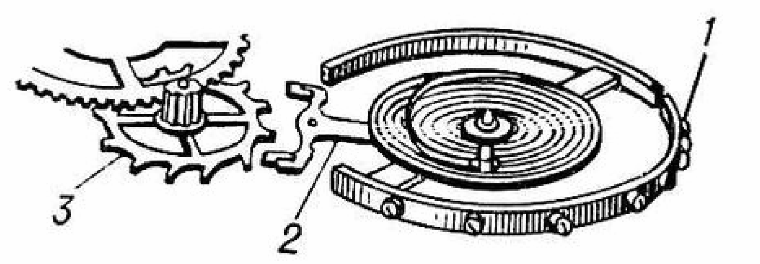


Рис. 9.6.

колесо упирается одним из зубьев в боковую поверхность одного из выступов. Только в моменты, когда маятник находится вблизи среднего положения, выступы перестают преграждать путь зубьям и ходовое колесо поворачивается, толкая анкер зубом, скользящим своей вершиной по скошенному торцу выступа. Этими толчками и пополняется убыль энергии маятника.

Другим примером автоколебательной системы может служить генератор электромагнитных колебаний, где в роли маятника выступает колебательный контур, образованный конденсатором и катушкой индуктивности.

Параметрическое возбуждение колебаний

Возбуждение колебаний, в системе в результате периодических изменения величины какого-либо из ее «колебательных параметров» (т. е. параметров, от величины которых существенно зависит, например, частота колебаний) называют *параметрическим возбуждением*.

Наиболее наглядным примером параметрического возбуждения является раскачивание качелей. В этом случае человек, стоящий на качелях, «приседает» всякий раз, когда качели достигают крайних верхних положений, и выпрямляется, когда качели проходят положение равновесия, изменяя периодически эффективную длину качелей. В результате за каждый период колебаний человек совершает положительную работу, и если эта работа превосходит потери энергии колебаний в системе за период, то энергия колебаний качелей, а значит, и амплитуда этих колебаний будут возрастать.

Параметрическое возбуждение колебаний может происходить в любой колебательной системе. Например, в колебательном контуре, образованном конденсатором и катушкой самоиндукции, возбуждение и усиление колебаний может быть достигнуто периодическим изменением ёмкости конденсатора или индуктивности катушки (*параметрический усилитель*).

Лекция 10

- *Колебания в пространстве и времени.*
- *Уравнение бегущей волны.*
- *Звук.*
- *Энергия волны.*

Механические волны

Введение

Вряд ли найдется человек, который не знает, что такое *волны*. Как правило, это слово ассоциируется с возмущенной поверхностью воды. Вал за валом волны накатывают на берег, вспениваются, рассыпаются брызгами: впечатляющее зрелище. Говорят, что именно ритмично ударяющиеся о берег волны помогли Гомеру (был такой древнегреческий поэт) изобрести гекзаметр (стихотворный размер), которым написаны две величайшие древнегреческие поэмы: «Илиада» и «Одиссея».

Мы с вами попытаемся отвлечься от эстетической стороны волнового процесса и сконцентрируемся на его природе. Прежде всего, бросается в глаза тот факт, что волны связаны с колебаниями. Практически каждый из вас замечал, что поплавок на волнующейся водной поверхности совершает движение «вверх-вниз», т.е. колеблется (на самом деле движение несколько сложнее, но мы для простоты не будем этого замечать). Это означает, что в данной точке на поверхности воды волна представляет собой колебание уровня, и при этом масса воды никуда не перемещается. Но всем ведь видно, что волна «бежит» по поверхности воды. Если мы сделаем ряд последовательных фотографий волны, то заметим, что каждая из них представляет собой ту же самую волну, но горбы и впадины слегка смещены. Горбы и впадины представляют собой определенные фазы колебаний уровня. Значит, пере-

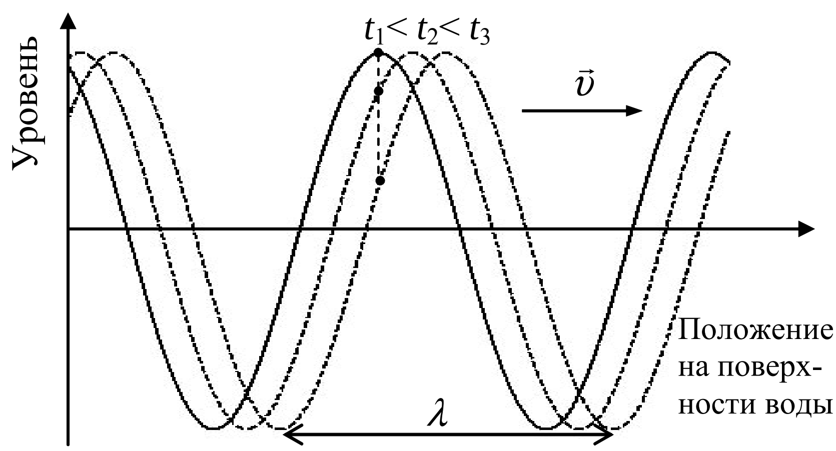


Рис. 10.1.

мещается именно фаза колебаний: точка поверхности, соответствующая горбу волны, в следующий момент времени начинает опускаться, а соседняя точка достигает максимума (рис. 10.1). Создается иллюзия движения горба. Скорость, с которой перемещается фаза волны называется *фазовой скоростью*. Кроме нее различают *групповую скорость* волн – скорость переноса энергии.

Итак, волновой процесс – это *процесс распространения колебаний в пространстве*.

Расстояние между точками волны, колеблющимися в одинаковой фазе (например, между соседними горбами или впадинами), называется *длиной волны*. Очевидно, что эта величина равна расстоянию, которое волна проходит за период колебаний

$$\lambda = \upsilon \cdot T \quad \text{или} \quad \upsilon = \lambda \nu, \tag{10.1}$$

т.к. $T = \dfrac{1}{\nu}$ (ν – частота колебаний). Длина волны в некотором смысле является пространственным аналогом периода: λ – расстояние между точками с одинаковой фазой; T – промежуток времени между повторениями фазы.

Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, еще не начавших колебаться, носит название *фронта волны*. В однородной среде направление распространения *перпендикулярно* к фронту волны.

Волны могут различаться по тому, как колебания ориентированы относительно направления их распространения. Если колебания осуществляются вдоль направления распространения волны, то волны называются *продольными*. Если смещения колеблющихся точек осуществляются в направлении, перпендикулярном распространению волны, волны называются *поперечными*.

Упругие волны

Если резко ударить молотком по концу длинного стержня, возникнет деформация. Но дальнейший процесс – это не просто восстановление формы стержня. Дело в том, что в результате этой небольшой деформации возникает локальное (местное) механическое напряжение, под действием которого начинает деформироваться более удаленная от конца область стержня. Таким образом, порождается процесс распространения упругой деформации (и напряжения) вдоль стержня, говорят, что по стержню распространяется *упругая волна*. Описанная волна называется *ударной* или одиночной волной.

Далее мы рассмотрим волны, возникающие вследствие колебательных процессов и, в частности, гармонические волны. Интерес к гармоническим волнам обусловлен тем фактом, что любая сложная волна может быть представлена в виде комбинации конечного или бесконечного числа гармонических волн при помощи разложения в ряд или интеграл Фурье (*Фурье-анализ*). Такие волны возникают, если возмущение упругой среды носит синусоидальный характер. Пусть источник волны в точке $x = 0$ возбуждает гармоническое деформационное колебание с амплитудой A (максимальное смещение колеблющихся точек от положения равновесия)

$$\xi(0, t) = A\cos\omega t.$$

Смещение точек мы обозначили греческой буквой «кси» ξ, которая является аналогом латинского «икса». В точку на расстоянии x это колебание придет через время $\tau = x/\upsilon$, где υ – скорость распространения волны. Фаза колебаний в точке x будет отставать от фазы колебаний в нулевой точке на величину, определяемую временем распространения $\xi(x, t) = A\cos\omega(t-\tau)$. Т.е.:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega(t - x/\upsilon)). \qquad (10.2а)$$

Это и есть функция, описывающая гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси x (в положительном направлении). Функция, описывающая волну, может быть записана в более симметричной форме

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)), \qquad (10.2б)$$

где $k = \omega/\upsilon$ – *волновое число*. С учетом (10.1)

$$k = \omega/\upsilon = 2\pi/\lambda. \qquad (10.3)$$

Из (10.3) видно, что волновое число равно количеству длин волн, укладывающихся на 2π единицах длины и, таким образом, представляя собой пространственный аналог циклической частоты (число колебаний за 2π единиц времени, см. (9.2)).

Волновое уравнение

Найдем уравнение, которому подчиняется функция (10.2). Для этого продифференцируем ее дважды по времени и по координате:

$$\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kx); \quad \frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t - kx).$$

$$\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} = Ak\sin(\omega t - kx); \quad \frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} = -Ak^2\cos(\omega t - kx).$$

Или $\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}$. Учитывая, что в соответствии с (10.3) $\frac{k^2}{\omega^2}=\frac{1}{\upsilon^2}$, окончательно получим следующее дифференциальное *волновое уравнение*:

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}. \tag{10.4}$$

Волновое уравнение для волн в трехмерном пространстве, распространяющихся в произвольном направлении можно записать по аналогии:

$$\frac{\partial^2\xi(x,y,z;t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi(x,y,z;t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi(x,y,z;t)}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi(x,y,z;t)}{\partial t^2}. \tag{10.5}$$

Скорость упругой волны

Попытаемся получить уравнение (10.4) на основе законов динамики. Пусть волна распространяется вдоль упругого стержня. Выберем внутри стержня небольшой элемент, длина которого в невозмущенном состоянии равна Δx. Пусть при распространении волны левая часть этого элемента сместится на величину $\xi(x)$, а правая – на величину $\xi(x+\Delta x)$, не равную, в общем случае, смещению левой части (рис 10.2).

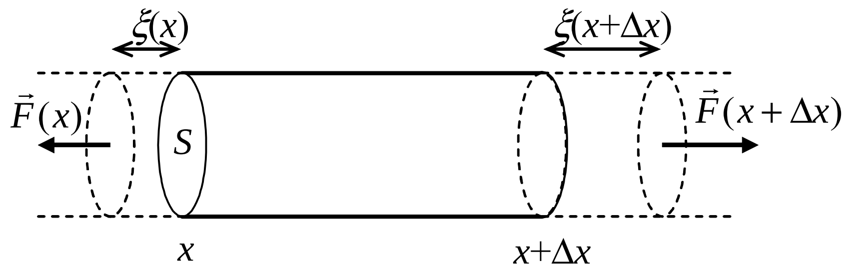


Рис. 10.2.

Растяжение элемента вызвано силами, приложенными к его торцам. Соотношения между силами и деформациями можно выразить с помощью закона Гука (см. лекцию 5). В соответствии с эти законом механическое напряжение пропорционально удельной деформации $\sigma=E\varepsilon$, где E – модуль Юнга, а $\varepsilon=\frac{\Delta\xi}{\Delta x}\approx\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$ – зависящая в нашем случае от координаты (и времени) удельная деформация стержня. Напряжение определяется приложенной силой и площадью сечения стержня: $\sigma=\frac{F}{S}$.

В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$F(x+\Delta x,t)-F(x,t)=\Delta m\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial^2 t},$$

где $a=\dfrac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial^2 t}$ ускорение элемента стержня, а Δm – его масса. Подставим выражения для сил из закона Гука: $F(x+\Delta x,t)-F(x,t)=SE\left(\left.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x}\right)$. Домножим и разделим последнее выражение на Δx. В соответствии с определением второй производной $\left(\left.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x}\right)\Big/\Delta x\approx\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$. Подставим полученные выражения во второй закон Ньютона: $ES\Delta x\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\Delta m\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$. Учтем, что $\Delta V=S\Delta x$ – объем выделенного элемента, тогда окончательно получим:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

где $\rho=\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ – плотность вещества, из которого изготовлен стержень.

Сравнивая полученное выражение с волновым уравнением (10.4) найдем скорость распространения упругой продольной волны

$$\upsilon_{\parallel}=\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (10.6)$$

В твердых телах могут существовать и поперечные упругие волны. Упругие свойства при сдвиговой деформации определяются модулем сдвига G. Поэтому рассуждения, аналогичные изложенным выше, приведут к следующему выражению для скорости поперечных волн:

$$\upsilon_{\perp}=\sqrt{\frac{G}{\rho}}. \qquad (10.7)$$

В газах упругие свойства не определяются законом Гука. Более того, давление P (аналог механического напряжения), возникающее при сжатии газа, зависит от способа сжатия. Аккуратный анализ позволяет получить следующее выражение для скорости распространения возмущений в газе:

$$\upsilon_{\text{г}} = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}. \tag{10.8}$$

Впервые задачу о скорости волн в газе решил еще Ньютон. Правда он ошибочно полагал, что сжатие происходит при постоянной температуре. На самом деле сжатие, как правило, происходит настолько быстро, что теплообмен между сжимаемой областью и остальным газом не успевает произойти. Такой процесс называется адиабатным. Он подчиняется уравнению $PV^{\gamma} = \text{const}$ или $P = \dfrac{\text{const}}{V^{\gamma}} = \dfrac{\text{const}}{m^{\gamma}}\dfrac{m^{\gamma}}{V^{\gamma}}$, или, т.к. масса m сжимаемого объема не изменяется,

$$P = \text{const}\cdot\rho^{\gamma}.$$

Здесь γ – *показатель адиабаты* (коэффициент Пуассона). О нем мы подробнее поговорим в курсе, посвященном молекулярной физике и термодинамике. Здесь же отметим, что для воздуха при комнатной температуре $\gamma \approx 1{,}4$. Подставим полученное выражение в (10.8)

$$\upsilon_{\text{г}} = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{\gamma\cdot\text{const}\cdot\rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\frac{\gamma\cdot\text{const}\cdot\rho^{\gamma}}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}}.$$

Если считать газ идеальным, то он подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{\mu}RT \quad \text{или} \quad P = \frac{\rho}{\mu}RT,$$

Где R = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная. Таким образом, скорость волн в идеальном газе определяется следующим соотношением

$$\upsilon_{\text{г}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}}. \tag{10.9}$$

Как видно, она не зависит ни от давления, ни от плотности газа, а определяется только его температурой и молярной массой. В курсе молекулярной физики и термодинамики мы узнаем, что скорость звука в газе очень близка к характерным скоростям теплового движения молекул газа в нем (например, средняя скорость молекул $\upsilon_{\text{ср}} = \sqrt{\dfrac{8}{\pi}\dfrac{RT}{\mu}}$). Попробуйте объяснить, почему.

Звук

Звук – это распространяющиеся в виде волн упругие колебания. Раздел физики, изучающий звуковые волны называется *акустикой* (от греч. *akustikós* – слуховой). Человек слышит звуки с частотой от 16 Гц до 20000 Гц.

Воспринимаемые человеком звуки характеризуются рядом параметров, основными из которых являются громкость, высота (или тон) и тембр.

Громкостью звука определяется амплитудой колебаний звуковой волны и чувствительностью уха (зависящей от частоты).

Высота звука определяется человеком субъективно и связана в основном с его частотой (тоном). С ростом частоты высота звука увеличивается.

Любой реальный звук является совокупностью колебаний различной амплитуды с определенным набором частот, т.е. имеет характерный *акустический спектр*. Спектр музыкальных звуков представляет собой набор конечного числа дискретных частот, причем самая низкая (основная) частота определяет тон звука. Шум характеризуется непрерывным акустическим спектром.

Тембр звука – это его неповторимая окраска. Он определяется набором дополнительных (высоких) частот – обертонов, сопровождающих основной тон. Тембр позволяет человеку легко узнавать звучание различных музыкальных инструментов даже, если они исполняют одну и ту же мелодию. Также индивидуален тембр голоса каждого человека.

В широком физическом смысле звук – это колебательное движение частиц упругой среды, распространяющееся в виде волн в газообразной, жидкой или твердой средах. Физическое представление о звуке охватывает и тот диапазон частот, который не воспринимается человеческим ухом. Колебания с частотой ниже 16 Гц называется *инфразвуком* (от лат. *infra* – ниже, под); выше 20000 Гц – *ультразвуком* (от лат. *ultra* – сверх, за пределами, крайне); самые высокочастотные упругие волны в диапазоне от 10^9 Гц до 10^{12}-10^{13} Гц относят к *гиперзвуку* (от греч. *hypér* – над, сверх). Частотный диапазон гиперзвуковых волн сверху ограничивается физическими факторами, характеризующими атомное и молекулярное строение среды: длина упругой волны должна быть значительно больше длины свободного пробега молекул в газах и больше межатомных расстоянии в жидкостях и в твёрдых телах.

