Представление синусоидальных функций времени комплексными числами.
(Символический метод).

Расчет цепей переменного тока может производиться не только построением векторных диаграмм, но аналитически путем операций с комплексными числами, символически изображающими синусоидальные Э.Д.С. и токи. Достоинством векторных диаграмм является наглядность, недостатком- малая точность графических построений. Применение символического метода позволяет выполнять расчеты цепей с большой точностью.

Символический метод основан на представлении векторов в комплексной плоскости и на записи их комплексными числами. Это позволяет для цепей синусоидального тока применять законы Ома и Кирхгофа и вытекающие из них методы расчета цепей в той же форме, что и для цепей постоянного тока. Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, которое можно записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

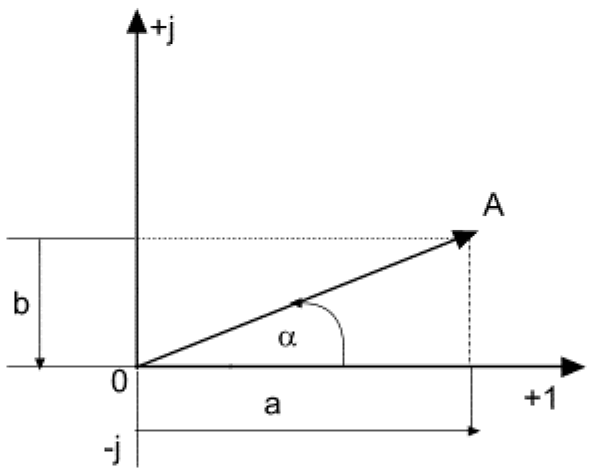

Рис. 1

Комплексная плоскость представляет собой прямоугольную систему координат (рис. 1), подобно плоскости декартовых координат. Ось абсцисс на комплексной плоскости является вещественной осью и обозначается (+1); (-1), а ось ординат — мнимой и обозначается (+j), (-j), где $j = \sqrt{-1}$. По вещественной оси откладывают действительную часть комплексного числа *a*, а по мнимой оси — мнимую часть комплексного числа *jb*. Комплексную величину отмечают точкой ($\dot{U}, \dot{I}, \dot{\Phi}$ и т. д.) д.). *Комплексным числом* (или просто *комплексом*) называют сумму действительного и мнимого чисел, например для рис. 1.

$$\dot{A} = a + jb = A\cos\alpha + jA\sin\alpha = Ae^{j\alpha} \quad (1)$$

где $A=\sqrt{a^2+b^2}$ модуль комплекса, равный длине вектора, изображающего комплексное число; α=arctg(b/a)- аргумент комплексного числа, т. е. угол между осью вещественных чисел и вектором, изображающим комплексное число.

При переходе от тригонометрической формы изображения комплексного числа используется формула Эйлера

$$\cos\alpha + j\sin\alpha = e^{j\alpha}$$

е- снование натурального логарифма.

В (1) представлены три формы записи комплексного числа: алгебраическая, тригонометрическая и показательная.

За положительное направление вращения вектора на комплексной плоскости принимают направление вращения против часовой стрелки. Поэтому положительный угол α откладывают от полуоси вещественных чисел против часовой стрелки, а отрицательный угол (-α) —по часовой стрелке. Если имеется отрицательный угол (-α), то формула Эйлера принимает вид

$$e^{-j\alpha} = \cos(-\alpha) + j\sin(-\alpha) = \cos\alpha - j\sin\alpha$$

Используя преобразования Эйлера, получим ряд необходимых в дальнейшем выражений:

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} \pm j\sin\frac{\pi}{2} = \pm j;$$

$$e^{\pm j\pi} = \cos\pi \pm j\sin\pi = -1;$$

$$e^{\pm j2\pi} = \cos 2\pi \pm j\sin 2\pi = 1;$$

Следовательно, умножение комплексного числа на ±j равносильно повороту вектора на комплексной плоскости на угол $\pm\frac{\pi}{2}$.

Сложение комплексных чисел производится в алгебраической форме.

Пусть имеются комплексные числа

$\dot{A} = A' + jA''$ и $\dot{B} = B' + jB''$ тогда

$$\dot{C} = \dot{A} + \dot{B} = (A' + B') + j(A'' + B'');$$

Вычитание комплексных чисел проводится аналогично. Умножать и делить комплексные числа удобно в показательной форме. При умножении модули перемножаются, а аргументы складываются.

$\dot{A} = A^{j\alpha}$ и $\dot{B} = B^{j\beta}$ $\qquad \dot{C} = \dot{A} * \dot{B} = A * B^{j(\alpha+\beta)}$

При делении модули делятся, а аргументы вычитаются, т.е.

$$\dot{C} = \frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{j(\alpha-\beta)}$$

Если гармонические э.д.с. и токи можно изображать векторами, а векторы-комплексными числами, то следовательно гармонические э.д.с. и токи можно в свою очередь изображать комплексными числами.

Предположим, что мгновенное напряжение и u определяется выражением $u = U_m \cos(\omega \cdot t + \psi_u)$. Это переменное напряжение графически изображается вектором длинной U_m, вращающимся против часовой стрелки с угловой частотой ω. Вектор с модулем U_m и аргументом $\omega \cdot t + \psi_u$ символически изображается в показательной форме:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j(\omega \cdot t + \psi_u)}.$$

Обычно в символических выражениях отбрасывается переменный аргумент $\omega \cdot t$, одинаковый для всех э.д.с. и токов одной и той же частоты. Это соответствует тому, что мы рассматриваем уже не вращающиеся, а неподвижные векторы, в этом случае символические выражения векторов амплитуды напряжения или действующего напряжения можно записать:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}; \qquad \dot{U} = U^{j\psi_u}$$

Заметим, что комплексное напряжение можно выразить в тригонометрической форме:

$$\dot{U}_m = U_m \cos(\omega \cdot t + \psi_u) + jU_m \sin(\omega \cdot t + \psi_u).$$

Реально существующие напряжения и токи выражаются вещественными числами, поэтому мгновенные напряжения определяются вещественной частью комплексного числа.

Пример 2.1. Дано комплексное действующее значение тока I = - 4 – j3. Найти параметры синусоидальной функции времени — мгновенного значения тока, соответствующего заданному комплексному числу.

Решение. Модуль комплексного числа

$$I = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5A.$$

амплитуда тока

$$I_m = \sqrt{2}I = 7{,}07A;$$

начальная фаза тока

$$\psi_i = arctg\left(\frac{-3}{-4}\right) + 180^0 = 36^0 52^{/} + 180^0 = 216^0 52^{/}.$$

Искомое мгновенное значение тока: $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 7{,}07\sin(\omega t + 216^0 52^/\ A.$

Пример 2.2. Заданы параметры синусоидального тока: амплитуда I = 56,5 А, начальная фаза ψ_i = —30°, угловая частота ω = 314 рад/с. Требуется записать мгновенное значение тока, рассчитать его комплексное действующее значение в трех формах.

Решение:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 56{,}5\sin(314t - 30^0)A;$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{56{,}5}{1{,}41} \approx 40A;$$

$$\dot{I} = Ie^{j\psi_i} = 40e^{-j30}$$

$$\dot{I} = 40\cos(-30) + j\sin(-30) = 34{,}7 - j20A.$$