

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПИЩЕВОЙ
ПРОМЫШЛЕННОСТИ

А.Г.СЕМЕНОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В
ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ**

Учебное пособие для студентов механических специальностей
заочной формы обучения

УДК 519.6 : 519.233

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Кемеровского технологического института пищевой промышленности

Рецензенты:

- зав. кафедрой автоматизации исследований и технической кибернетики Кемеровского государственного университета, профессор, доктор техн. наук В.Я.Карташов;
- профессор кафедры горных машин и комплексов Кузбасского государственного технического университета, доктор техн. наук Ю.Г.Полкунов.

Семенов А.Г. Математические модели в инженерной практике: Учебное пособие. – Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. - Кемерово, 2003. – 96 с.

ISBN 5-89289-299-9

В учебное пособие включены: краткий конспект лекций, описания лабораторных и контрольных работ и задания для их выполнения, программа зачета. Теоретическая часть включает описание методов решения прикладных математических задач. Изложение материала ориентировано на практическую работу студентов. Теоретическая часть снабжена иллюстрациями и примерами.

Илл. – 22. Табл. – 25. Библ. назв. – 6.

С $\frac{1602110000}{У50(03) - 03}$

ISBN 5-89289-299-9

© Кемеровский технологический институт
пищевой промышленности, 2003

I. ОГЛАВЛЕНИЕ

I. ОГЛАВЛЕНИЕ	3
II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА "МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ"	5
III. ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС.....	6
3.1. Основные понятия математического моделирования	6
3.2. Решение нелинейных алгебраических уравнений	10
3.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений	13
3.4. Исследование сеточных функций.....	16
3.5. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	22
3.6. Моделирование процессов, приводящих к дифференциальным уравнениям в частных производных.....	28
3.7. Дифференциальное уравнение теплопроводности.....	29
3.8. Краевые задачи для уравнений в частных производных.....	33
3.9. Оптимизационные модели. Основные понятия и определения.....	37
3.10. Схема решения задач оптимизации	39
3.11. Численные методы решения задач	40
безусловной одномерной оптимизации	40
3.12. Многомерная безусловная оптимизация	43

3.13. Условная оптимизация при решении инженерных задач ...	44
3.14. Линейное программирование.....	44
3.15. Обработка экспериментальных данных	49
IV. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ	53
4.1. Работа 1: Табулирование функций.	53
4.2. Работа 2: Решение трансцендентных алгебраических уравнений	61
4.3. Работа 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений	65
4.4. Работа 4: Решение задач линейного программирования	69
4.5. Работа 5. Обработка экспериментальных данных	77
V. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ.....	83
5.1. Контрольная работа № 1	84
5.2. Контрольная работа № 2	89
VI. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ	95
VII. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.	96

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА "МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ"

№	Содержание темы	Объем	Литература
1	Основные понятия моделирования. Классификация математических моделей. Этапы процесса создания математической модели	Определяется учебным планом	
2	Основные типы математических задач, возникающие в процессах моделирования природных и технических систем.	- " -	
3	Решение алгебраических уравнений и систем линейных уравнений.	- " -	[3], с. 60-65, 72-75, 92-99
4	Исследование сеточных функций. Численное дифференцирование и интегрирование.	- " -	[3], с. 29-33, 48-54
5	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Понятие об основных типах задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	- " -	[3], с. 100-106
6	Дифференциальные уравнения в частных производных.	- " -	[5], с. 526-533
7	Оптимизационные задачи. Условная и безусловная, одномерная и многомерная оптимизация.	- " -	[3], с. 110-114, 122-128
8	Задачи линейного программирования	- " -	
9	Основы обработки экспериментальных данных. Метод наименьших квадратов.	- " -	[3], с. 42-46

III. ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

3.1. Основные понятия математического моделирования

Моделью какой-либо системы называется другая система, изучение которой позволяет сделать выводы о поведении исходной системы (*оригинала*). Смысл построения моделей состоит в том, что исследование модели является более простым, нежели исследование оригинала (достаточно часто прямое исследование оригинала может оказаться и вовсе невозможным по различным причинам).

Виды моделей:

1. *Словесные* (описания)
2. *Натурные* (макеты)
3. *Аналоговые*. Аналоговое моделирование основано на том, что различные физические явления могут описываться одинаковыми математическими соотношениями. Так, дифференциальное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

описывает:

- распределение электрического потенциала в области пространства;
- стационарное распределение температуры в сплошной среде;
- течение *идеальной* (лишенной внутреннего трения) жидкости.

Поэтому можно заменить, например, исследование распределения температуры в теле сложной формы измерением распределения электрического потенциала в некоторой области, выполнить которое существенно проще.