Оценим скорости звуковых волн в различных средах. Например, модуль Юнга для железа (стали) $E \approx 2{\cdot}10^{11}$ Па, а плотность $\rho \approx 8000$ кг/м^3. Поэтому скорость продольных упругих волн в железе (стали)

$$\upsilon_{\parallel}^{(\text{железо})} \approx \sqrt{\frac{2\cdot 10^{11}}{8000}} = \sqrt{25\cdot 10^6} = 5000 \text{ м/с}.$$

Скорость поперечных волн в стали несколько меньше, т.к. модуль сдвига составляет $G \approx 8{\cdot}10^{10}$ Па,

$$\upsilon_{\perp}^{(\text{железо})} \approx \sqrt{\frac{8\cdot 10^{10}}{8000}} = \sqrt{10\cdot 10^6} \approx 3200 \text{ м/с}.$$

Для воды модуль упругости ($E \approx 2{\cdot}10^9$ Па) в сто раз меньше, чем для стали, а плотность меньше всего примерно в восемь раз. Поэтому

$$\upsilon_{\parallel}^{(\text{вода})} \approx \sqrt{\frac{2\cdot 10^{9}}{1000}} = \sqrt{2\cdot 10^6} \approx 1400 \text{ м/с}.$$

Скорость звука в воздухе оценим, используя формулу (10.9). Будем считать температуру воздуха равной 17°С (или T = 290 К). Молярная масса воздуха примерно равна $\mu = 0{,}029$ кг/моль. Тогда

$$\upsilon_{\parallel}^{(\text{воздух})} \approx \sqrt{1{,}4\frac{8{,}31\cdot 290}{0{,}029}} = \sqrt{116340} \approx 340 \text{ м/с}.$$

Скорость звука заметно зависит от температуры. Например, при нуле градусов Цельсия (или T = 273 К) скорость звука составляет примерно 330 м/с.

Эффект Доплера

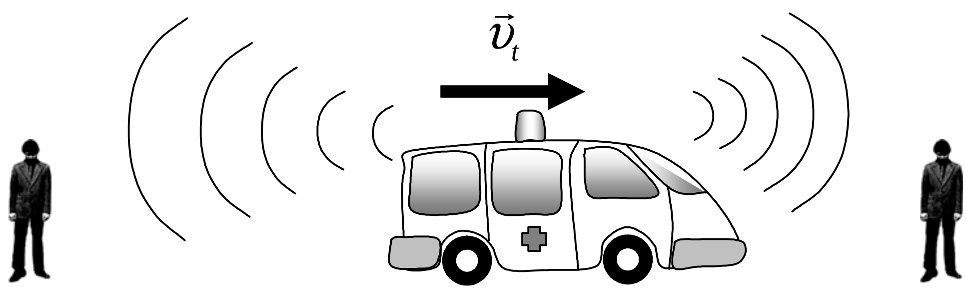


Рис. 10.3.

Наверняка каждый из вас замечал, что тон (высота) звукового сигнала зависит от движения его источника (или приемника). Например, гудок встречного поезда (или сигнал автомобиля) звучит явно выше, когда он приближается к вам, а после того, как поезд (автомобиль) поравняется с вами и начнет удаляться, звук сигнала заметно понижается (вы слышите что-то вроде «уууууууоаааааа»). Это явление называется эффектом Доплера (Кристиан Доплер (1803-1853) – австрийский физик и астроном).

Предположим для простоты, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой. Скорость источника υ_t будем считать положительной, если источник движется по направлению к приемнику. Аналогично скорость приемника υ_r будем считать положительной, если приемник движется по направлению к источнику.

Пусть источник порождает колебания с частотой ν_0. Расстояние между гребнями волн, излучаемых неподвижным источником $\lambda_0=\upsilon\cdot T=\upsilon / \nu_0$. Однако, когда источник движется, следующий гребень будет излучен не из той же точки, что и предыдущий, т.к. источник за период колебаний успеет пройти путь, равный $\upsilon_t\cdot T$. Если источник движется в направлении излучения и его скорость не превышает скорости звука, то расстояние между гребнями будет равно

$$\lambda = \upsilon T - \upsilon_t T = (\upsilon - \upsilon_t)T = \frac{\upsilon - \upsilon_t}{\nu_0}. \tag{10.10}$$

Мимо неподвижного приемника за время Δt пройдет $N' = \dfrac{\upsilon\Delta t}{\lambda}$ гребней. Поэтому частота, с которой неподвижный приемник встречает перепады давления $\nu' = \dfrac{N'}{\Delta t} = \dfrac{\upsilon}{\lambda}$. Если приемник движется навстречу излучателю, то он будет встречать гребни чаще. Так как относительная скорость в этом случае составляет $\upsilon + \upsilon_r$, частота принимаемых колебаний

$$\nu = \frac{N}{\Delta t} = \frac{(\upsilon + \upsilon_r)\Delta t}{\lambda \Delta t} = \frac{\upsilon + \upsilon_r}{\lambda} \tag{10.11}$$

Чтобы найти изменение частоты в случае движения источника и приемника, подставим выражение для длины волны (10.10) в формулу для частоты (10.11)

$$\nu = \nu_0 \frac{\upsilon - \upsilon_t}{\upsilon + \upsilon_r}. \tag{10.12}$$

Из формулы (10.12) вытекает, что если расстояние между источником и приемником уменьшается, воспринимаемая приемником частота оказывается больше частоты источника. Если расстояние между источником и приемником увеличивается, ν будет меньше, чем ν_0 (рис. 10.3).

Стоячие волны

Если волна встречает на пути препятствие, она отражается от него и навстречу падающей волне распространяется отраженная. Колебания в каждой точке будут представлять собой результат наложения (суперпозиции) этих двух волн. Такое наложение является частным случаем *интерференции* (взаимовлияния) *когерентных* (согласованных по частоте и фазе) волн, которую мы более подробно рассмотрим в курсе оптики.

Пусть две волны одинаковой амплитуды распространяются навстречу друг другу вдоль оси x:

$$\xi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)),$$

$$\xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)).$$

(для простоты начальные фазы обеих волн выбраны одинаковыми). В соответствии с формулой суммы косинусов: $\cos a + \cos b = 2\cdot\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$. Учитывая определение (10.3), получим следующее выражение для результирующей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cdot\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\cos\omega t. \qquad (10.13)$$

Полученное выражение описывает колебания с частотой ω, амплитуда которых $2A\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}$ зависит от координаты (рис. 10.4). Такой процесс называется *стоячей волной*.

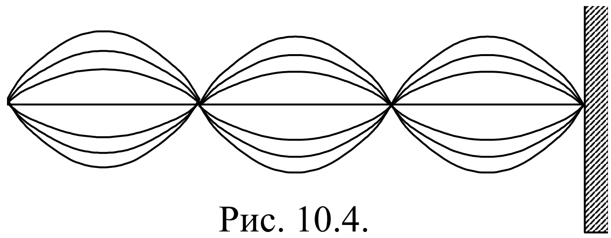


Рис. 10.4.

Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются *узлами*, а точки, в которых амплитуда максимальна – *пучностями*. Расстояние между соседними узлами или пучностями равно половине длины волны.

Одним из примеров стоячих волн являются колебания струны. В результате наложения волн бегущих по струне в прямом и обратном направлении, в ней устанавливаются стоячие волны строго определенных длин. Закрепленные концы струны представляют собой узлы стоячей волны, а между ними располагаются одна или две, или три и т.д. пучности, разделенные промежуточными узлами. Это означает, что в струне возникают колебания не любых, а строго определенных, кратных частот.

Другим примером стоячих волн являются звуковые волны в трубах. При этом на закрытом конце трубы возникает пучность давления, а на открытом – узел. В любом случае труба будет резонировать только на тех частотах, которым соответствует возникновение в ней стоячей волны.

Возникающие в струнах, трубах и других полостях стоячие волны с незапамятных времен используется человеком при игре на музыкальных инструментах.

Энергия упругой волны

Пусть продольная волна распространяется вдоль оси x. В этом случае уравнение волны имеет вид $\xi(x,t) = A\cos\left(\omega t - kx\right)$ (см. 10.2). Энергия некоторого участка среды, в которой распространяется эта волна, складывается из кинетической энергии K и потенциальной энергии $П$.

Пусть объем этого участка ΔV, масса $\Delta m = \rho \cdot V$, а скорость смещения его частиц $u = \dfrac{d\xi}{dt} = -A\omega \sin\left(\omega t - kx\right)$. Тогда кинетическая энергия будет определяться выражением:

$$K = \frac{\Delta m u^2}{2} = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \cdot A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \qquad (10.14)$$

Найдем потенциальную энергию деформированного участка. Сила, действующая на тело при его сжатии, определяется законом Гука $F = E\dfrac{\Delta l}{l}S$. Чтобы найти энергию деформированного тела, рассчитаем работу по его сжатию. Работа может быть представлена как произведение «средней» силы на перемещение $A = F_{ср} \cdot \Delta l$. Так как сила линейно зависит от деформации, ее средняя величина равна половине максимальной $F_{ср} = E\dfrac{\Delta l}{2l}S$. Поэтому

$$П = \frac{ES\Delta l^2}{2l} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 l \cdot S.$$

Относительную деформацию $\dfrac{\Delta l}{l}$ можно представить в виде $\dfrac{d\xi}{dx}$, где $d\xi$ – относительное смещение частиц, отстоящих друг от друга на dx. Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} E \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \Delta V .$$

Выражение для $\frac{d\xi}{dx}$ найдем из (10.2): $\frac{d\xi}{dx} = -Ak \sin(\omega t - kx)$. С учетом этого перепишем выражение для потенциальной энергии в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} E \cdot \Delta V \cdot A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx). \qquad (10.15)$$

Сравнивая выражения (10.14) и (10.15), мы приходим к выводу, что и кинетическая и потенциальная энергии изменяются в одной фазе, т. е. одновременно достигают максимума и минимума. Этим энергия участка волны существенно отличается от энергии колебания изолированной точки, где при максимуме кинетической энергии потенциальная энергия имеет минимум, и наоборот. При колебании отдельной точки ее полная механическая энергия остается постоянной. При колебании в среде каждый элемент объема среды связан с окружающей средой, и энергия из одного участка среды может переходить в другие. Поэтому полная энергия участка среды, в которой распространяется волна, не остается постоянной.

Подсчитаем полную энергию W элемента объема среды. Для этой цели сначала преобразуем уравнение (10.15). Т.к. $\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, а $k = \frac{\omega}{\upsilon}$, то

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \qquad (10.16)$$

Складывая выражения (10.14) и (10.16), получим:

$$W = K + \Pi = \rho \cdot \Delta V \cdot A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \qquad (10.17)$$

Таким образом, энергия участка волны *пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты* колебаний и, кроме того, *пропорциональна плотности* среды.

Поток энергии

Распространение волны представляет собой последовательную передачу движения от одного участка среды к другому, что означает передачу энергии.

Введем в рассмотрение величину *плотности энергии* w, которую определим как отношение энергии, заключенной в элементе объема ΔV, к величине этого объема. Из выражения (10.17) следует, что

$$w = \frac{W}{\Delta V} = \rho \cdot A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Плотность энергии, как и сама энергия, величина меняющаяся со временем. Для характеристики *интенсивности* волны используют среднее значение плотности энергии. Так как среднее значение квадрата синуса за период равно $\frac{1}{2}$, то среднее значение плотности энергии

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \cdot A^2 \omega^2. \qquad (10.18)$$

В силу того, что энергия не остается локализованной в какой-то области пространства, а распространяется в среде, можно ввести понятие о *потоке энергии*.

Через площадку S перпендикулярную к направлению скорости $\vec{\upsilon}$ за время равное периоду T протечет количество энергии $W = \bar{w} S \upsilon T$. Средний поток энергии Φ (количество энергии, протекающее через площадку в единицу времени) получим, поделив это выражение на время T, в течение которого энергия W протекает через поверхность S: $\bar{\Phi} = \bar{w} \upsilon S$. Подставив сюда выражение (10.18)**,** получим:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \rho \cdot A^2 \omega^2 \upsilon S.$$

Величина равная отношению потока к площади перпендикуляпрной поверхности, через которую он протекает, называется *плотностью потока*. Из сравнения с выражением (10.18) видно, что плотность потока $\bar{j} = \frac{\bar{\Phi}}{S} = \frac{1}{2} \rho \cdot A^2 \omega^2 \upsilon$ равна произведению средней плотности энергии на скорости распространения волны.

Если фронт волны плоский, его площадь не меняется. Тогда плотность потока энергии (а, следовательно, и амплитуда колебаний) не зависит от положения фронта. Для сферической волны площадь фронта возрастает пропорционально квадрату расстояния до источника. Это означает, что плотность потока энергии убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, а амплитуда – обратно пропорционально расстоянию до источника.

Так как скорость $\vec{\upsilon}$ представляет собой вектор, то и плотность потока энергии $\vec{j}$ можно рассматривать как вектор, направленный в сторону распространения волны.

$$\vec{j} = \overline{w}\vec{\upsilon} \tag{10.19}$$

Такой вектор впервые ввел в рассмотрение русский физик Николай Алексеевич Умов (1846-1915) и поэтому он носит название *вектора Умова*.

Волновые процессы в природе и технике

Исследуя характер распространения продольных и поперечных волн, можно сделать заключения о природе веществ, через которые проходят упругие волны. Например, измеряя промежуток между приходом продольных и поперечных волн, распространяющихся в земной коре, можно оценить расстояние от сейсмической станции до очага землетрясения или места подземного атомного взрыва (модуль сдвига G в твердых телах примерно в два раза меньше модуля упругости E).

У Земли методами сейсмической разведки было установлено наличие жидкого ядра. Из-за его наличия на диаметрально противоположной месту землетрясения стороне Земли поперечные сейсмические волны не фиксируются (как уже отмечалось в жидкостях и газах не возникает упругость при сдвиговых деформациях).

Определение положения предметов можно решать с помощью измерения времени запаздывания отраженных звуковых волн. На этом принципе основаны гидролокация и эхолокация. Локатор посылает короткий звуковой сигнал, этот сигнал, отразившись от препятствия, возвращается обратно. Измеряя время между моментом посылки и приема, можно определить расстояние до препятствия.

Интересно, что представители животного мира «запатентовали» метод звуковой локации миллионы лет назад. Летучие мыши используют этот метод для точной ориентации в пространстве и обнаружения мелких насекомых в полной темноте. Дельфины используют аналогичный метод для обнаружения предметов под водой.

Лекция 11

- *Время не абсолютно!*
- *Преобразования пространства-времени.*
- *Парадоксы СТО.*
- $E = m \cdot c^2$.

Элементы специальной теории относительности

Введение

Аристотель считал состояние покоя неким предпочтительным состоянием, в котором всегда должно оказываться тело, если на него не действует сила. Из законов же Ньютона следует, что единого эталона покоя не существует. Никакими механическими опытами, проведенными в данной системе невозможно установить, находится ли она в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения (см. комментарии Галилея в лекции 4).

Это утверждение считалось незыблемым до конца XIX века, когда английский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879) сумел объединить электричество и магнетизм в единую теорию. Эта теория предсказывала, что радиоволны и свет должны распространяться с некоторой фиксированной скоростью. По современным данным значение скорости света c = 299792458 м/с. Но поскольку теория Ньютона покончила с представлением об абсолютном покое, теперь, говоря о фиксированной скорости света, нужно было указать, относительно чего измеряется эта скорость. В связи с этим было постулировано существование субстанции, заполняющей все пространство, названной *эфиром*. Световые волны распространяются в эфире так же, как звуковые в воздухе, и, следовательно, их скорость – это скорость относительно эфира. Наблюдатели, движущиеся относительно эфира с разными скоростями, должны видеть, что свет идет к ним с разной скоростью. В частности, так как Земля движется в эфире по своей орбите вокруг Солнца, скорость света, измеренная в направлении движения Земли, должна отличаться от скорости света, измеренной под прямым углом к направлению движения.

Кроме того, оказалось, что уравнения Максвелла для электромагнитного поля меняют свой вид при преобразованиях Галилея (т.е. *неинвариантны* относительно этих преобразований). Это могло означать либо, что классические преобразования координат неверны, либо, что электромагнитные явления не подчиняются принципу относительности. В последнем случае эксперименты с электромагнитным полем должны были дать возможность определить абсолютную скорость наблюдателя (или скорость, относительно эфира).

В 1881 г. Альберт Абрахам Майкельсон (1852-1931) поставил точный эксперимент по сравнению значения скорости света, измеренной в направлении движения Земли, с ее значением, измеренным в перпендикулярном направлении. Оба значения оказались совершенно одинаковыми.

Постулаты Эйнштейна

И Аристотель, и Ньютон верили в абсолютное время. Иными словами, они считали, что временной интервал между двумя событиями можно однозначно измерить, и что результат будет одинаков независимо от того, кто производит измерения, лишь бы у измеряющего были правильные часы. Время было полностью отделено от пространства и считалось не зависящим от него.

В 1905 г. служащий патентного бюро Альберт Эйнштейн (1879-1955) опубликовал работу, в которой было показано, что никакого эфира не нужно, если *отказаться от понятия абсолютного времени*. В этом случае принцип относительности распространяется и на электромагнитные явления.

Специальная теория относительности (СТО) Эйнштейна, или *релятивистская* теория (от лат. *relativus* – относительный), базируется на двух постулатах, являющихся обобщением опытных данных.

1. Обобщенный принцип относительности

Во всех инерциальных системах отсчета все физические явления подчиняются одним и тем же законам, т.е. никакими физическими опытами, включая электромагнитные, нельзя обнаружить прямолинейное и равномерное движение одной системы относительно другой.

2. Принцип постоянства скорости света

Скорость света в вакууме во всех инерциальных системах отсчета одинакова и не зависит как от скорости источника, так и приемника света.

Относительность времени

Представления об абсолютности времени основываются на «здравом смысле», относящемся к сравнительно медленным объектам (яблоко, планета и даже межпланетный космический корабль), но они оказываются совершенно неуместными, когда скорости становятся близкими к скорости света.

По теории Ньютона, если световой импульс послан из одной точки в другую, то время его прохождения, измеренное разными наблюдателями, будет одинаковым (поскольку время абсолютно), но пройденный им путь с точки зрения этих наблюдателей может оказаться разным (так как пространство не является абсолютным). Так как скорость света есть пройденное светом расстояние, деленное на время, разные наблюдатели будут получать разные скорости света.

В теории относительности все наблюдатели должны считать, что скорость распространения света одинакова для всех инерциальных систем отсчета. И поскольку расстояние, пройденное светом, для них может быть неодинаковым, время, затраченное светом на прохождение между двумя точками, также различно. Это означает, что у каждого наблюдателя должен быть свой масштаб времени, измеряемого с помощью имеющихся у него часов, и что показания одинаковых часов, находящихся у разных наблюдателей, не обязательно согласуются.

Преобразования Лоренца

Поскольку неверны представления Ньютона о свойствах пространства и времени, то также ошибочны и преобразования Галилея, которые из них вытекают. Попытаемся найти такие преобразования координат, которые не противоречили бы преобразованиям Галилея для случая малых скоростей и объясняли бы указанные выше экспериментальные факты и противоречия.

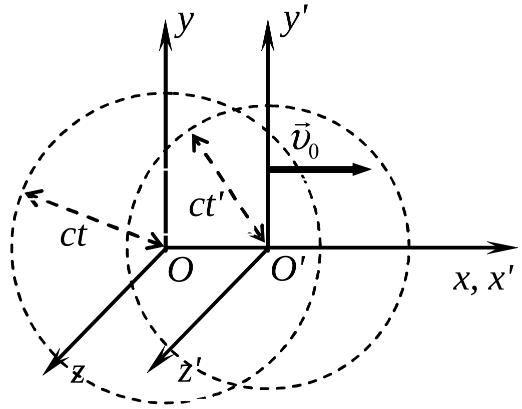


Рис. 11.1.

Рассмотрим две системы координат (рис. 11.1). Одну из систем (O) с осями x, y, z будем считать условно *неподвижной*. Другая, *подвижная* система (O') с координатами x', y', z' движется относительно x, y, z со скоростью v_0 вдоль оси x.

В направлении осей y и z смещения не происходит, поэтому в направлениях, перпендикулярных скорости, координаты преобразуются тождественно. Рассмотрим преобразования координат x и x', вдоль которых происходит относительное перемещение систем. Время будем отсчитывать от момента, когда начала координат обеих систем совпадали (т.е. при $t = t' = 0$, $x = x' = 0$). В этом случае преобразования должны иметь вид: $x = f(x' + \upsilon_0\, t')$. В силу однородности пространства преобразования координат должны быть линейными, следовательно:

$$x = \gamma\cdot(x' + \upsilon_0\, t'), \qquad (11.1)$$

где γ – постоянная величина.

Наша задача заключается в том, чтобы найти эту величину. Пусть в момент времени $t = t' = 0$ в начале координат произошла вспышка света.

В соответствии со вторым постулатом Эйнштейна (о постоянстве скорости) света координаты фронта волны в системах O и O' ($x_{сиг}$ и $x'_{сиг}$) в моменты времени соответственно $t_{сиг}$ и $t'_{сиг}$) будут равны

$$x_{сиг} = c\, t_{сиг} \quad \text{и} \quad x'_{сиг} = c\, t'_{сиг}.$$

В соответствии с первым постулатом, обе системы совершенно равноправны, поэтому с точки зрения системы O', система O движется относительно нее со скоростью $-\upsilon_0$. И соответствующее преобразование координаты x' выглядит так

$$x' = \gamma\cdot(x - \upsilon_0\, t). \qquad (11.2)$$

Поэтому

$$x'_{сиг} = \gamma\cdot(x_{сиг} - \upsilon_0\, t_{сиг}),$$
$$x_{сиг} = \gamma\cdot(x'_{сиг} + \upsilon_0\, t'_{сиг}).$$

Или $c\, t'_{сиг} = \gamma\cdot(c - \upsilon_0)\, t_{сиг}$ и $c\, t_{сиг} = \gamma\cdot(c + \upsilon_0)\, t'_{сиг}$.

Выразив $t'_{сиг}$ из первого уравнения, подставив во второе и сократив на $t_{сиг}$, найдем, что $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}$.

Для того, чтобы найти закон преобразования времени подставим x' из (11.2) в (11.1): $x = \gamma\cdot(\gamma\cdot(x - \upsilon_0\, t) + \upsilon_0\, t')$ или $(\gamma^2 - 1)x = \gamma\upsilon_0\,(\gamma t - t')$. Учитывая, что $\gamma^2 - 1 = \dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}$, получим $t = \dfrac{t' + x'\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}$.

Итак, преобразования координат и времени (в случае движения вдоль оси x) в специальной теории относительности (*преобразования Лоренца*) имеют вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + x'\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - x\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1 - \upsilon_0^2/c^2}}. \end{cases} \qquad (11.3)$$

Эти преобразования впервые получил в 1904 г. Хендрик Антон Лоренц (1853-1928), пытаясь объяснить результат опыта Майкельсона. Важно, что эти преобразования оставляют инвариантными уравнения электродинамики.

Рассмотрим некоторые принципиальные следствия этих преобразований.

1. Преобразования Лоренца – это преобразования не только координат, но и времени. В СТО пространство и время принципиально нельзя отделить друг от друга. Особенно ярко связь пространственных координат и времени заметна при использовании следующих обозначений $\beta = \upsilon_0/c$ и $\tau = ct$. В этом случае $x = \dfrac{x' + \beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и $\tau = \dfrac{\tau' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, т.е. время и координата входят в преобразования абсолютно симметрично. Это дало возможность одному из университетских учителей Эйнштейна, Герману Минковскому, изложить теорию относительности как четырехмерную теорию – теорию *пространства-времени*, в которой все векторы имеют не три, а четыре компоненты: $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$, где $i = \sqrt{-1}$. Выбор в качестве координаты времени мнимой оси вызван тем, что все четыре оси должны быть ортогональными.

2. Перейдя в преобразованиях Лоренца к пределу при $\upsilon \ll c$, получим формулы преобразований Галилея (см. (3.1), в лекции 3). Следовательно, ньютоновская механика является предельным случаем СТО для малых скоростей. Таким образом, соблюдается *принцип соответствия*, согласно которому любая новая, более совершенная, теория должна содержать предшествующую ей теорию, как предельный случай (если, конечно, обе теории правильно описывают реальный мир на своем уровне).

3. При $\upsilon \geq c$ преобразования Лоренца теряют смысл. Это означает, что в СТО скорость света является предельно возможной скоростью движения.

Релятивистская кинематика

Относительность одновременности

Пусть в системе O в точках x_1 и x_2 в один и тот же момент времени $t_1=t_2=t_0$ (*одновременно*) произошли два события. По часам системы K' эти события произойдут в моменты времени $t_1' = \dfrac{t_0 - x_1\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и $t_2' = \dfrac{t_0 - x_2\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ($\beta = \upsilon_0/c$). Как видно, если $x_1 \neq x_2$, то события в системе O' не являются одновременными: *одновременность относительна*. Более того, в системах, движущихся в противоположных направлениях, эти события могут происходить в различной последовательности (зависит от знака υ_0).

Некоторые не очень хорошо знающие физику «философы» на основе приведенного выше рассуждения утверждают, что в СТО нарушается *принцип причинно-следственной связи*, в частности, следствие в какой-то системе отсчета может предшествовать причине. Конечно это не так.

Дело в том, что если, как в нашем случае, два события произошли одновременно в двух разных точках, то они не обязательно *причинно связаны*. Причина связана со следствием взаимодействиями, а они не осуществляются мгновенно: никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света (которая имеет конечное значение).

Если же рассмотреть аккуратно в рамках СТО два связанных события, то окажется, что причина предшествует следствию в любой системе отсчета (попробуйте убедиться в этом самостоятельно).

Релятивистское сокращение длины

Рассмотрим твердый стержень, расположенный вдоль оси x' и движущийся вместе с подвижной системой координат. Относительно этой системы стержень покоится, его концы имеют координаты x'_1 и x'_2 и длина стержня $l_0 = x'_2 - x'_1 = const$.

Определим длину стержня $l = x_2 - x_1$ в неподвижной системе координат, относительно которой он движется со скоростью υ_0. Для этого необходимо измерить координаты его концов в один и то же момент времени t_0. Поэтому

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - \upsilon_0 t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - \upsilon_0 t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\text{ где } \beta = \upsilon_0/c\text{, или:}$$

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.4}$$

Т.е. в неподвижной системе отсчета длина стержня меньше. Формула (11.4) характеризует *релятивистское* или *лоренцево* сокращение длины.

Длина стержня, т.е. расстояние между двумя взаимно неподвижными точками пространства, в СТО является величиной относительной: один и тот же стержень имеет разные длины в различных системах отсчета. В СТО вводится так называемая *собственная длина* – это длина стержня в той системе, относительно которой он покоится (в нашем случае l_0). Собственная длина является наибольшей по сравнению с длиной в любой другой инерциальной системе, движущейся относительно первой.

Практический совет: если вы достаточно разгонитесь ($\upsilon \approx c$), то расстояние, которое вам останется пройти, существенно сократится!

Релятивистское замедление времени

Пусть в некоторой точке x'_0 движущейся системы координат произошли два последовательных события в моменты времени t'_1 и t'_2. Промежуток времени между этими событиями равен $\Delta t' = t'_2 - t'_1$.

В неподвижной системе эти события происходят в разных точках. Промежуток времени в неподвижной системе координат равен:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + x'_0\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t'_1 + x'_0\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{11.5}$$

Видно, что в неподвижной системе координат эти события будут разделены бóльшим промежутком времени, чем в подвижной.

Экспериментальным подтверждением этого эффекта является, например, значительное возрастание времени жизни нестабильных элементарных частиц при увеличении их скорости до значений, близких к скорости света.

Релятивистский эффект замедления времени, как и сокращение длины, заметен только при скоростях, сравнимых со скоростью света. Если же относительные скорости систем много меньше скорости света, то время едино для всех систем, как и считал Ньютон.

Парадокс близнецов

Представим себе двух близнецов, один из которых остается на Земле, а другой отправляется в космическое путешествие со скоростью, близкой к скорости света. Каждый из братьев отсчитывает время по своим часам: космонавт – по часам корабля ($\Delta t'$), землянин – по земным часам (Δt). Представим далее, что космонавт вернулся на Землю и встретился со своим братом. Если братья захотят выяснить, сколько времени длилось путешествие, то установят, что по часам космонавта оно длилось заметно меньше, чем по земным часам: согласно формуле (11.5) движущиеся часы космонавта отмечают меньшее время, чем «неподвижные» часы на Земле. Итак, космонавт «помолодел». Он окажется моложе своего брата-близнеца.

Сразу отметим, что подобное путешествие в будущее других людей, а не в свое собственное будущее, не противоречит теории относительности и не является парадоксальным. Действительный парадокс близнецов состоит в следующем. В соответствии с принципом относительности можно высказать два физически равноправных утверждения:

1) космонавт движется, землянин неподвижен;
2) космонавт неподвижен, а землянин движется относительно него с той же скоростью, но в противоположном направлении.

Получается действительно парадоксальная ситуация: с одной стороны, космонавт должен быть моложе землянина, а с другой – землянин моложе космонавта.

Этот парадокс разрешается следующим образом. Два наблюдателя, находящиеся в различных инерциальных системах, могут встретиться «с глазу на глаз» только один раз, пролетая один мимо другого; затем они навсегда разойдутся. Чтобы братья смогли снова встретиться, один из них, а в нашем случае это именно космонавт, должен повернуть обратно, т.е. сменить систему отсчета. Таким образом, задача перестает быть симметричной с точки зрения СТО. Основываясь на преобразованиях Лоренца, можно показать, что «помолодеет» брат-космонавт, так как именно он «менял» свою систему отсчета.

Релятивистский закон сложения скоростей

Классический закон сложения скоростей (см. (3.3) в лекции 3) не может быть справедливым в СТО, так как согласно ему скорость света различна в разных системах отсчета, что противоречит второму постулату Эйнштейна. Найдем *релятивистский* закон сложения скоростей, исходя из преобразования Лоренца (11.3).

Пусть в подвижной системе координат материальная точка движется вдоль оси x' с постоянной скоростью $\upsilon' = x'/t'$ (для упрощения расчетов положим, что при $t = t' = 0$ материальная точка находилась в начале отсчета систем координат $x = x' = 0$). Подвижная система координат движется со скоростью υ_0 относительно неподвижной. Определим, чему равна скорость точки $\upsilon = x/t$ относительно неподвижной системы координат.

$$x = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t = \frac{t' + x'\upsilon_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(здесь } \beta = \frac{\upsilon_0}{c}\text{)}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\upsilon = \frac{x}{t} = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{t' + x'\upsilon_0/c^2}.$$

Разделив числитель и знаменатель на t', найдем:

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + \upsilon_0}{1 + \dfrac{\upsilon'\upsilon_0}{c^2}}. \tag{11.6}$$

Это равенство выражает *релятивистский закон сложения скоростей*.

Если, например, $\upsilon' = c$ (испускание света движущимся источником), то

$$\upsilon = \frac{c + \upsilon_0}{1 + \upsilon_0/c} = c.$$

При малых скоростях движения ($\upsilon' << c$ и $\upsilon_0 << c$) релятивистский закон сложения скоростей, как и следовало ожидать, переходит в классический закон сложения скоростей (3.3). Т.е. классическая механика не отвергается, но лишь ограничивается пределами применимости. Она верна как частный случай – случай малых скоростей (принцип соответствия).

Релятивистский эффект Доплера

Рассмотренный в предыдущей лекции акустический эффект Доплера определяет изменение частоты колебаний в звуковой волне в зависимости от скоростей источника и приемника. Скорость световых волн одинакова во всех системах отсчета, поэтому и эффект Доплера для них должен выражаться иным соотношением. Очевидно, что в силу равноправия всех инерциальных систем отсчета этот эффект должен определяться только относительной скоростью источника и приемника.

Выражение для релятивистского эффекта Доплера можно легко получить из преобразований Лоренца. Пусть приемник движется относительно источника со скоростью $\vec{\upsilon}$, направленной вдоль оси x', и эта ось совпадает с осью x системы координат неподвижного источника. Уравнение плоской световой волны в неподвижной системе будет иметь следующий вид (см. 10.2):

$$\xi(x,t) = A\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right), \qquad (11.7)$$

где ω_0 – циклическая частота колебаний в неподвижной системе. Уравнение волны в подвижной системе формально можно получить, проведя преобразование координаты и времени в соответствии с (11.3):

$$\xi(x',t') = A\cos\left(\omega_0\left(\frac{t' + (\upsilon/c^2)x'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - \frac{x' + \upsilon t'}{c\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)\right) =$$

$$= A\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\left(t' + (\upsilon/c^2)x' - x'/c - (\upsilon/c)t'\right)\right) =$$

$$= A\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}(1-\upsilon/c)\left(t' - x'/c\right)\right).$$

Т.е. уравнение волны в подвижной системе имеет такую же форму, как и в неподвижной (11.7), но отличается частотой колебаний:

$$\xi(x',t') = A\cos\left(\omega'\left(t' - x'/c\right)\right) = A\cos\left(\frac{\omega_0(1-\upsilon/c)}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\left(t' - x'/c\right)\right). \qquad (11.8)$$

Сравнение (11.7) и (11.8) дает следующее соотношение для релятивистского эффекта Доплера:

$$\omega = \omega_0 \frac{1-\upsilon/c}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\upsilon/c}\sqrt{1-\upsilon/c}}{\sqrt{1-\upsilon/c}\sqrt{1+\upsilon/c}} = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\upsilon/c}}{\sqrt{1+\upsilon/c}}.$$

Или

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\upsilon/c}}{\sqrt{1+\upsilon/c}} \qquad (11.9)$$

По эффекту Доплера, можно судить об относительной скорости звезд. Именно он позволил установить факт расширения Вселенной.