4. *Математические* модели (ММ) основаны на анализе и решении математических соотношений (уравнений, систем уравнений, неравенств), описывающих характеристики системы-оригинала.

Этапы создания ММ:

1. Постановка задачи. На этом этапе необходимо определить цель моделирования, выявить свойства оригинала, исследование которых важно, и те свойства, знание которых несущественно в рамках

проводимого исследования и которыми, следовательно, можно пренебречь;

2. Составление математического описания объекта. По способу получения математических соотношений, описывающих ММ, модели делятся на:

1) *теоретические* или *феноменологические*, в которых необходимые математические соотношения получаются на основе анализа физических законов, описывающих процессы в системе, материальных балансов и других объективно существующих связей и закономерностей;

2) *эмпирические*, в которых связи характеристик системы определяются экспериментально;

3) *полуэмпирические*, или *смешанные*; в таких моделях основные математические соотношения получаются на основе объективных закономерностей, но при их построении приходится делать ряд допущений и вводить в соотношения неопределенные коэффициенты, значения которых определяются экспериментально.

Чисто эмпирические модели имеют ряд недостатков. Во-первых, для их построения приходится строить макет устройства и проводить достаточно большое количество экспериментов. Во-вторых, само устройство является в этом случае "черным ящиком" – мы можем измерить только связь между значениями входных параметров (называемых *факторами*) и выходных параметров (*откликов*), но не можем ничего сказать об особенностях происходящих в системе процессов, о том, каким образом ее структура влияет на функционирование и обуславливает именно такую связь "входа" и "выхода". Наконец, эмпирические модели невозможно *экстраполировать*, то есть, применить за пределами диапазона параметров, уже исследованного экспериментально. Однако, при изучении сложных технических устройств эмпирический подход часто является единственно возможным из-за большого количества взаимовлияющих факторов, объективный учет которых не представляется возможным. Эмпирические модели уже существующих устройств необходимы при создании систем автоматического управления их работой.

3. Решение полученной математической задачи. Оно может быть:

- *аналитическим*, то есть, представленным в виде алгебраических формул;

- *численным*, то есть, представленным в виде числовых таблиц и графиков, не описываемых явными алгебраическими формулами.

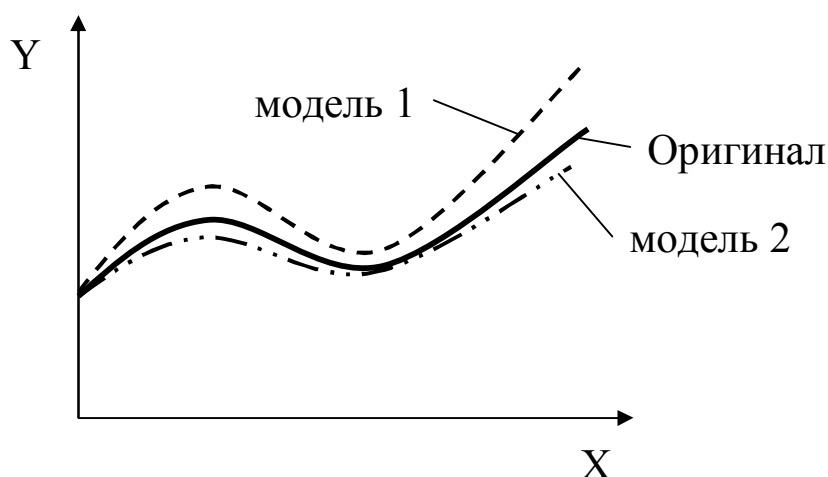
Получить аналитическое решение задачи удастся нечасто и в основном для простейших моделей. Гораздо чаще получают численное решение, причем большинство существующих методов получения численных решений позволяют сделать это со сколь угодно малой погрешностью. Поэтому при дальнейшем использовании модели в процессе проектирования и расчета каких-то технических устройств аналитическое решение не дает преимуществ перед численным, так как численный расчет по любой аналитической формуле все равно ведется с какой-то погрешностью.

4. Проверка *адекватности* и *точности* построенной модели. Эти понятия часто смешивают.

Адекватностью называют свойство модели отражать основные качественные особенности поведения оригинала.

Точность – это степень количественной близости значений характеристик модели и оригинала.

Рассмотрим график, показывающий зависимость отклика Y от фактора X для некоей системы и двух моделей этой системы



Про обе модели можно сказать, что они адекватно отображают свойства системы-оригинала, однако точность модели 2 заметно выше, чем точность модели 1.

Проверку адекватности и точности модели осуществляют разными способами. Чаще всего результаты, полученные при помощи модели, сравнивают с данными наблюдения реальной системы или выборочно проведенных экспериментов.