Элементы релятивистской динамики

Релятивистский закон преобразования скоростей в форме (11.6) заставляет переосмыслить понятие массы. Действительно, если в СТО в качестве импульса тела также принимается $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$, где m – постоянная величина, то закон сохранения импульса при столкновении двух тел не будет выполняться в любой инерциальной системе отсчета. Но закон сохранения импульса является следствием принципа симметрии пространства, такого же фундаментального, как и принцип относительности. Можно показать, что для придания импульсу релятивистского статуса необходимо считать массу тела m зависящей от скорости его движения (вывод этого выражения достаточно громоздкий, поэтому мы его не приводим):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad (11.10)$$

Величина m_0 представляет собой массу покоящегося тела и называется *массой покоя*. При небольших скоростях движения зависимостью массы от скорости можно пренебречь, т.е. принцип соответствия снова выполняется. Зато при скорости тела, стремящейся к скорости света, его масса увеличивается неограниченно.

Надо понимать, что замена постоянной массы на массу, являющуюся функцией скорости, – не просто математический трюк. Масса – одна из основных характеристик материи: мера ее инертности. Инертность тела можно измерить, т.е. зависимость массы от скорости – проверяемый факт. Физики и инженеры, которые занимаются исследованием элементарных частиц, разгоняя частицы в ускорителях до скорости, близкой к световой, прекрасно знают, что, из-за увеличения инертности частиц, для изменения их скорости нужны заметно большие силы (порождаемые в данном случае электрическими и магнитными полями), чем при малых скоростях. При этом инертность частиц изменяется строго в соответствии с выражением (11.10).

Из школьного курса физики вы знаете, что температура тела есть мера кинетической энергии движения его молекул. Значит, при нагревании масса молекул растет, так как увеличивается скорость их движения, а, следовательно, увеличивается и масса всего тела. Замечали ли вы когда-нибудь, что горячий чайник тяжелее холодного? Чтобы оценить величину этого эффекта, займемся установлением вида релятивистской кинетической энергии.

Релятивистская кинетическая энергия

Второй закон Ньютона в релятивистском случае, когда масса тела зависит от скорости, может быть формально записан так же, как и в нерелятивистском (но через быстроту изменения импульса, а не через массу и ускорение):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m \cdot \vec{\upsilon}\right)}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \vec{\upsilon}\frac{dm}{dt}. \tag{11.11}$$

В лекции 8 мы показали, что изменение кинетической энергии тела равно работе действующей на него результирующей силы. Будем считать, что в релятивистском случае изменение кинетической энергии можно рассчитать аналогично.

Пусть на тело, неподвижное в начальный момент, действует сила. Скорость тела будет возрастать, оставаясь направленной вдоль силы. Поэтому во втором законе Ньютона (11.10) можно не учитывать векторный характер величин:

$$F = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt}.$$

Умножим обе части этого уравнения на элементарное перемещение $dx = \upsilon{\cdot}dt$:

$$F \cdot dx = m\upsilon \cdot d\upsilon + \upsilon^2 \cdot dm. \tag{11.12}$$

По правилам нахождения дифференциала, из (11.10) получим

$$dm = \frac{m_0\upsilon \cdot d\upsilon}{c^2\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{m\upsilon \cdot d\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}.$$

Подставим это выражение в (11.12):

$$F \cdot dx = \left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2 - \upsilon^2}\right)m\upsilon \cdot d\upsilon = \frac{m_0\upsilon \cdot d\upsilon}{\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)^{3/2}}.$$

Левая часть выражения представляет работу, которая совершена при перемещении dx. Эта работа пошла на изменение кинетической энергии тела dK, которая выражается правой частью уравнения. Вычислим интеграл:

$$K = \int_0^{\upsilon} \frac{m_0 \upsilon \cdot d\upsilon}{\left(1 - \upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 \qquad (11.13)$$

Эта релятивистская формула для кинетической энергии справедлива в общем случае. При $\upsilon << c$ она переходит в формулу ньютоновской механики $K = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ (см. (6.10)).

Связь между энергией и массой. Энергия покоя

Величина

$$E = mc^2. \qquad (11.14)$$

в формуле (11.13) для кинетической энергии называется *полной энергией тела*. Это знаменитый закон Эйнштейна о взаимосвязи массы и энергии. Он утверждает, что энергия и масса – эквивалентны.

Величина

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad (11.14а)$$

называется *энергией покоя* или *собственной энергией* тела (иногда ее также называют *полной внутренней энергией тела*). Согласно специальной теории относительности, неподвижное тело, даже в отсутствии силовых полей, обладает энергией. Очевидно, что внутреннюю энергию тела можно изменить, например, нагрев тело. Оценим изменение массы 1 л воды после нагревания от 0ºС до 100ºС:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{C_{\text{у}} m \Delta T}{c^2} \approx \frac{4200 \cdot 1 \cdot 100}{9 \cdot 10^{16}} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ кг},$$

где $C_{\text{у}}$ – удельная теплоемкость воды. Как видно, величина слишком мала, и едва ли может быть использована для обнаружения зависимости массы от температуры.

Тем не менее, связь энергии и массы отчетливо проявляется при ядерных реакциях, когда *дефект массы* (разность масс исходных частиц и продуктов реакции) «превращается» в энергию.

На самом деле энергетический эффект химических реакций также обусловлен разницей масс продуктов и реагентов, но в этом случае дефект массы чрезвычайно мал.

Соотношение между энергией и импульсом

В современной физике очень важную роль играет соотношение между энергией и импульсом. Выведем это соотношение.

Возведем в квадрат выражения для релятивистской энергии и импульса:

$$p^2 = \frac{m_0^2 \upsilon^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 c^2 \beta^2}{1-\beta^2},$$

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2}. \tag{11.15}$$

где для краткости введено обозначение $\beta = \upsilon^2 / c^2$. Сравнивая эти выражения, можно заметить, что

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{p^2}{\beta^2}. \tag{11.16}$$

Выразив из (11.15) β^2 и подставив его в (11.16), получим окончательно:

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4. \tag{11.17}$$

«Безмассовые» частицы

Теория относительности Эйнштейна допускает существование частиц, масса покоя которых равна нулю. Согласно (11.7) скорость таких частиц должна быть равна скорости света.

«Динамическая» масса таких частиц определяется их энергией в соответствии с выражением (11.14).

Соотношение между энергией и импульсом для таких частиц следует непосредственно из выражения (11.17)

$$E = p \cdot c. \tag{11.18}$$

К безмассовым частицам в настоящее время безоговорочно относят *фотон* – квант электромагнитного поля. Кроме того, безмассовой частицей считается гипотетический *гравитон* – квант гравитационного поля. До недавнего времени к таким частицам относили еще и *нейтрино* – нейтральные частицы, участвующие в слабых взаимодействиях, но в последнее время появились сомнения в пользу наличия у них очень маленькой (но все же ненулевой) массы покоя.

Лекция 12

- *Динамика ускоренных систем. Принцип Даламбера.*
- *Вращающаяся система отсчета.*
- *Действие без противодействия: псевдосилы.*
- *Принцип эквивалентности.*
- *Гравитация – геометрия пространства-времени.*

Неинерциальные системы отсчета

Введение

Законы Ньютона справедливы в инерциальных системах отсчета. Как они изменятся в системах движущихся ускоренно? Вопрос этот возникает естественным образом, т.к. мы живем на вращающейся Земле, а равномерное вращение – ускоренное движение. Кроме того, мы нередко оказываемся в ситуациях, когда наша система отсчета – неинерциальна (например, тормозящий или разгоняющийся автомобиль). В связи с этим, чтобы нас не «заносило» куда не надо, рассмотрим особенности описания движения тел в ускоренно движущихся системах.

Силы инерции и принцип Даламбера

Представим себе длинный вагон, вдоль которого «продет» горизонтальный стержень. По стержню может без трения скользить шар с отверстием. Пусть вагон начал движение относительно Земли с постоянным ускорением $\vec{a}_0$ (Землю будем пока считать инерциальной системой отсчета). Рассмотрим, как явления, происходящие в вагоне, описывают наблюдатели, Один из которых находится на перроне, а другой – в вагоне. Систему, связанную с Землей, мы обозначим через XYZ, а систему, связанную с движущимся вагоном, – через $X'Y'Z'$.

Наблюдатель в системе XYZ видит, что на шар никакие силы не действуют, и в соответствии с первым законом Ньютона его скорость не меняется, т.е. несмотря на то, что вагон движется относительно Земли с ускорением $\vec{a}_0$, шар остается на месте.

Наблюдатель в вагоне, т.е. в системе $X'Y'Z'$ отмечает, что, хотя на шар никакие силы и не действуют, однако он имеет ускорение относительно вагона! Значит, в системе $X'Y'Z'$ возникает ускорение, не вызванное силами.

Этот пример показывает, что в ускоренно движущейся системе отсчета нарушается закон инерции.

Итак, законы Ньютона в неинерциальных системах отсчета не выполняются. Однако можно сформулировать правило, позволяющее формально пользоваться вторым законом Ньютона и в неинерциальных системах отсчета. При этом, однако, будет необходимо отказаться от первого и третьего законов Ньютона.

Вернемся к анализу явлений, происходящих в вагоне при его ускоренном движении. В системе $X'Y'Z'$ шар не взаимодействует с другими телами, но все же движется относительно вагона с ускорением $-\vec{a}_0$. То есть шар ведет себя так, как если бы в вагоне на него действовала некая сила

$$\vec{I} = -m \cdot \vec{a}_0, \qquad (12.1)$$

которая и сообщает ему ускорение. Такие силы, проявляющиеся только в неинерциальных системах отсчета, называется *силами инерции*.

Пользуясь этим понятием, можно формально записать основное уравнение динамики в одинаковой для любых (инерциальных и неинерциальных) систем форме:

$$\vec{F} + \vec{I} = m \cdot \vec{a}, \qquad (12.2)$$

где $\vec{F}$ – результирующая сил взаимодействия, а $\vec{I}$ – сумма сил инерции.

Выражение (12.2) есть математическое выражение *принципа Даламбера*, который формулируется так:

Векторная сумма всех сил взаимодействия и сил инерции равна произведению массы тела на его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета.

Равномерно вращающаяся система отсчета.

Очень часто в качестве неинерциальных систем выступают системы, совершающие равномерное (или практически равномерное) вращение вокруг оси, например, карусель, орбитальная станция, Земля.

Центробежная сила

Поставим на горизонтально расположенный диск штатив с подвешенным маятником и приведем диск во вращение вокруг вертикальной оси OO' (рис. 12.1). Маятник, отклонится от вертикали.

Рассмотрим его поведение с точки зрения наблюдателя, находящегося в неподвижной системе координат, связанной с Землей. Так как маятник движется по окружности, то должна существовать центростремительная сила $\vec{F}_ц$, постоянно поворачивающая вектор его скорости к оси вращения, т.е. сообщающая ему центростремительное ускорение (см. (2.6) и (3.7)).

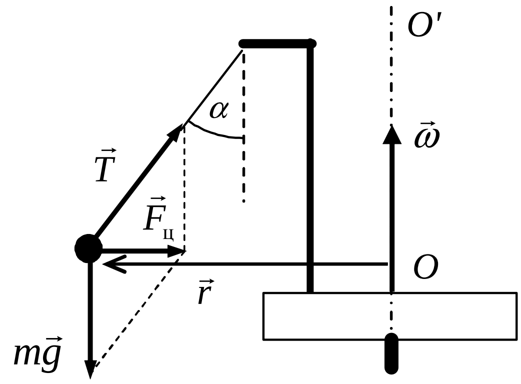


Рис. 12.1.

Как видно из рисунка, этой силой является векторная сумма силы тяжести и натяжения нити:

$$\vec{F}_ц = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_ц = m\frac{\upsilon^2}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -m\omega^2\vec{r}\,, \qquad (12.3)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от оси вращения до тела; ω – угловая скорость вращения диска.

Тангенс угла отклонения маятника равен $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{F}{mg} = \dfrac{\omega^2 r}{g}$, т.е. чем дальше от оси (чем больше r), тем на больший угол отклоняется маятник. Если $r = 0$, то он не отклоняется совсем.

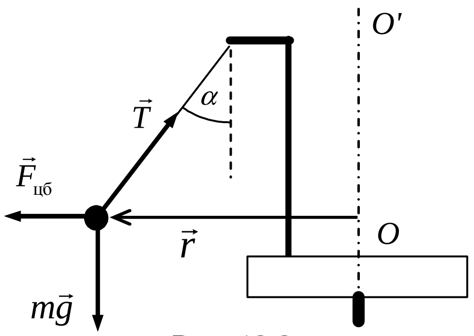


Рис. 12.2.

Рассмотрим поведение того же маятника с точки зрения наблюдателя, находящегося на диске. В этой системе маятник покоится. Чтобы сохранить закон Ньютона, мы должны ввести силу инерции $\vec{F}_{цб}$, удовлетворяющую условию:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{цб} = 0,$$

откуда получим

$$\vec{F}_{цб} = -(\vec{T} + m\vec{g}) = m\,\omega^2\vec{r}\,. \qquad (12.4)$$

Эту силу принято называть *центробежной силой инерции*.

Ни в коем случае нельзя забывать, что силы инерции – это не настоящие силы, а *псевдосилы* (от греч. *pseudos* – ложь), «действующие» только в неинерциальных системах отсчета. Иногда их называют фиктивными силами (от лат. *fictio* – выдумка, вымысел). Настоящие силы, действующие на данное тело, всегда имеют источник в виде другого тела, и возникают парами в виде сил действия и противодействия. У сил инерции нет материального источника, а значит, нет и сил противодействия.

К сожалению, находятся люди, иногда даже считающие себя физиками, дающие такие объяснения: «Спутник не падает на Землю потому, что сила тяжести уравновешивается центробежной силой». Хотя мы-то с вами знаем, что спутник как раз «падает» на Землю с ускорением свободного падения (см. лекцию 5).

С другой стороны, используя анализ ситуации с точки зрения неинерциальной системы, иногда удается описать явление проще. Например, с точки зрения космонавта, находящегося на борту орбитальной станции, все тела, окружающие его, не имеют веса потому, что сила тяжести точно уравновешивается центробежной силой, возникающей из-за вращения вокруг Земли.

$$mg = m\frac{\upsilon^2}{R+h},$$

где R – радиус Земли, h – высота станции над Землей, а υ – скорость станции (и всех тел, находящихся внутри нее) относительно Земли. Так как $h << R$, скорость, с которой вращается станция, практически совпадает с первой космической:

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}8\cdot 6{,}4\cdot 10^6} \approx 7{,}9\cdot 10^3 \text{ м/с}. \qquad (12.5)$$

Казалось бы, – все понятно. Так нет же, как мы увидим чуть позже, Эйнштейну удалось саму силу тяжести свести практически до ранга псевдосилы!

Сила Кориолиса

Если тело перемещается во вращающейся системе координат, то для описания его движения в подвижной системе координат нужно ввести еще одну силу инерции.

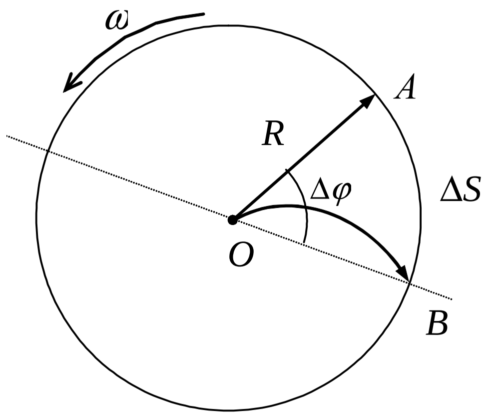


Рис. 12.3.

Пусть у нас имеется вращающийся «ледяной» диск радиусом R, по которому без трения может скользить «шайба». Запустим шайбу из точки O, совпадающей с центром диска, в радиальном направлении со скоростью u (рис. 12.3).

Из-за вращения диска с угловой скоростью ω шайба попадет в точку *B*. Рассмотрим это явление из разных систем отсчета.

В неподвижной системе отсчета, связанной с Землей, шайба движется по прямой вдоль радиуса со скоростью *u*. Диск успевает повернуться на угол $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, и поэтому шайба попадает в точку *B*. Длина дуги *AB* равна

$$\Delta S = R\Delta\varphi = u\Delta t\cdot\omega\Delta t = u\,\omega(\Delta t)^2. \qquad (12.6)$$

Во вращающейся системе шайба движется по криволинейной траектории, так, будто на нее действует сила, перпендикулярная радиусу. Шайба смещается в этом направлении на $\Delta S = AB = \dfrac{a_{\perp R}\Delta t^2}{2}$. Ускорение, сообщенное этой псевдосилой силой, называется *ускорением Кориолиса* и в соответствии с (12.6) равно:

$$a_{\text{кор}} = \frac{2\Delta S}{\Delta t^2} = 2u\omega.$$

Это ускорение перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{u}$, что указывает на возможность выразить ускорение Кориолиса через векторное произведение данных векторов (см. лекцию 3). Действительно, можно показать, что при произвольном направлении скорости $\vec{u}$:

$$\vec{a}_{\text{кор.}} = 2\cdot\vec{u}\times\vec{\omega}. \qquad (12.7)$$

Чтобы тело с массой *m* двигалось с таким ускорением, на него должна действовать сила

$$\vec{F}_{\text{кор.}} = m\vec{a}_{\text{кор.}} = 2m\cdot\vec{u}\times\vec{\omega}, \qquad (12.8)$$

называемая *силой Кориолиса*.

Земля – неинерциальная система отсчета

В силу своего вращения вокруг оси и вокруг Солнца Земля является неинерциальной системой отсчета. К счастью для нас ускорения, вызванные вращением Земли, очень малы, и поэтому в большинстве практических случаев неинерциальностью можно пренебречь. Центростремительное ускорение точки на экваторе 3,4 см/сек^2, что почти в 300 раз меньше ускорения свободного падения. Ускорение же Земли при ее вращении вокруг Солнца примерно равно 0,6 см/сек^2 (т.е. почти в 2000 раз меньше ускорения свободного падения). Поэтому ускорение, связанное с орбитальным движением Земли, учитывается очень редко.

Наиболее просто учесть влияние центробежной силы. Согласно рис. 12.4, суммарная сила, действующая на тело на поверхности Земли $\vec{F}_{\text{т}}$ (сила тяжести), складывается из силы гравитационного притяжения $\vec{F}_{\gamma}$ и центробежной силы $\vec{F}_{\text{цб}}$.

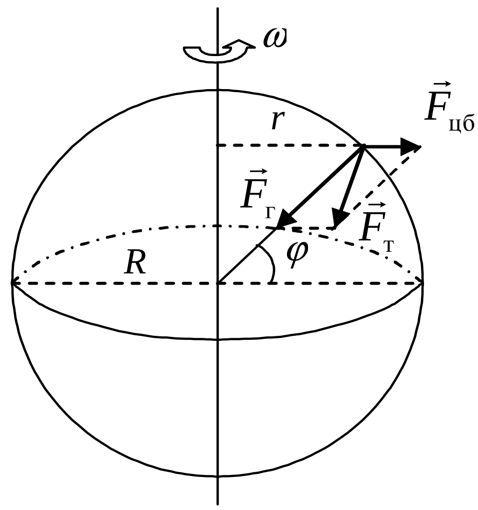


Рис. 12.4.

Центробежная сила приводит к отклонению результирующей силы от направления на центр. Очевидно, что на экваторе $r = R$ и максимально, а на полюсе $r = 0$ (см. формулу (12.4)). Следовательно, ускорение свободного падения на полюсе будет больше, чем на экваторе ($g_{\text{п}} \approx 9{,}83$ м/с^2, $g_{\text{э}} \approx 9{,}78$ м/с^2).

Это приводит к тому, что вес тела на экваторе меньше веса того же тела на полюсе (измеренного с помощью пружинных весов). Собственно этим эффектом практически и исчерпывается действие центробежных сил (см. также лекцию 5).

Гораздо хитрее проявление кориолисовых сил. Они появляются только при движении тела относительно Земли. Проявление силы Кориолиса обычно не очень заметно, так как в обычных условиях скорости $\vec{u}$ невелики, а угловая скорость вращения Земли вокруг оси – также мала (см. формулу (12.8)). Но с силой Кориолиса приходится считаться при вычислении траекторий ракет и спутников, а также при стрельбе из дальнобойных орудий.

Кроме того, малая сила, действующая длительное время, может дать ощутимый эффект. Рассмотрим реку, текущую на юг вдоль меридиана в северном полушарии. Применяя формулу для силы Кориолиса, мы можем найти, что она направлена в сторону правого берега, поэтому он должен подмываться сильнее, чем левый, и стать более крутым. Действительно в ряде случаев это подтверждается. Однако так как условия течения воды в реках очень сложны, то факт подмывания правого берега не следует целиком приписывать действию силы Кориолиса.

Действие кориолисовой силы на потоки воздуха проявляются в распределении ветров, дующих над гладью океанов; но, однако и здесь существует ряд дополнительных причин, определяющих направление ветра.

С силой Кориолиса в ряде случаев связывают больший износ одного из двух железнодорожных рельсов.

В чистом виде сила Кориолиса проявляется в знаменитом опыте Фуко (1851 г.), в котором плоскость колебаний маятника поворачивается в течение суток. Модель опыта легко продемонстрировать, укрепив маятник на вращающемся диске. Если заставить маятник колебаться, а затем начать поворачивать диск, то маятник сохранит свою плоскость колебаний относительно стен, но повернется относительно диска.

Принцип эквивалентности

Как мы уже отмечали, с точки зрения наблюдателя из инерциальной системы отсчета, силы инерции являются фиктивными и вводятся наблюдателем неинерциальной системы отсчета исключительно для того, чтобы, несмотря на неинерциальность своей системы, пользоваться законами Ньютона. С другой стороны, для наблюдателя из неинерциальной системы отсчета эти силы являются вполне реальными, поскольку вызывают ускорение. Считая эти силы внешними силами, можно предсказать результат их физического действия, например, перемещения тел (падение груза с полки при торможении) и т.п.

Эйнштейн обратил внимание на одну особенность сил инерции – каждая из них сообщает телам ускорение, не зависящее от массы. Такой же особенностью обладает и сила тяготения. Эта особенность позволяет подойти к тяготению с иной точки зрения.

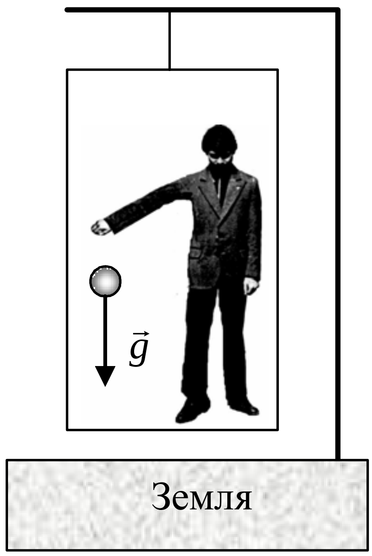


Рис. 12.5.

Представим себе наблюдателя, находящегося в лифте, подвешенном над Землей (рис. 12.5). Он замечает, что все тела, будучи подняты над полом и предоставлены себе, падают с одинаковым ускорением $\vec{g}$. Тела же, достигшие пола, давят на него с силами, пропорциональными $\vec{g}$.

Вообразим, что лифт настолько удален от Земли и прочих небесных тел, что он практи-

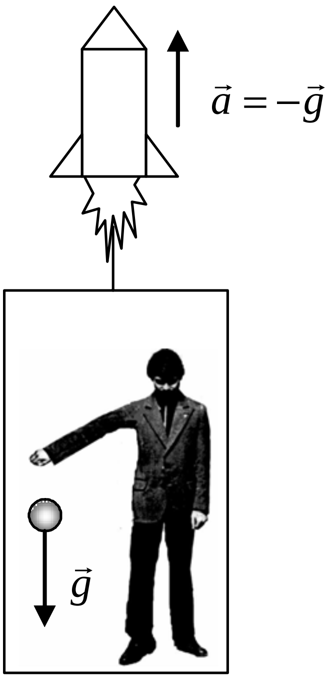


Рис. 12.6.

чески не подвергается с их стороны никаким гравитационным воздействиям.

Пусть кто-то тянет за трос лифта (рис. 12.6), сообщая последнему ускорение $\vec{a} = -\vec{g}$. Гравитационного поля в лифте нет, зато есть сила инерции $-m\vec{a} = m\vec{g}$. Под действием таких сил все тела в лифте, если их ничем не удерживать, начнут падать с прежним ускорением $\vec{g}$. Груз, подвешенный на пружинке, растянет ее, как если бы он обладал весом $m\vec{g}$. Пассажир в лифте будет оказывать на пол такое же давление, как и в предыдущем случае. Короче говоря, все механические явления в лифте будут в точности такими же, что и в неподвижном лифте, висящем в поле тяжести.

Эйнштейн распространил это утверждение не только на механические, но и на любые физические явления.

Итак, *все физические явления в системе координат, движущейся равноускоренно, будут протекать точно так же, как и в неподвижной, находящейся в однородном поле силы тяжести*.

Последнее утверждение носит название *принципа эквивалентности*. Этот принцип может быть сформулирован как эквивалентность *инерционной* и *гравитационной* масс тела. Инерционная масса определяется вторым законом Ньютона и служит мерой инертности тела (см. лекцию 4), а гравитационная (или тяжелая) масса определяется законом всемирного тяготения и служит мерой притяжения массивных тел друг к другу (см. лекцию 5). В принципе эти массы не обязательно должны быть эквивалентными (говоря точнее, пропорциональными), поэтому принцип эквивалентности, по-видимому, является отражением каких-то пока не до конца понятных фундаментальных законов природы.

Понятие об общей теории относительности

Согласно принципу эквивалентности можно выбрать такую систему отсчета, в которой гравитационные силы просто исчезнут. А раз так, то гравитация может быть сведена к геометрическим соотношениям для пространства-времени, т.е. к описанию движения в искривленном пространстве-времени.

Наглядно возможность возникновения сил притяжения из-за отличия геометрии реального мира от эвклидовой можно пояснить на таком простом примере. Предположим, что мы двумерные существа и живем на поверхности сферы, хотя и не знаем об этом, считая нашу «Вселенную» плоской. Проведем в нашем «плоском» мире простой эксперимент: бросим из одной точки два тела под некоторым углом друг к другу (рис. 12.7). Мы склонны ожидать, что расстояние между телами со временем будет непрерывно увеличиваться. Но, на самом деле, тела двигаются по окружностям больших кругов сферы. Это означает, что в какой-то момент времени расстояние S между телами начнет уменьшаться. Нам, жителям двумерной «Вселенной», ничего не знающим о кривизне своего «мира» для объяснения такого поведения тел придется считать, что между телами существует взаимное притяжение.

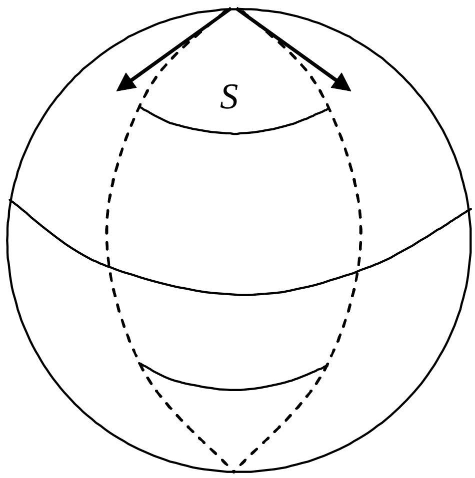


Рис. 12.7.

Подобные рассуждения позволили Эйнштейну построить геометрическую модель гравитации. Суть этой модели вкратце такова. Все объекты во Вселенной движутся по *геодезическим линиям*, представляющим собой кратчайшие траектории между точками пространства. В искривленном пространстве кратчайший путь между точками – не прямая линия. Степень кривизны пространства в данной точке определяется *тензором энергии-импульса* (грубо говоря, распределением масс) и задается *фундаментальным метрическим тензором*. Таким образом, тела движутся в искривленном большими массами пространстве, что нами воспринимается как ускоренное движение.

Созданная Эйнштейном теория гравитации, учитывающая релятивистские свойства пространства-времени и его кривизну, получила название *общей теории относительности* (ОТО). Из-за сложности математического аппарата теории ее обычно не включают в курсы общей физики, а рассматривают лишь в специализированных университетских курсах. Мы отметим лишь основные следствия общей теории относительности.

В случае относительно малых масс уравнения теории переходят в закон всемирного тяготения Ньютона. В случае сильных гравитационных полей наблюдаются отклонения от классического закона.

Во-первых, орбиты планет оказываются незамкнутыми, что проявляется в небольшом повороте плоскости орбит. Наиболее заметно этот эффект проявляется у ближайшего к Солнцу Меркурия.

Во-вторых, при прохождении вблизи массивных тел световые лучи должны искривляться. Такое явление действительно наблюдается во время полных солнечных затмений.

В-третьих, течение времени в сильном гравитационном поле замедляется. Это явление наблюдается по зависимости частоты γ-излучения от величины гравитационного поля (*эффект Мёссбауэра*).

Одним из важнейших следствий этой теории является предсказание *Большого Взрыва* – момента рождения нашей Вселенной. Тот факт, что наш мир родился из сверхплотного сгустка примерно 15 миллиардов лет назад, подтверждается экспериментальным наблюдением разбегания галактик.

Одной из экзотических гипотез, являющейся следствием общей теории относительности и косвенно подтверждаемой астрономическими наблюдениями, считается существование *черных дыр* – астрономических объектов, обладающих настолько большим гравитационным полем, что они не выпускают со своих поверхностей даже свет.

В заключении подчеркнем еще раз, что выбор той или иной системы отсчета при решении конкретной механической задачи является вопросом удобства и простоты математического исследования задачи. В подобном выборе не следует искать каких-либо принципиальных, а тем более – методологических проблем; их просто не существует. Но нужно ясно понимать, что законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета, для каковых они были в свое время сформулированы.

Лекция 13

- *Описание течения сплошной среды.*
- *Гидростатика.*
- *Гидродинамика.*
- *Почему летают самолеты?*
- *Методы измерения вязкости.*

Элементы механики жидкостей и газов

Введение

Раздел механики, в котором изучается движение жидкости, называется *гидродинамикой* (от греч. *hý́dōr* – вода), а движение газа – *аэродинамикой* (от греч. *aēr* – воздух).

В большинстве случаев движение жидкости или газа описывается одними и теми же уравнениями. Поэтому, часто, говоря о течении жидкости, мы будем иметь в виду, что те же выводы применимы и к газу при соответствующих условиях, определяемых разницей количественных характеристик свойств жидкостей и газов. Например, плотность жидкости мало зависит от давления, плотность же газов от давления зависит сильно. Однако при решении многих задач (в частности, при описании течения в трубе со скоростью много меньшей скорости звука) сжимаемостью жидкости и газа можно пренебречь и пользоваться понятием *несжимаемой жидкости*.

Основной особенностью описания движение жидкостей или газов заключается в том, что изучаемые вещества рассматриваются как сплошные, т.е. *непрерывно* распределенные в занятой ими части пространства и, самое главное, что различные части жидкости или газа могут двигаться с *разными* скоростями – это и есть *течение*.

Конечно, мы понимаем, что все тела, в том числе жидкие и газообразные, состоят из молекул и, для того чтобы описать движение всего тела, можно просто выяснить характер движения каждой его молекулы. Нетрудно, однако, понять, что это бесперспективный подход. В одном кубическом сантиметре газа при нормальных условиях содержится примерно $3{\cdot}10^{19}$ молекул (в жидкости примерно в тысячу раз больше – кстати, почему?). Едва ли кому-то придет в голову решать систему уравнений Ньютона для такого огромного числа частиц (кроме того, мы выясним позднее, что механика Ньютона не вполне справедлива для таких мелких тел, которыми являются атомы и молекулы).

Для описания сплошных сред обычно используют *полевые* представления (см. последний раздел лекции 6). Определить некоторое поле – значит задать непрерывно меняющуюся от точки к точке характеризующую его величину. Для описания течения жидкости используются следующие поля.

Распределение массы жидкости задается *полем плотности*. Плотность жидкости в данной точке определяется как предельный переход: $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$, т.е. отношение массы бесконечно малого объема жидкости вблизи выбранной точки к величине этого объема. Часто, в качестве первого приближения, жидкость считают несжимаемой, т.е. ее плотность – постоянна.

Известно, что жидкости (и газы) оказывают давление на стенки сосуда и на погруженные в них тела (вы легко можете проверить это на себе, нырнув глубоко под воду). Силу, с которой жидкость давит на поверхность тела в данной точке, характеризуют величиной поверхностной плотности силы, называемой *давлением*, и определяют как предел отношения нормальной силы, действующей на элемент поверхности, к его площади, если эта площадь стремится к нулю (рис. 13.1):

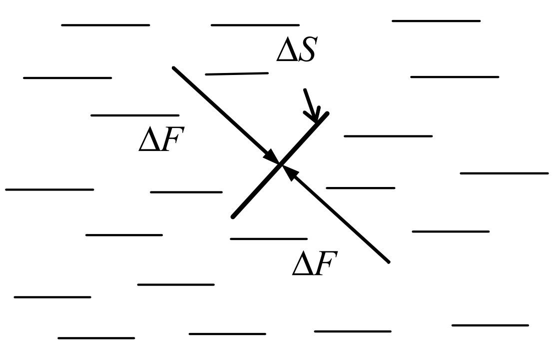


Рис. 13.1.

$$P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}. \qquad (13.1)$$

Единица давления – *паскаль* (Па). Один паскаль равен давлению, создаваемому силой в 1Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности и площадью 1м^2. (1 Па = 1 Н/м^2). Давление внутри жидкости в общем случае меняется от точки к точке и характеризуется *полем давления*.