5. Использование модели. Если модель не предназначена для последующего практического применения, то ее создание вообще не имеет смысла. Практически модели природных систем используются для уточнения законов природы, для прогнозирования дальнейшего поведения систем, изучения последствий деятельности человека (мо-

дели климата, экологических систем и т.п.). Моделирование технических систем необходимо при их проектировании, поиске путей совершенствования, изучении аварийных ситуаций, автоматизации управления их работой и т.п.

Всевозможные ММ природных и технических систем можно разделить на классы:

1. По отношению к изменению характеристик во времени:

- *статические, стационарные* – не учитывающие изменение характеристик во времени;

- *динамические, нестационарные* – учитывающие изменение характеристик во времени;

2. По отношению к распределению параметров в пространстве:

- *дискретные* – параметры которых "привязаны" к отдельным точкам пространства или отдельным узлам и агрегатам системы (в этом случае анализируются связи между узлами, а их внутреннее устройство не рассматривается);

- *континуальные, непрерывные* – характеристики которых меняются в пространстве от точки к точке и образуют *поля* (непрерывные распределения, описываемые функциями координат, а в нестационарных системах еще и времени).

Особый класс ММ – модели экономических систем и процессов.

Разные классы ММ приводят к различным математическим задачам. Так, континуальные модели всегда описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Дискретные модели сводятся к системам алгебраических уравнений в стационарном случае и к обыкновенным дифференциальным уравнениям в нестационарном. При построении ММ и решении соответствующих математических соотношений могут возникать также различные дополнительные проблемы.

Далее рассматриваются способы решения некоторых математических задач, возникающих в ходе математического моделирования технических, технологических и природных систем и процессов.

3.2. Решение нелинейных алгебраических уравнений

Рассмотрим закон Планка, определяющий зависимость интенсивности электромагнитного излучения абсолютно черного тела при температуре излучающего тела T от длины волны λ

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}. \quad (1)$$

Определим – при какой длине волны интенсивность излучения максимальна. Для этого приравняем к нулю производную

$$\frac{dE_{0\lambda}}{d\lambda} = - \left[\frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \right]^2 \cdot \left[5\lambda^4 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) + \lambda^5 e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \left(-\frac{C_2}{\lambda^2 T} \right) \right]$$

После упрощения задача сводится к решению уравнения

$$xe^x - 5e^x + 5 = 0 \quad (2)$$

где обозначено

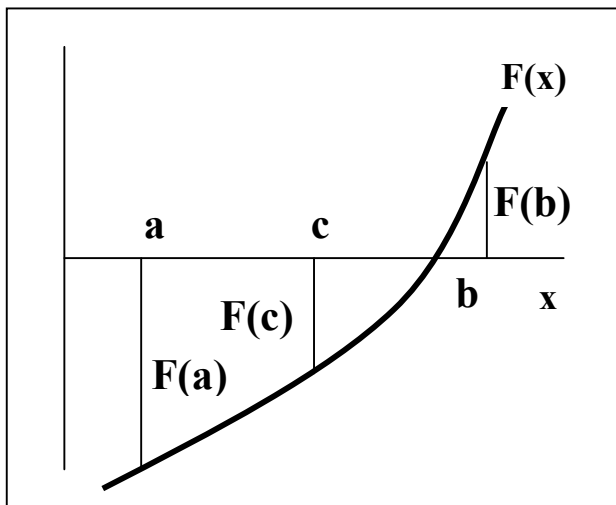
$$x = \frac{C_2}{\lambda T} \quad (3)$$

Выразить решение этого уравнения в виде замкнутой алгебраической формулы или, как говорят, "в квадратурах", невозможно. Однако найти численное значение его решения не так уж трудно.

Данный пример показывает, каким образом в процессе математического моделирования приходится сталкиваться с решением нелинейных и трансцендентных (содержащих экспоненциальные, логарифмические, тригонометрические и т.п. функции) уравнений. Такие уравнения встречаются в расчетах различных задач теплообмена и других технических и технологических процессов и систем.

Рассмотрим два способа решения нелинейных и трансцендентных уравнений.

1. Метод половинного деления.



Для начала надо определить ту область числовой оси (отрезок), внутри которой находится корень уравнения. Для этого уравнение приводится к виду:

$$F(x) = 0 \quad (4)$$

Затем функция $F(x)$ табулируется (составляется таблица значений при разных значениях

x) и отыскиваются два ближайших друг к другу значения x , при которых значения функции имеют разные знаки. Обозначим эти значения a и b . Затем находим значение функции в точке $x = c$, являющейся серединой отрезка $[a, b]$. Корень уравнения может находиться либо в левой половине отрезка, либо в правой. Выбрать нужную половину можно по тому же принципу – на ее концах значения функции должны иметь разные знаки. Потом эту половину снова делим пополам, находим значение функции $f(x)$ в ее середине и выбираем ту из частей, в которой находится корень. Процесс повторяется несколько раз. На каждом шаге первоначальный отрезок $[a, b]$ делится пополам, так что после N повторений процесса длина оставшегося отрезка будет равна $\Delta = (b-a)/2^N$. За корень уравнения можно принять середину оставшегося отрезка, в этом случае погрешность определения корня равна $\delta = \pm \Delta/2$. Видно, что повторяя процесс несколько раз, можно постепенно уменьшить погрешность определения корня до сколь угодно малой величины.