В текущей жидкости каждая точка движется с некоторой скоростью. Правильнее, конечно, говорить о малом объеме жидкости, а не о точке. Причем этот объем должен быть настолько малым, что с практической точки зрения его можно считать бесконечно малым. Но в то же время он должен содержать миллионы хаотически движущихся молекул, средняя скорость центра масс которых и есть скорость течения жидкости в данной точке. Так задается *поле скоростей* в жидкости, которое в отличие от скалярных полей плотности или давления является векторным, т.е. характеризуется тремя числами (проекциями скорости) в каждой точке.

Гидростатика

Прежде всего, рассмотрим случай неподвижной жидкости, например, налитой в сосуд. В этом случае все точки жидкости (относительно понятия точки см. предыдущий абзац) – неподвижны. Поместим в покоящуюся жидкость пластинку (рис. 13.1). Жидкость, находящаяся по разные стороны от нее, будет действовать на каждую сторону с силами, которые независимо от того, как пластина будет ориентирована, равны по величине и направлены перпендикулярно к пластинке. Иначе пластинка вместе с частицами жидкости пришла бы в движение. Отсюда следует, что: *давление в любой точке покоящейся жидкости одинаково передается по всем направлениям.* Последнее утверждение называется *законом Паскаля* (Блез Паскаль (1623-1662), французский религиозный философ, писатель, математик и физик).

Гидростатическое давление.

Для того чтобы найти распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости, рассмотрим равновесие произвольного малого элемента внутри жидкости. Выберем элемент жидкости в виде небольшого параллелепипеда со сторонами Δx, Δy и Δz (рис. 13.2).

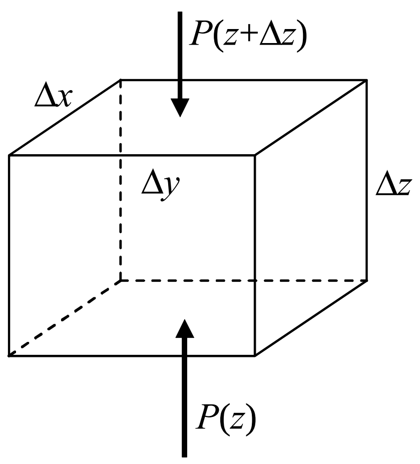


Рис. 13.2.

На него действуют силы давления. Определим результат их действия. Для простоты рассмотрим только одну составляющую силы, направленную вдоль оси z. Эта составляющая равна разности двух сил давления, приложенных к верхней и нижней поверхностям параллелепипеда (ось z направлена вверх):

$$F_z = \left(P(z) - P(z+\Delta z)\right) \cdot \Delta x \Delta y. \qquad (13.2)$$

Согласно правилам математики (надеемся, уже известным вам), значения функции в двух близких точках связаны соотношением:

$$P(z+\Delta z)=P(z)+\frac{\partial P}{\partial z}\Delta z\,. \tag{13.3}$$

Подставив (13.3) в (13.2), получим $F_z=-\frac{\partial P}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$. С учетом всех трех проекций имеем:

$$\vec{F}=\vec{i}F_x+\vec{j}F_y+\vec{k}F_z=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial P}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial P}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial P}{\partial z}\right)\Delta V=-\Delta V\cdot\mathrm{grad}\,P\,, \tag{13.4}$$

где $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$ – объем выбранного элемента. Равновесие элемента достигается, если силы давления уравновешиваются внешними силами (сумма сил давления и внешних сил равна нулю). В нашем случае в качестве внешней силы выступает сила тяжести $\vec{F}_g=\Delta m\cdot\vec{g}=\rho\Delta V\cdot\vec{g}$. Согласно формулам (6.14) и (6.12), $\vec{F}_g=-\mathrm{grad}\,\Pi_g=-\mathrm{grad}\,\Delta mgz$. Таким образом условие равновесия приобретает вид: $-\Delta V\mathrm{grad}\,P-\mathrm{grad}\,\Delta mgz=0$. Или в силу постоянства объема (жидкость несжимаема): $-\mathrm{grad}\,\Delta VP-\mathrm{grad}\,\Delta mgz=0$. Откуда: $P=-\dfrac{\Delta m}{\Delta V}gz=-\rho gz$. Так как начало оси z совпадает с поверхностью жидкости, и ось z направлена вверх

$$P=\rho gh\,, \tag{13.5}$$

где $h=-z$ – глубина, на которой измеряется давление. Таким образом, давление внутри покоящейся жидкости меняется линейно с глубиной. Его называют *гидростатическим давлением.*

Закон Архимеда.

Так как гидростатическое давление растет с глубиной, то на нижние части тела будет действовать большая сила, чем на его верхние части. Это означает, что на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила. Величина этой силы может быть легко получена из формул (13.4) и (13.5):

$$\vec{F}_A=-\Delta V\cdot\mathrm{grad}\,P=\vec{k}\,\rho g\Delta V=-\rho\;\Delta V\;\vec{g}\,. \tag{13.6}$$

На тело, погруженное в жидкость (или газ)*, действует со стороны этой жидкости выталкивающая сила* (направленная против силы тяжести)*, равная весу жидкости в объеме погруженной части тела.*

Этот закон впервые открыт древнегреческим ученым Архимедом из Сиракуз (ок. 287-212 до н.э.) и называется его именем. Сила Архимеда приложена к центру тяжести тела.

Гидродинамика

В жидкости отсутствуют силы, стремящиеся удержать ее частицы в фиксированном положении (упругость), поэтому нарушение равновесия сил немедленно приводит к возникновению течения. Характер течения зависит от распределения внешних и внутренних сил давления (механических напряжений) и свойств жидкости (ее плотности, вязкости). Кстати, раздел гидродинамики, специализирующийся на изучении характера течения жидкостей под действием внешних механических напряжений называется *реологией* (от греч. *rheos* – течение, поток и *logos* –учение, слово).

Уравнения Навье-Стокса

Для записи уравнения движения жидкости можно воспользоваться вторым законом Ньютона для выделенного небольшого объема жидкости ΔV. Для несжимаемой жидкости:

$$\rho \Delta V \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\Delta V \cdot \mathrm{grad}\, P + \vec{F}_{\text{внеш.}} + \vec{F}_{\text{вязк.}}, \tag{13.7}$$

где $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ – сумма внешних сил, а $\vec{F}_{\text{вязк.}}$ – сумма сил внутреннего трения (вязкости, см. лекцию 5), действующих на выбранный элемент жидкости. Первое слагаемое в правой части уравнения (см. 13.4) определяет действующие на элемент жидкости силы давления.

Следует отметить, что скорость элемента жидкости является не только функцией времени, но и координат, т.е. через некоторый промежуток времени не все точки выбранного элемента изменят свою скорость на одинаковую величину (в результате чего он может деформироваться). Поэтому производную в левой части выражения нужно вычислять, имея ввиду полную производную функции по времени:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x}\upsilon_x + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial y}\upsilon_y + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial z}\upsilon_z .$$

Разделив обе части уравнения (13.7) на объем элемента жидкости, получим следующее уравнение движения в частных производных:

$$\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x}\upsilon_x-\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial y}\upsilon_y-\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial z}\upsilon_z-\operatorname{grad}P+\vec{f}_{\text{внеш.}}+\vec{f}_{\text{вязк.}},\qquad(13.8)$$

где $\vec{f}_{\text{внеш.}}=\vec{F}_{\text{внеш.}}/\Delta V$ – объемная плотность внешних сил, а $\vec{f}_{\text{вязк.}}=\vec{F}_{\text{вязк.}}/\Delta V$ – объемная плотность вязких сил. Уравнения (13.8) (помните, что одно векторное уравнение эквивалентно системе трех скалярных), описывающие движение жидкости под действием внешних и внутренних сил, называют *уравнениями Навье-Стокса* (Джордж Габриель Стокс (1819-1903) – английский физик и математик; Анри Навье (1785-1836) – французский инженер).

В уравнениях Навье-Стокса, в принципе, содержится вся физика течения жидкостей и газов. Однако решение этих уравнений в силу их *нелинейности* (посмотрите внимательно на структуру слагаемых правой части (13.8)) чрезвычайно сложная задача. Аналитически она может быть решена лишь для некоторых очень простых частных случаев. Поэтому на практике уравнения Навье-Стокса непосредственно почти не используются. Правда, в результате бурного развития численных методов и вычислительной техники, последнее время исследователи все чаще предпринимают попытки их численного решения.

Уравнение неразрывности

Решением уравнений Навье-Стокса являются распределения скоростей и давлений внутри жидкости. Очевидно, что система (13.8) – неполная, так, как в ней всего три уравнения, но четыре неизвестных функции: υ_x, υ_y, υ_z и P. Ее дополняют *уравнением неразрывности*:

$$\frac{\partial(\rho\cdot\upsilon_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\cdot\upsilon_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\cdot\upsilon_z)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\text{или}\quad\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=0,\quad\text{если }\rho=\text{const}.\qquad(13.9)$$

В дифференциальной форме мы привели его, к сожалению, без вывода, но ниже получим уравнением неразрывности в интегральной форме.

Наглядно движение жидкости можно изобразить с помощью *линий тока*, которые проводятся так, чтобы касательные к ним совпадали по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках

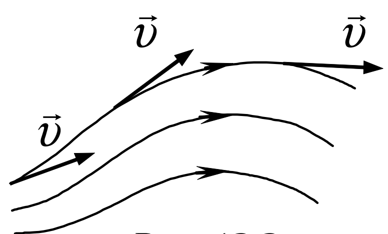


Рис. 13.3.

пространства. Густота линий была больше там, где выше скорость. Таким образом, по картине линий тока можно определить состояние движения жидкости (рис.13.3). Течение жидкости называется *стационарным* или *устоявшимся*, если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой точке со временем не изменяются. Линии тока можно проявить, подкрашивая текущую жидкость чернилами.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют *трубкой тока*. Основным свойством трубки тока (в силу ее определения) является то, что любая произвольная точка движущейся жидкости, выбранная где-нибудь внутри данной трубки, никогда ее не покидает.

Рассмотрим одну из трубок тока. Выберем два ее сечения S_1 и S_2. За время dt через сечение S_1 проходит жидкость массой $\rho_1\upsilon_1S_1dt$; а через сечение S_2 – $\rho_2\upsilon_2S_2dt$. Так как жидкость не может покинуть выбранной трубки и внутри трубки течет *непрерывно* (т.е. нигде не накапливается и не исчезает), через оба сечения за одинаковое время пройдет одна и та же масса жидкости, т.е. $\rho_1\upsilon_1S_1dt = \rho_2\upsilon_2S_2dt,$ или $\rho_1\upsilon_1S_1dt = \rho_2\upsilon_2S_2$.

Следовательно, произведение плотности жидкости, скорости ее течения и поперечного сечения трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

$$\rho\cdot\upsilon\cdot S = const. \qquad (13.10).$$

Это соотношение называется *уравнением неразрывности*. Величина $m=\rho\cdot\upsilon\cdot S$ называется *массовым расходом* жидкости (массовым *потоком*) (кг/с – масса, протекающая через сечение в единицу времени).

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и, следовательно, уравнение неразрывности принимает вид:

$$\upsilon\cdot S = const. \qquad (13.10а).$$

Величина $Q = \upsilon\cdot S$ называется *объемным расходом* (*потоком*) (или просто расходом) жидкости (м^3/с – объем жидкости, протекающий через сечение в единицу времени). Таким образом, при непрерывном течении жидкости ее расход в любом сечении трубы является постоянной величиной.

Течение невязкой жидкости. Уравнение Бернулли

Выделим в стационарно текущей *идеальной жидкости* (жидкости без вязкости), достаточно тонкую трубку тока, так что всем точкам любого ее сечения можно было бы приписать одно и то же значение координаты, скорости и давления. Выберем в ней два произвольных сечения S_1 и S_2 (рис. 13.4). Пусть в сечении S_1 скорость υ_1, давление P_1 и высота, на котором расположено сечение, h_1. Аналогично в сечении S_2 скорость υ_2, давление P_2, высота h_2. По истечении малого промежутка времени жидкость переместится от сечения S_1 к S_1', а от S_2 – к S_2'. Согласно закону сохранения энергии изменение полной энергии должно быть равно работе внешних сил (жидкость в трубке как бы скатится с горки, но на нее еще действуют внешние силы давления).

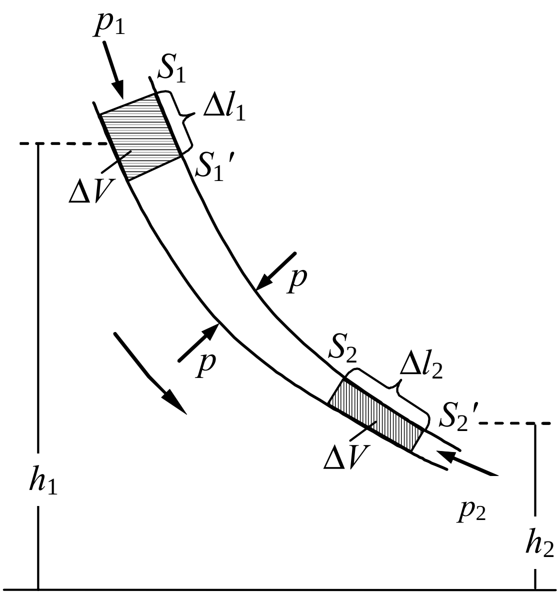


Рис. 13.4

Полная механическая энергия каждого малого объема жидкости («частицы») складывается из его кинетической энергии и потенциальной энергии в поле силы тяжести. Вследствие стационарности течения частицы, находящиеся спустя время t в незаштрихованной части, имеют такую же скорость, как и те частицы, что были там раньше. Поэтому приращение энергии объема жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 при его перемещении в положение, ограниченное сечениями S_1' и S_2' можно вычислить просто как разность энергий заштрихованных объемов:

$$\Delta E = \left(\frac{\Delta m_2 \upsilon_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2\right) - \left(\frac{\Delta m_1 \upsilon_1^2}{2} + \Delta m_1 g h_1\right),$$

где $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1$ и $\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2$ – массы соответствующих объемов. Далее будем считать, что жидкость несжимаема, т.е. $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ и $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. Тогда

$$\Delta E = \left[\left(\frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2\right) - \left(\frac{\rho \upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1\right)\right]\Delta V. \qquad (13.11)$$

В идеальной жидкости трение отсутствует. Приращение энергии должно равняться работе внешних сил давления. Силы давления на боковую поверхность перпендикулярны и работы не совершают. В сечениях же S_1 и S_2 совершается работа

$$A = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2 = (P_1 - P_2)\cdot\Delta V. \qquad (13.12)$$

Приравнивая (13.11) и (13.12), сокращая на ΔV и перенося члены с одинаковыми индексами в одну часть, получим:

$$\frac{\rho v_2^2}{2}+\rho g h_2+P_2=\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho g h_1+P_1.$$

Т.к. сечения S_1 и S_2 были взяты совершенно произвольно, то для любого сечения можно записать

$$\frac{\rho v^2}{2}+\rho g h+P=\mathrm{const}. \qquad (13.13)$$

Это выражение называется *уравнением Бернулли* (Даниил Бернулли (1700-1782) – швейцарский физиолог, математик, механик). Уравнение Бернулли есть приложение закона сохранения энергии к стационарному движению идеальной жидкости.

Для горизонтальной трубки уравнение Бернулли приобретает вид $\frac{\rho v^2}{2}+P=P_0=const$. Величину P_0 называют *полным давлением*.

Величина $\rho g h$ представляет собой, как было показано выше, гидростатическое давление; величина P называется *статическим давлением*, а величина $\frac{\rho v^2}{2}$ – *динамическим давлением* или *скоростным напором*.

Водоструйный насос.

Как следует из уравнения (13.13), давление оказывается меньшим в тех точках, где скорость течения – больше, и наоборот. На этом явлении основана работа водоструйного насоса (рис 13.5). Струя воды подается в трубку, открывающуюся в атмосферу. В трубке имеется сужение, в которое вода поступает с большой скоростью. Давление в узком месте оказывается меньше, чем атмосферное. Такое же давление устанавливается в камере, охватывающей трубку. Подсоединяя к камере откачиваемый объем, можно создать разрежение с давлением около 100 мм. рт. ст., т.е. примерно в 8 раз ниже атмосферного.

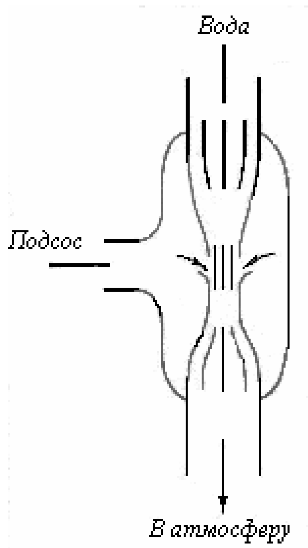


Рис. 13.5.

Измерение скорости потока.

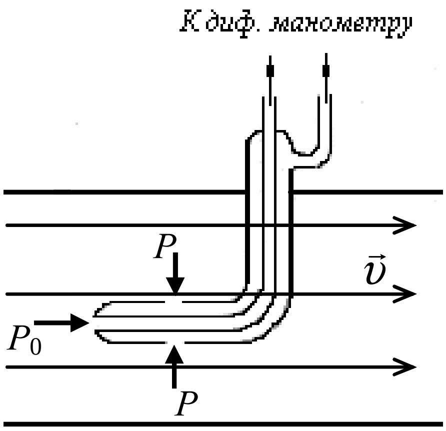


Рис. 13.6.