Такой метод нахождения корня привлекателен своей простотой и безотказностью, так как позволяет найти решение уравнения в любом случае, когда этот корень вообще существует. Недостатком же явля-

ется относительно медленная сходимость (скорость уменьшения погрешности).

2. *Метод последовательных приближений (итераций)*. Для его использования уравнение надо привести к виду:

$$x = f(x). \quad (5)$$

Например, для уравнения (2) такое преобразование даст:

$$x = \frac{5(e^x - 1)}{e^x} = 5(1 - e^{-x}). \quad (6)$$

Выберем начальное значение для x , находящееся где-то поблизости от корня уравнения (область, в которой находится корень, определяется так же, как для метода половинного деления). В нашем случае можно принять $x_1=5$. Подставим это значение в правую часть уравнения (6):

$$x = 5(1 - e^{-5}) = 4.96631.$$

Это будет следующее приближение для корня: x_2 . Вновь подставим его в правую часть уравнения и получим третье приближение:

$$x_3 = 5(1 - e^{-4.96631}) = 4.96516$$

Следующая подстановка дает четвертое приближение корня $x_4=4.96512$. Пятое приближение получится равным $x_5=4.96511$. Оно уже не отличается от предыдущего с точностью до четырех знаков после запятой. Если необходимо найти еще более точное значение корня, процесс последовательных приближений можно повторить еще несколько раз.

Видно, что метод последовательных приближений имеет высокую скорость сходимости, поэтому он часто применяется для решения нелинейных и трансцендентных уравнений вручную с помощью калькулятора. Его недостатком является то, что итерационный процесс сходится не всегда, а только в том случае, если на отрезке первоначальной локализации корня $[a, b]$ выполняется соотношение:

$$\left| \mathbf{f}'_{\mathbf{x}} \right| < \mathbf{1}. \quad (7)$$

Проверка выполнения условия (7) бывает затруднена, если функция $f(\mathbf{x})$ имеет сложную структуру. В этом случае итерационный процесс проводят, не проверяя условие, а о наличии или отсутствии сходимости судят по уменьшению или увеличению разницы между двумя последовательно найденными значениями $\mathbf{x}$.

3.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Модели дискретных статических систем часто описываются системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n \end{cases} \quad (8)$$

Такие системы возникают при расчетах ферменных строительных конструкций (реакции опор и усилия в узлах фермы), распределений электрических токов в сложных электрических цепях, тепловых балансов смежных помещений в отапливаемых или охлаждаемых зданиях и во многих других случаях. Для решения используются следующие основные методы:

1. *Метод Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных.*

Выразим из первого уравнения системы (8) неизвестную величину $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\mathbf{a}_{12}}{\mathbf{a}_{11}}\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{a}_{13}}{\mathbf{a}_{11}}\mathbf{x}_3 - \dots - \frac{\mathbf{a}_{1n}}{\mathbf{a}_{11}}\mathbf{x}_n + \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_{11}}. \quad (9)$$

Затем подставим это выражение в остальные уравнения системы. Тогда во втором уравнении, например, получится:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{21} \left(\mathbf{a}_{22} - \frac{\mathbf{a}_{12}}{\mathbf{a}_{11}} \mathbf{a}_{21} \right) \mathbf{x}_2 + \left(\mathbf{a}_{23} - \frac{\mathbf{a}_{13}}{\mathbf{a}_{11}} \mathbf{a}_{21} \right) \mathbf{x}_3 + \dots \\ + \left(\mathbf{a}_{2n} - \frac{\mathbf{a}_{1n}}{\mathbf{a}_{11}} \mathbf{a}_{21} \right) \mathbf{x}_n = \left(\mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_{11}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Это уравнение уже не содержит неизвестной величины x_1 . Преобразовав подобным образом остальные уравнения системы, получаем систему из $(n-1)$ уравнения с $(n-1)$ неизвестным. Затем из этой системы аналогичным образом исключается неизвестная величина x_2 , потом x_3 и т.д. На последнем шаге исключается неизвестная величина x_{n-1} и остается уравнение для определения x_n . Обратным ходом по значению x_n находят x_{n-1} , затем x_{n-2} и т.д., вплоть до x_1 , определяемого с помощью (9).