Т.к. в выражение для динамического давления входит скорость, то это обстоятельство позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяют трубку Пито-Прандтля. Она представляет собой цилиндрическую трубку с полусферическим носиком (рис. 13.6), ось которой устанавливается вдоль потока. Через центральное отверстие на полусфере измеряется полное давление P_0. Другое отверстие (или ряд отверстий) располагается на боковой поверхности трубки на расстоянии нескольких диаметров трубки от носика и от державки и служит для измерения статического давления P. Дифференциальным манометром измеряется разность давлений $P_0 - P$, которая равна динамическому давлению $\frac{\rho v^2}{2}$. В результате скорость жидкости $v = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}}$.

Формула Торричелли.

Уравнение Бернулли позволяет вычислить скорость истечения жидкости из небольшого отверстия в стенке сосуда. Рассмотрим сосуд, в боковой стенке которого имеется отверстие. Выберем два сечения S_1 и S_2: одно на уровне свободной поверхности, другое на уровне отверстия (рис.13.7). Напишем для них уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2.$$

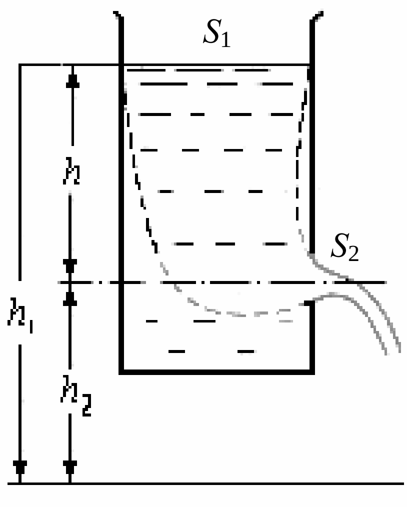


Рис. 13.7.

Т.к. давления P_1 и P_2 равны атмосферному давлению, уравнение примет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Будем считать, что сечение сосуда существенно превышает сечение отверстия $S_1 >> S_2$. Из уравнения неразрывности (13.10а) следует, что $\upsilon_1 = \upsilon_2 \dfrac{S_2}{S_1}$, поэтому членом $\rho\upsilon_1^2/2$ можно пренебречь. Тогда $\rho\upsilon_2^2/2 = \rho g(h_1 - h_2)$ или

$$\upsilon = \sqrt{2gh}\,. \qquad (13.14)$$

Это выражение получило название *формулы Торричелли* (Эванджелиста Торричелли (1608-1647) – итальянский физик и математик).

Течение вязких жидкостей

В лекции 5 мы уже отмечали, что вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила, а на слой, движущийся быстрее, – тормозящая сила. Сила внутреннего трения тем больше, чем больше рассматриваемая поверхность и зависит от того, насколько быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою. Она определяется формулой Ньютона (см. также выражение (5.5))

$$F = \eta \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} S$$

(см. рис. 13.8), где η – динамическая вязкость или просто вязкость.

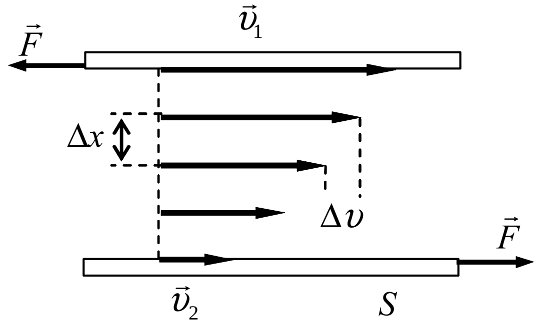


Рис. 13.8.

Единица вязкости – паскаль-секунда (Па·с). Это такая вязкость, при которой при ламинарном течении и градиенте скорости 1м/с на 1 м возникает сила трения 1 Н.

Вязкость зависит от температуры. Петр Леонидович Капица (1894-1984) открыл, что при температуре 2,17 К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, и его вязкость становится равной нулю.

Число Рейнольдса

Английский ученый Осборн Рейнольдс (1842-1912) показал, что при наличии сил вязкого трения форма общего решения уравнения

(13.8) зависит от одного безразмерного параметра, называемого теперь *числом Рейнольдса*.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon l}{\eta}, \qquad (13.15)$$

где l – характерный линейный размер (например, диаметр трубы, диаметр шарика и т.п.), а υ – характерная скорость (например, средняя или максимальная скорость потока), принимаемые в данной задаче за единицы масштаба.

Оказалось, что, если для двух разных гидродинамических систем, числа Рейнольдса одинаковы, то при подходящем выборе масштабов, течения будут выглядеть одинаково. В этом случае принято говорить о подобии течений, а число Рейнольдса называть гидродинамическим *критерием подобия*. Например, структура течения воды ($\eta_в$=10^{-3} Па·с, $\rho_в$=10^3 кг/м^3) в трубке диаметром 1 см со средней скоростью 1 м/с будет такой же, как структура течения глицерина ($\eta_г$=3,5·10^{-1} Па·с, $\rho_г$=1,2·10^3 кг/м^3) в той же трубке, но со средней скоростью около 292 м/с.

Наличие вязкого трения приводит к возникновению механических напряжений между слоями жидкости, проявляющихся при определенных условиях в образовании вихрей. Принято выделять два предельных типа течения вязких жидкостей.

Течение называется *ламинарным* или *слоистым* (лат. *lamina* – пластина, слой), если каждый выделенный слой скользит относительно соседних слоев и не перемешивается с ними.

Турбулентным или вихревым (лат. *turbo* – вихрь и лат. *turbulentus* – бурный, беспорядочный) называется течение, при котором происходит интенсивное перемешивание слоев жидкости.

При ламинарном течении сопротивление движению определяется вязкими силами, которые можно считать пропорциональными скорости и характерному размеру тела (см. например формулу (5.6):

$$F_{вязк} = A\eta l\upsilon,$$

где A – константа, зависящая от формы тела. При турбулентном движении сопротивление обусловлено скоростным напором:

$$F_{турб} = C\frac{\rho\upsilon^2}{2}S,$$

где S – площадь поперечного сечения тела, а C – так называемый коэффициент аэродинамического сопротивления. По отношению этих сил можно, в принципе, судить о характере течения. Действительно, если $F_{вязк} >> F_{турб}$, то течение ламинарное, а, если наоборот, – турбулентное.

Найдем отношение турбулентной силы сопротивления к вязкой, учитывая, что поперечное сечение пропорционально квадрату линейных размеров тела ($S = \alpha l^2$):

$$\frac{F_{турб}}{F_{вязк}} = \frac{C\rho\upsilon^2\alpha l^2}{2A\eta l\upsilon} = \frac{C\alpha}{2A}\frac{\rho\upsilon l}{\eta} = \frac{C\alpha}{2A}\cdot\mathrm{Re}$$

Таким образом, число Рейнольдса с физической точки зрения характеризует отношение гидродинамических и вязких сил. Следовательно, малому числу Рейнольдса будет соответствовать ламинарный поток, а большому – турбулентный. Например, экспериментально установлено, что в гладкой трубе поток будет ламинарным, если $Re < 1000$. В случае, когда $Re > 1500$, поток турбулентный. При промежуточных числах 1000÷1500 течение нестабильно.

В случае сферического тела, движущегося в жидкости, ламинарное обтекание установится только, когда $Re < 5$.

Движение тел в жидкостях и газах

Если на вопрос: «Почему летают самолеты?» – кто-то ответит, что по воздуху, то он, по сути, будет прав: именно воздух не дает самолету падать.

Силу, действующую на движущееся тело в жидкости или газе, можно разложить на две составляющие (рис. 13.9). Одна из них, сила сопротивления R_x, противоположна движению, а вторая, R_y, называемая подъемной, – перпендикулярна движению. Подъемная сила возникает из-за разности давлений в потоках, обтекающих тело сверху и снизу. Согласно формуле Бернулли, чем больше скорость потока, тем меньше давление в нем. Понятно, что если тело симметрично относительно направления «верх-низ», то на него действует только сила лобового сопротивления R_x. В идеальной жидкости (в жидкости без вязкости) лобовое сопротивление отсутствует.

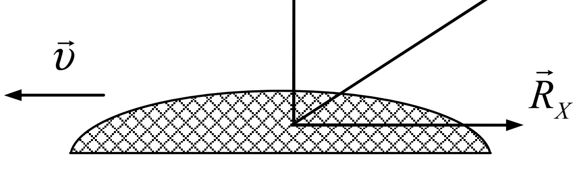


Рис. 13.9.

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости. Если скорость тела меньше скорости звука, но имеет значение, при котором обтекание тела встречным потоком имеет турбулентный характер, то подъемная сила и лобовое сопротивление тел выражаются следующими экспериментально полученными зависимостями:

$$R_y = C_y \cdot S\,\frac{\rho v^2}{2} \text{ и } R_x = C_x \cdot S\,\frac{\rho v^2}{2},$$

где C_y и C_x – безразмерные коэффициенты, зависящие от числа Рейнольдса и формы тела.

Методы определения вязкости

Метод Стокса.

Этот метод основан на измерении скорости падения шарика из материала плотностью $\rho_т$ в вязкой жидкости плотностью $\rho_ж$. Движение должно быть таким, чтобы не было превзойдено число Рейнольдса (т.е. ламинарным).

На шарик в жидкости действуют три силы (рис. 13.10): сила тяжести $m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_т \vec{g}$, сила Архимеда $\vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж \vec{g}$ (см. (13.6)), и сила вязкого трения (стоксова сила) $\vec{F}_C = -6\pi\eta r\vec{v}$ (см. (5.6)). Сначала сила тяжести превышает сумму сил Архимеда и Стокса, и шарик начинает тонуть. Однако сила вязкого трения зависит от скорости, и, т.к. скорость шарика увеличивается, через некоторое время устанавливается равновесие сил, после чего скорость больше не изменяется (эту скорость можно измерить):

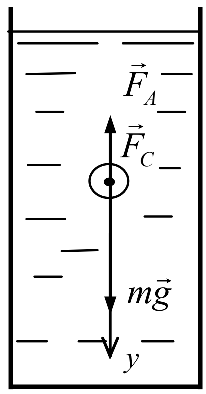


Рис. 13.10.

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_C = 0$$

Спроецировав последнее уравнение на ось y и, подставив выражения для всех сил, получим: $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_т g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж \cdot g - 6\pi\eta r v = 0$. Откуда найдем вязкость:

$$\eta = \frac{2(\rho_т - \rho_ж) g r^2}{9v}. \qquad (13.16)$$

Метод Пуазейля

В этом методе вязкость определяется по количеству жидкости прошедшей через капилляр.

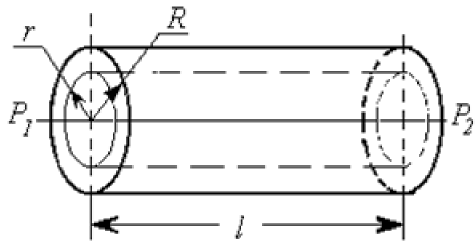


Рис. 13.11

Рассмотрим капилляр радиусом R и длиной l (рис. 13.11). В капилляре выделим цилиндр радиусом r. На этот цилиндр со стороны внешних слоев жидкости действует препятствующая движению сила

$$F = -\eta\,\frac{d\upsilon}{dr}S = -\,\eta\,\frac{d\upsilon}{dr}2\pi rl,$$

где S – боковая поверхность выделенного цилиндра радиуса r. Эта сила сопротивления уравновешивается силой, возникающей из-за разности давлений $\Delta P = P_1 - P_2$ на концах выделенного цилиндра:

$-\eta\,\dfrac{d\upsilon}{dr}2\pi rl = \Delta P\pi r^2$. Откуда получим: $d\upsilon = -\dfrac{\Delta P}{2\eta l}rdr$.

Возьмем интеграл от обеих частей и, учтя, что скорость у стенок равна нулю, найдем, что $\int\limits_{\upsilon}^{0} d\upsilon = -\dfrac{\Delta P}{2\eta l}\int\limits_{0}^{R} rdr$. Или $v = \dfrac{\Delta p(R^2 - r^2)}{4\eta l}$.

Для нахождения объема жидкости, протекающей за время t, выделим в жидкости цилиндрический слой радиуса r и толщиной dr (рис. 13.12). Будем считать, что скорость в этом слое постоянна и равна υ. Через этот слой за время t пройдет объем жидкости, равный $dV = 2\pi\upsilon t r dr$.

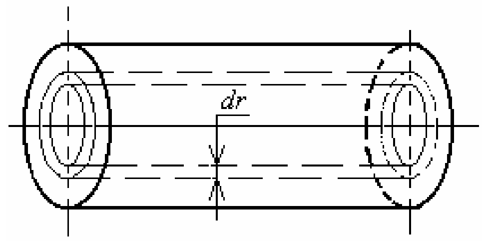


Рис. 13.12.

Проинтегрировав это выражение, получим

$V = \int\limits_0^R 2\pi r\upsilon t\cdot dr = \dfrac{2\pi\Delta pt}{4\eta l}\int\limits_0^R r(R^2 - r^2)dr = \dfrac{\pi\cdot\Delta p\cdot R^4 t}{8\eta l}$. Откуда для вязкости нетрудно получить выражение:

$$\eta = \frac{\pi\cdot\Delta p\cdot R^4\cdot t}{8Vl}. \qquad (13.17)$$

Как видно из выражения (13.17) расход жидкости (или газа) ($Q = V/t$) при одинаковой разности давлений пропорционален четвертой степени радиуса капилляра. Чтобы почувствовать это, попробуйте дышать через трубку диаметром 1 см (длиной около 20 см), а затем – через соломинку для коктейля диаметром 2 мм.

Приложения

1. Основные единицы системы СИ

Метр (м) – единица длины. **Эталон:** расстояние, проходимое светом в вакууме за время, равное $1/c$ (c – скорость света в вакууме). Приближенно можно считать, что 1 м – 1/10 000 000 часть расстояния от полюса до экватора вдоль меридиана.

Секунда (с) – единица времени. **Эталон:** 9 192 631 770 периодов колебаний излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровня основного состояния атома цезия-133. Приближенно можно считать, что 1 с составляет $1/(24\cdot60\cdot60) = 1/86\,400$ средних суток.

Килограмм (кг) – единица массы. **Эталон:** международный прототип килограмма. Приближенно можно считать, что 1 кг – масса 1 дм^3 чистой воды при нормальных условиях.

Ампер (А) – единица силы тока. **Эталон:** 1 А равен силе постоянного тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке проводника длиной в 1 м силу взаимодействия, равную $2\cdot10^{-7}$ Н.

Кельвин (К) – единица термодинамической температуры. **Эталон:** 1 К равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды. Приближенно можно считать, что 1 К – 1/100 температурного интервала между точками плавления льда и кипения воды при нормальных условиях.

Моль (моль) – единица количества вещества. **Эталон:** количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в изотопе углерода ^{12}C массой 0,012 кг.

Кандела (кд) – единица силы света. **Эталон:** сила света, испускаемого с поверхности площадью 1/600 000 м^2 полного излучателя в перпендикулярном направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при атмосферном давлении. Приближенно можно считать, что 1 кд – сила света обычной стеариновой свечи (от лат. *candela* — свеча).

Дополнительные единицы

Радиан (рад) – единица плоского угла. 1 рад – центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

Стерадиан (ср.) – единица телесного угла. 1 ср. – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на ее поверхности сегмент, площадь которого равна квадрату радиуса сферы.