Метод Гаусса всегда позволяет найти решение СЛАУ, если оно существует, но он является очень трудоемким. Поэтому его используют, если имеется готовая компьютерная программа его реализации. Также этот метод используется для нахождения решения в различных прикладных пакетах математических расчетов.

2. Методы последовательных приближений.

Предварительно систему необходимо привести к виду:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{c}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_{13}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{c}_{1n}\mathbf{x}_n + \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{c}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_{23}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{c}_{2n}\mathbf{x}_n + \mathbf{d}_2 \\ \\ \mathbf{x}_n = \mathbf{c}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_{n2}\mathbf{x}_2 + ... \mathbf{c}_{n,n-1}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{d}_n \end{cases}. \quad (11)$$

Наиболее просто это можно сделать, выразив из каждого уравнения соответствующее значение x , т.е., принимая:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ij} &= -\frac{\mathbf{a}_{ij}}{\mathbf{a}_{ii}}, \\ \mathbf{d}_i &= \frac{\mathbf{b}_i}{\mathbf{a}_{ii}}, \end{aligned} \quad (12)$$

Затем выбираются начальные значения x_i , подставляются в правые части уравнений (2) и вычисляются следующие значения, опять подставляются в правые части и т.д., до тех пор, пока два последовательно вычисленных значения любого из неизвестных не окажутся совпадающими друг с другом с заданной точностью. Процесс, таким образом, в принципе не отличается от итерационного процесса решения трансцендентных алгебраических уравнений

В качестве начальных значений x_i обычно принимаются значения свободных членов уравнений d_i .

Существует две разновидности метода последовательных приближений. В методе *простых итераций* вычисляются сразу все n значений неизвестных и все разом подставляются в правые части уравнений (11). В *методе Зейделя* каждое вычисленное новое значение очередного неизвестного сразу же начинают подставлять в правые части уравнений вместо старого, что увеличивает скорость сходимости процесса.

Недостатком методов последовательных приближений является то, что итерационный процесс, как правило, сходится только при выполнении определенных условий. В случае системы линейных алгебраических уравнений условие сходимости таково:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |c_{ij}| < 1 \quad (i = 1 \dots n) \quad (13)$$

или для исходной системы (8):

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i=1 \dots n) \quad (14)$$

Проверка выполнения условий сходимости (14) проводится перед преобразованием системы (8). В случае нарушения условий уравнения меняются местами или уравнение, для которого условие сходимости нарушается, заменяется на линейную комбинацию его с другими уравнениями системы, для которой условие сходимости выполняется. Например, в системе:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases} \quad (15)$$

условие сходимости нарушено для второго уравнения. Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из полученного уравнения первое уравнение. Получим:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \quad (16)$$

или

$$-3x_1 + 5x_2 + x_3 = -4. \quad (17)$$

Для такого уравнения условие сходимости выполняется:

$$|5| > |-3| + |1| \quad (18)$$

Методы последовательных приближений позволяют найти решение СЛАУ довольно быстро, поэтому их часто применяют для расчетов вручную. Достаточно легко также запрограммировать процесс решения для компьютерного расчета.

3.4. Исследование сеточных функций

При математическом моделировании часто приходится иметь дело с так называемыми *сеточными* функциями. Сеточной будем называть любую функцию $y(x)$, для которой неизвестно ее алгебраическое выражение и которая задана набором своих значений при отдельных значениях аргумента x_i , называемых *узлами сетки* ($i = 0, 1, 2, \dots, N$). Значения сеточной функции в соответствующих узлах будем обозначать y_i . Расстояние между двумя соседними узлами сетки $h_i = x_{i+1} - x_i$ называется *шагом сетки*. Мы будем рассматривать сетки с постоянным шагом, когда расстояние между любой парой соседних узлов всегда одинаково.

С сеточными функциями приходится сталкиваться в процессе работы с таблицами тех или иных зависимостей (например, таблицы физических свойств веществ). Численные решения динамических и континуальных ММ также представляются в виде сеточных функций.

Рассмотрим некоторые задачи обработки и исследования сеточных функций.

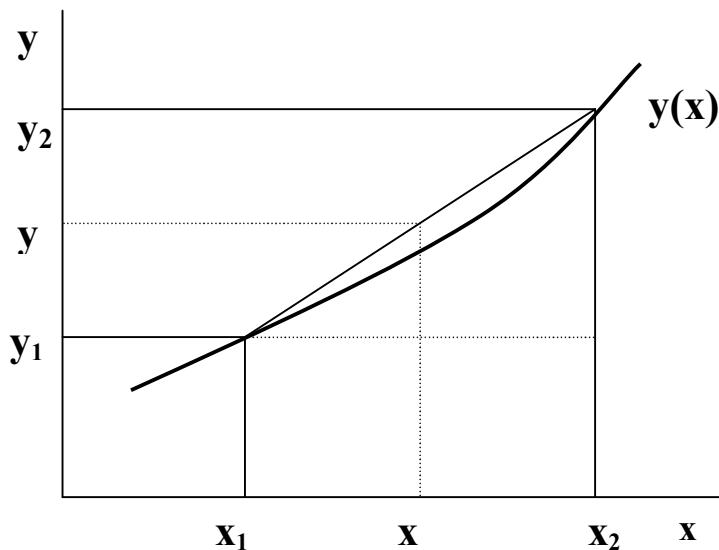
1. Интерполирование сеточной функции.

Интерполированием называется определение значения сеточной функции при значении аргумента x , лежащем между двумя узлами. Чаще всего такая задача встает при работе с таблицами физических свойств – либо для получения конкретных значений свойств в определенном состоянии, либо для получения алгебраического выражения функциональной зависимости, предназначенного для дальнейшего использования в какой-то более сложной ММ.

Рассмотрим два способа интерполяции.

а) Линейная интерполяция.

Она применяется в основном при расчетах вручную, если необходимо определить по таблицам значения какой-то функции для значения аргумента, которое отсутствует в таблице. Так, если по таблице надо найти значение функции y при значении аргумента x , надо из таблицы выбрать два значения аргумента x_1 и x_2 , ближайшие к x , так, что $x_1 < x < x_2$ и соответствующие им значения функции y_1 и y_2 . На отрезке $[x_1, x_2]$ функция $y(x)$ приближенно заменяется на линейную. Тогда вместо искомого значения функции определяется значение линейной функции по формуле, вытекающей из подобия треугольников:



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

т.е.

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (19)$$

б) Алгебраическая интерполяция. Чаще всего в качестве интерполирующей функции используется полином, степень которого на единицу меньше числа узлов. Определение коэффициентов интерполирующего полинома может быть проведено разными способами (интерполирующий полином в форме Лагранжа, Стирлинга, Ньютона и др.), хотя все они дают в конечном итоге один и тот же результат.

Рассмотрим непосредственное алгебраическое определение коэффициентов интерполирующего полинома.

Постановка задачи: даны N значений сеточной функции y_i в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. Требуется построить полином:

$$P_N(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N, \quad (20)$$

принимаяющий в каждой из точек x_i соответствующее значение y_i .

Решение: пользуясь свойством полинома $P(x_i)$, запишем $N+1$ равенств:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1^1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_N x_1^N = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2^1 + a_2 x_2^2 + \dots + a_N x_2^N = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_N^1 + a_2 x_N^2 + \dots + a_N x_N^N = y_N \end{cases} \quad (21)$$

Они образуют систему из $N+1$ линейных алгебраических уравнений для определения $N+1$ неизвестных коэффициентов полинома a_i . Решив систему одним из способов, разобранных выше, можно построить искомый интерполирующий полином.

Если сеточная функция является достаточно гладкой, о чем можно судить по ее графику, для интерполяции можно использовать не все узлы. В этом случае интерполяционный полином будет давать приближенные значения функции, но погрешность будет сравнительно невелика. Использование полиномов высоких степеней, наоборот, может привести к нежелательным колебаниям значений слагаемых высокой степени и увеличению погрешности интерполяции между узлами сетки.

2. *Дифференцирование* сеточной функции. Вспомним определение производной функции $y(x)$:

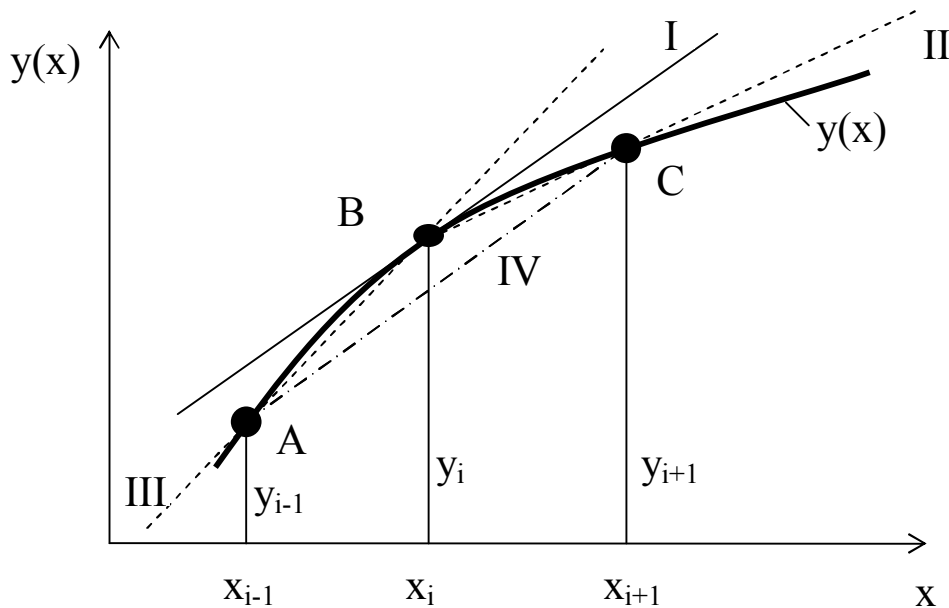
$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \quad (22)$$