2. Десятичные приставки

Пета (П) ……………...10^{15}
Тера (Т) ………………10^{12}
Гига (Г) ………………10^{9}
Мега (М) ……………..10^{6}
Кило (к) ………………10^{3}
Гекто (г) ……………...10^{2}
Дека (да) ……………...10^{1}

Деци (д) ……………10^{-1}
Санти (с) ……………..10^{-2}
Милли (м) ……………10^{-3}
Микро (мк) …………..10^{-6}
Нано (н) ……………...10^{-9}
Пико (п) ……………...10^{-12}
Фемто (ф) ……………10^{-15}

3. Некоторые внесистемные единицы

Единица (обозначение)	Связи	Значение в единицах СИ
Длина		
Ангстрем (Å)	–	10^{-10} м
Дюйм	–	0,0254 м
Фут	1 фут = 12 дюймов	0,3048 м
Ярд	1 ярд = 3 фута	0,9144 м
Миля	1 миля = 1760 ярдов	1609,3 м
Миля морская	–	1852 м
Парсек (пк)	–	$3{,}09\cdot10^{16}$ м
Время		
Минута (мин)	–	60 с
Час (ч)	1 ч = 60 мин	3600 с
Сутки (сут)	1 сут = 24 ч	86400 с
Год	1 год ≈ 365,25 сут	$3{,}15\cdot10^{7}$ с

Масса		
Атомная единица массы (а.е.м.)	–	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Гран	–	$6{,}48\cdot10^{-5}$ кг
Карат (кар)	–	$2\cdot10^{-4}$ кг
Унция	–	$2{,}835\cdot10^{-3}$ кг
Фунт	1 фунт = 12 унций	0,4536 кг
Центнер (ц)	–	100 кг
Тонна (т)	–	1000 кг
Температура		
Градус по Цельсию (°C)	T K = t °C + 273,15 K	1 K
Градус по Фаренгейту (°F)	$t\ °\mathrm{C} = \frac{5}{9}(t\ °\mathrm{F} - 32\ °\mathrm{F})$	$\frac{5}{9}$ K
Плоский угол		
Градус (°)	–	$\frac{\pi}{180}$ рад
Град (^{g})	$90° = 100^g$	$\frac{\pi}{200}$ рад

4. Некоторые астрономические величины

Средний радиус Земли .... $6{,}37\cdot10^{6}$ м
Масса Земли .... $5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Средний радиус Солнца .... $6{,}96\cdot10^{8}$ м
Масса Солнца .... $1{,}99\cdot10^{30}$ кг
Средний радиус Луны .... $1{,}74\cdot10^{6}$ м
Масса Луны .... $7{,}35\cdot10^{22}$ кг
Среднее расстояние от Земли до Солнца .... $1{,}49\cdot10^{11}$ м
Среднее расстояние от Земли до Луны .... $3{,}84\cdot10^{8}$ м
Диаметр Солнечной системы (примерно)......... 10^{13} м
Диаметр Галактики (примерно)........................ 10^{18} м
Размер наблюдаемой Вселенной (примерно)... 10^{26} м

5. Таблицы физических величин

Плотность

Жидкости при 15°С (10^3кг/м^3)

Бензол ……………… 0,88
Вода …………………1,00
Глицерин ……..……..1,26
Керосин ……………. 0,80
Масло касторовое …..0,97
Ртуть ………………...13,6
Спирт ………………...0,79
Эфир …………………0,71

Газы при нормальных условиях (кг/м^3)

Азот …………………1,25
Водород …………….0,09
Воздух ………………1,29
Гелий ………………..0,18
Кислород ……………1,43
Углекислый газ ……..1,98

Твердые тела (10^3кг/м^3)

Алюминий ………….2,7
Дерево ………………0,8
Железо (сталь) ……...7,8
Кирпич ……………...1,8
Лед …………………..0,92
Медь ………………...8,9
Свинец ……………...11,3
Серебро ……………..10,5

Упругость

Материал	Модуль Юнга E, 10^{10} Па	Модуль сдвига G, 10^{10} Па	Модуль всестороннего сжатия W, 10^{10} Па
Медь	12	4,5	13,5
Свинец	1,7	0,56	–
Сталь	21	8	16,5
Стекло	5	2 - 2,2	3
Вода	–	–	0,2
Ртуть	–	–	2,5

Скорость звука (м/с)

Вода ……………………………………….1450
Воздух (сухой при 0°С)…………………..332

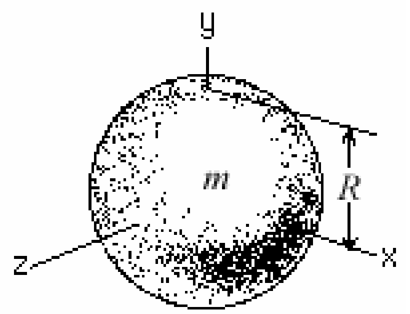
Динамическая вязкость (мПа·с)

Вода (20ºС) …………….1,00
Глицерин (20ºС) ……...1480
Масло касторовое (20ºС) 987
Ртуть (20ºС) …………….1,58

Воздух (0ºС) …………0,018
Кислород (0ºС) ………0,019

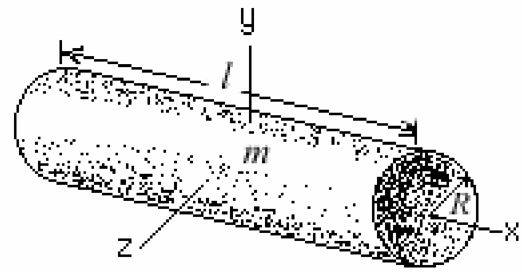
Моменты инерции некоторых тел

Шар



$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mR^2$$

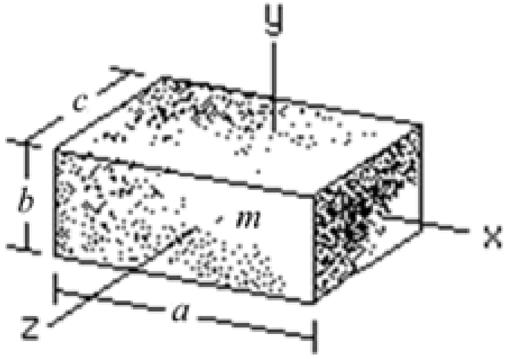
Сплошной цилиндр



$$I_x = \frac{1}{2} mR^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3R^2 + l^2)$$

Прямоугольный параллелепипед

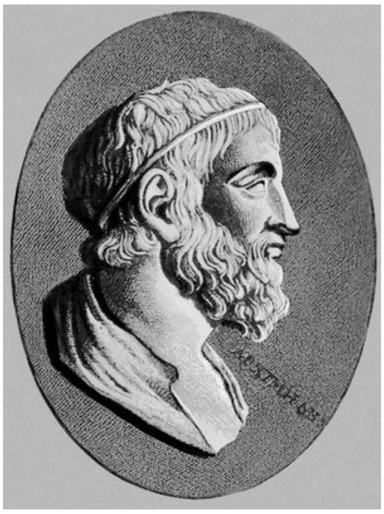


$$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

6. Создатели механики

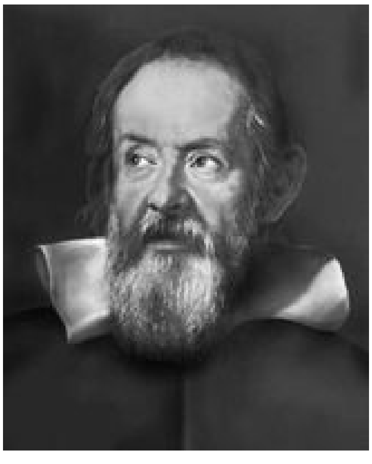


Архимед (Archimedes; около 287-212 до н. э.), древнегреческий ученый, математик и механик. Родился в Сиракузах (о. Сицилия). Предполагают, что он был сыном астронома Фидия. Научную деятельность начал как механик и техник. Его военные машины заставили римлян отказаться от попыток взять город штурмом и вынудили их перейти к длительной осаде. При взятии города войсками Марцелла Архимед был убит римским солдатом, которого, по преданию, встретил словами: «Не трогай моих чертежей».

Архимед сделал математический вывод законов рычага. Ему приписывают фразу: «Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю».

Архимед заложил основы гидростатики. Он сформулировал свой знаменитый закон Архимеда, изобрел водоподъемный механизм, архимедов винт, который явился прообразом корабельных, а также воздушных винтов. Существует легенда, согласно которой Архимед нашел решение задачи об определении количества золота и серебра в короне Герона, когда садился в ванну, и, не одеваясь, побежал домой с криком «Эврика!» («Нашел!»).

Архимед занимался также астрономией. Он сконструировал прибор для определения видимого диаметра Солнца и нашел значение этого угла с поразительной точностью. Он первым стал приводить наблюдения к центру Земли. Наконец, Архимед построил небесную сферу – механический прибор, на котором можно было наблюдать движения планет, фазы Луны, солнечные и лунные затмения.



Галилео Галилей (Galilei) (1564-1642), итальянский физик, механик и астроном, один из основателей естествознания, поэт, филолог и критик.

Галилей принадлежал к знатной, но обедневшей флорентийской семье. До 11 лет он жил в Пизе, посещал школу, затем семья переселилась во Флоренцию. Дальнейшее воспитание Галилей получил в монастыре Валломброса, где был принят послушником в монашеский орден. Здесь познакомился с работами латинских и греческих писателей.

По настоянию отца в 1581 году Галилей поступил в Пизанский университет, в котором изучал медицину. Здесь он впервые познакомился с физикой Аристотеля, с самого начала показавшейся ему неубедительной. Галилей обратился к чтению древних математиков – Евклида и Архимеда. Архимед стал его настоящим учителем.

В начале XVII века, на основании дошедших до него сведений об изобретенной в Голландии зрительной трубе, Галилей строит свой телескоп. Наблюдения, произведенные с его помощью, разрушили «идеальные сферы» Аристотеля и догмат о совершенстве небесных тел: поверхность Луны оказалась покрытой горами и изрытой кратерами. У Юпитера обнаружилось 4 спутника, на небе стало видно громадное количество новых звезд. Млечный Путь распался на отдельные звезды. Продолжая телескопические наблюдения, Галилей открыл фазы Венеры, солнечные пятна и вращение Солнца, изучал движение спутников Юпитера. Астрономические открытия послужили поворотным пунктом в жизни Галилея.

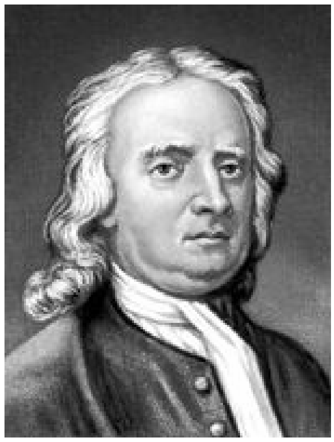
В 1613 году стало известно письмо Галилея к аббату Кастелли, в котором он защищал геоцентрические взгляды Коперника. Письмо послужило поводом для прямого доноса в инквизицию. Конгрегация иезуитов объявила учение Коперника еретическим, книга Коперника была включена в список запрещенных. Имя Галилея в постановлении названо не было, но частным образом ему было приказано отказаться от защиты этого учения. Галилей формально подчинился декрету. В течение нескольких лет он принужден был молчать о системе Коперника или говорить о ней намеками.

В 1623 году на папский престол под именем Урбана VIII вступил друг Галилея кардинал Маффео Барберини. В 1630 году Галилей приехал в Рим с рукописью «Диалога о двух главнейших системах мира». Папа Урбан VIII согласился на издание книги, в которой учение Коперника излагалось бы как одна из возможных гипотез. После длительных цензурных правок Галилей получил разрешение на издание «Диалога». Однако уже через несколько месяцев после выхода книги Галилей получил приказ из Рима прекратить дальнейшую продажу издания. По требованию инквизиции Галилей был вынужден в феврале 1633 года приехать в Рим. Против него был возбужден процесс. После четырех допросов Галилей отрекся от учения Коперника и принес публичное покаяние.

Несмотря на папский интердикт, в протестантских странах появился латинский перевод «Диалога». Наконец, в 1638 году в Голландии издали одно из самых важных сочинений Галилея, подводящее итог его физическим изысканиям и содержащее обоснование динамики, – «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки...».

Если история статики начинается с Архимеда; историю динамики открывает Галилей. Он первый выдвинул идею об относительности движения и сформулировал принцип инерции. К основным достижениям Галилея относятся также работы о законах свободного падения тел, о падении по наклонной плоскости, о движении тела, брошенного под углом к горизонту, об изохронизме колебаний маятника.

Одаренность Галилея не ограничивалась областью науки: он был музыкантом, художником, любителем искусств и блестящим литератором. Галилей переводил с греческого языка на латынь, изучал античных классиков и поэтов Возрождения.



Исаак Ньютон (Newton) (1643-1727), английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший дифференциальное и интегральное исчисления, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике.

Ньютон родился в семье фермера. В 12 лет он начал учиться в Грантемской школе, в 1661 году поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета в качестве субсайзера (так назывались бедные студенты, выполнявшие для заработка обязанности слуг в колледже).

Окончив университет, Ньютон в 1665 году получил ученую степень бакалавра. В 1665-1667 годах, во время эпидемии чумы, находился в своей родной деревне Вулсторп; эти годы были наиболее продуктивными в научном творчестве. Здесь у него сложились те идеи, которые привели его к созданию дифференциального и интегрального исчислений.

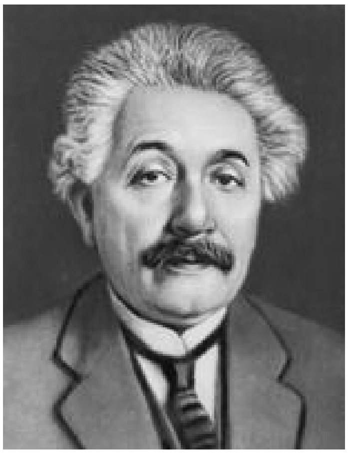
Вершиной научного творчества Ньютона является работа «Математические начала натуральной философии», в которой он обобщил результаты, полученные его предшественниками, и свои собственные исследования и впервые создал единую стройную систему земной и небесной механики, которая легла в основу всей классической физики.

В «Началах» Ньютон исследовал движение тел в сплошной среде (газе, жидкости) в зависимости от скорости их перемещения и привёл результаты своих экспериментов по изучению качания маятников в воздухе и жидкостях. Здесь же он рассмотрел скорость распространения звука в упругих средах. В этом же сочинении Ньютон уделил значительное внимание закону механического подобия, на основе которого развилась теория подобия.

Задачи естествознания, поставленные Ньютоном, потребовали разработки принципиально новых математических методов. Математика для него была главным орудием в физических изысканиях; он подчёркивал, что понятия математики заимствуются извне и возникают как абстракция явлений и процессов физического мира, что по существу математика является частью естествознания.

Могучий аппарат ньютоновской механики, его универсальность и способность объяснить и описать широчайший круг явлений природы, особенно астрономических, оказали огромное влияние на многие области науки. Ньютон писал, что было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, и при объяснении некоторых оптических и химических явлений сам использовал механической модели.

Естественнонаучные воззрения совмещались у Ньютона с религиозностью. К концу жизни он написал сочинение о пророке Данииле и толкование Апокалипсиса.



Альберт Эйнштейн (Einstein) (1879-1955), физик, создатель теории относительности и один из создателей квантовой теории и статистической физики.

Родился в немецком городе Ульм. С 14 лет вместе с семьей жил в Швейцарии. По окончании Цюрихского политехникума (1900) работал учителем сначала в Винтертуре, затем в Шафхаузене. В 1902 году получил место эксперта в федеральном патентном бюро в Берне, где работал до 1909 года. В эти годы Эйнштейном была создана специальная теория относительности и выполнены исследования по статистической физике, броуновскому движению и теории излучения.

В 1913 году Эйнштейн был избран членом Прусской и Баварской АН и переехал в Берлин, где был директором физического института и профессором Берлинского университета. В берлинский период Эйнштейн завершил создание общей теории относительности, развил квантовую теорию излучения. За открытие законов фотоэффекта и работы в области теоретической физики в 1921 году ему была присуждена Нобелевская премия.

В 1933 году Эйнштейн был вынужден в знак протеста против фашизма покинуть Германию, вышел из состава академии и переехал в Принстон (США), где стал членом Института высших исследований. В этот период Э. пытался разработать единую теорию поля и занимался вопросами космологии.

Главное научное достижение Эйнштейна – теория относительности, которая по существу является общей теорией пространства, времени и тяготения. Специальная, или частная, теория относительности, предметом которой является описание физических явлений (и в том числе распространения света) в инерциальных системах отсчёта, была опубликована им в 1905 году в почти завершенном виде. Эта теория стала необходимым орудием физических исследований (например, в ядерной физике и физике элементарных частиц), её выводы получили полное экспериментальное подтверждение.

Специальная теория относительности оставляла в стороне явление тяготения. Вопрос о природе гравитации, а также об уравнениях гравитационного поля и законах его распространения не был в ней даже поставлен. Эйнштейн обратил внимание на фундаментальное значение пропорциональности гравитационной и инертной масс (принцип эквивалентности). Пытаясь согласовать этот принцип с инвариантностью четырёхмерного интервала, он пришёл к идее зависимости геометрии пространства-времени от материи и после долгих поисков вывел в 1915-1916 годах уравнение гравитационного поля. Эта работа заложила основы общей теории относительности.

Идеи Эйнштейна имеют огромное методологическое значение. Они изменили господствовавшие в физике со времён Ньютона механистические взгляды на пространство и время и привели к новой картине мира, основанной на глубокой связи этих понятий с материей и её движением.

Содержание

Бахтин Николай Александрович

Осинцев Алексей Михайлович

Физика:

учебное пособие

Часть 1: Механика.

Редактор

Технический редактор

Художественный редактор

ЛР №020524 от 02.06.1997

Подписано в печать Формат $60\times84^{1/16}$

Отпечатано на ризографе

Уч.-изд. л. 11. Тираж 500 экз. Зак. №

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности

650056, г. Кемерово, б. Строителей, 47

ПЛД №44-09 от 10.10.1999

Отпечатано в лаборатории множительной техники КемТИПП,

г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52