"Переведем" это определение на язык сеточных функций. Если в качестве x рассмотреть один из узлов x_i , то значение Δx – это шаг сетки h , а $x_i + \Delta x = x_{i+1}$. При меньшем значении Δx сеточная функция

просто не определена. Тогда за производную сеточной функции следует принять выражение:

$$(y'_x)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (23)$$

Это можно проиллюстрировать графически:



Производная графически выражается тангенсом угла наклона касательной к графику функции в узле x_i , то есть, прямой I (сплошной). Выражение (23) — это тангенс угла наклона секущей прямой II (пунктирной, проходящей через точки B и C). Видно, что наклон линий I и II отличается друг от друга, так что выражение (23) дает весьма приближенное значение производной.

Значение приращения Δx в выражении (22) может быть и отрицательным, для дифференцируемой функции получится то же значение производной. Тогда для сеточной функции получим выражение:

$$(y'_x)_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (24)$$

На рисунке ему соответствует тангенс угла наклона секущей прямой AB (линии III). Наклон этой прямой тоже заметно отличается от наклона касательной I.

Более точное значение производной получится, если взять среднее арифметическое из значений, даваемых формулами (23) и (24):

$$(y'_x)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (25)$$

Это выражение тангенса угла наклона секущей прямой AC (линии IV). Наклон этой прямой гораздо ближе к наклону касательной, чем линий II и III, так что выражение (25) позволяет определить производную существенно точнее.

Используя разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора, можно доказать, что погрешность определения производной выражениями (23) и (24) имеет порядок величины шага h , а у выражения (25) погрешность порядка h^2 . При малой величине шага сетки погрешность выражения (25) намного меньше, чем у выражений (23), (24). Говорят, что выражение (25) имеет второй порядок точности, тогда как (23) и (24) – выражения первого порядка точности.

3. *Интегрирование* сеточной функции. Рассмотрим два способа вычисления значения определенного интеграла

$$S = \int_a^b y(x) dx$$

- вычисление по формуле *трапеций* и по формуле *Симпсона-Ньютона*. Необходимость вычисления определенных интегралов возникает не только в случаях, когда функция $y(x)$ является сеточной, но чаще, если выражение этой функции известно, но является слишком сложным, чтобы интеграл (26) можно было выразить явной формулой (вычислить "в квадратурах"). В обоих случаях для вычисления необходима сетка. Для приближенного вычисления отрезок $[a, b]$ разбивается на малые шаги h равной величины. Количество шагов для рассматриваемых методов: для метода трапеций безразлично, для метода Симпсона-Ньютона оно должно быть четным числом. Узлы сетки:

$$x_0 = a,$$

$$x_1 = a + h,$$

...

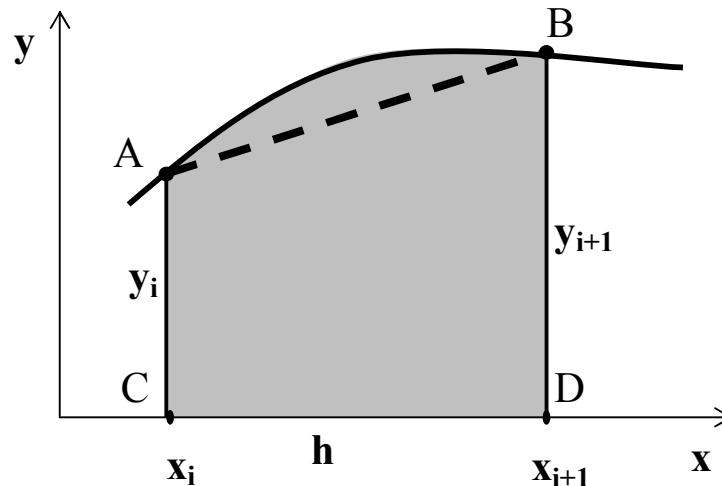
$$x_i = a + i \cdot h,$$

...

$$x_N = a + N \cdot h = b,$$

где N - число шагов. Для каждого узла вычисляется значение функции $y(x_i) = y_i$.

а) *Метод трапеций*. Вывод расчетной формулы для метода трапеций легко проводится графически, если учесть, что графическим выражением определенного интеграла является площадь под графиком функции $y(x)$:



На рисунке эта площадь заштрихована. Заменяем приближенно функцию $y(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ отрезком прямой AB и будем искать приближенное значение интеграла на этом отрезке, как площадь трапеции $ABDC$. Основаниями трапеции служат отрезки AC и BD , длины которых выражают значения функции в узлах: y_i и y_{i+1} , а высотой – длина отрезка CD , то есть шаг сетки h . Тогда площадь трапеции (произведение полусуммы оснований на высоту) равна

$$S = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1}) \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x) dx.$$

Если записать эту формулу для каждого шага сетки от $x_0 = a$ до $x_N = b$, а затем сложить получившиеся выражения, мы получим расчетную формулу трапеций:

$$\begin{aligned} S &\approx \sum_{i=0}^{N-1} (y_i + y_{i+1}) \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + y_N) = \\ &= \frac{h}{2} \cdot \left[2 \sum_{i=0}^N y_i - (y_0 + y_N) \right] = h \cdot \left[\sum_{i=0}^N y_i - \frac{y_0 + y_N}{2} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Эта формула широко применяется для приближенного вычисления определенных интегралов как вручную, так и при расчетах на компьютерах.

б) *Метод Симпсона-Ньютона*. Если вывод формулы трапеций основан на применении линейной интерполяции функции $y(x)$, то формула Симпсона-Ньютона получается, если заменить функцию на двух смежных шагах интерполяционным полиномом второй степени, построенным по трем точкам – узлам x_i, x_{i+1}, x_{i+2} и затем взять интеграл от этого полинома. Приведем эту формулу без вывода:

- для двух шагов:

$$S = \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} y(x) dx$$

- для отрезка $[a, b]$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{N/2} \frac{h}{3} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) = \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{N-1} + f_N) = \\ &= \frac{h}{3} [2(f_0 + 2f_1 + f_2 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) - (f_0 + f_N)] \end{aligned} \quad (27)$$

Формула Симпсона-Ньютона используется преимущественно в расчетах на компьютерах, так как вычисления по ней программируются так же легко, как и расчет по формуле трапеций, а погрешность вычисления существенно меньше (формула трапеций имеет третий порядок точности, а формула Симпсона-Ньютона – пятый).

3.5. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и системы таких уравнений широко встречаются в математическом моделировании. ОДУ связывает между собой значения независимой переменной (аргумента), искомой величины – функции этого аргумента и произ-

водных этой функции. Наибольший порядок производной определяет и порядок уравнения.

ОДУ первого порядка широко встречаются в ММ динамических дискретных систем, ОДУ второго и высших порядков могут возникать и в моделях континуальных стационарных систем, если характеристики системы непрерывно меняются вдоль одной пространственной координаты.

При интегрировании ОДУ появляется ряд неопределенных констант интегрирования, число которых совпадает с порядком уравнения. Для определения этих констант служат *начальные* и *граничные* условия.

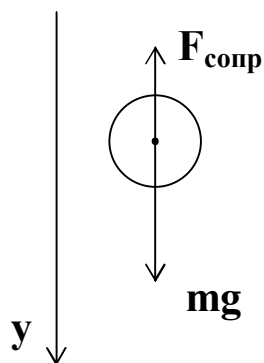
Начальные условия – это задание определенных связей для искомой функции при начальном значении аргумента (в начальный момент времени, в начальной точке какой-то линейно протяженной пространственной области). Задача отыскания решения системы ОДУ первого порядка с заданными начальными условиями называется в математике *задачей Коши*.

Граничные условия задаются при двух значениях аргумента. Обычно это условия на границах пространственной области.

Примеры:

а) тело падает с некоторой высоты. Необходимо определить зависимость скорости и положения тела над землей от времени.

На тело действуют две силы: сила тяжести, равная mg , где m – масса тела, g – ускорение свободного падения, и сила сопротивления воздуха, имеющая две составляющих – силу трения, пропорциональную скорости тела, а также вихревое сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Не вдаваясь в физические подробности, запишем общее сопротивление так: $F_{\text{сопр}} = -(av + bv^2)$. Теперь уравнение второго закона Ньютона применительно к телу в проекции на ось Oy запишется (для удобства направим ось Oy вниз):



$$m \frac{dv}{dt} = mg - av - bv^2. \quad (28)$$

Скорость тела:

$$v = \frac{dy}{dt}. \quad (29)$$

Таким образом, движение тела описывается уравнением (штрих, как обычно в математике, обозначает производную):

$$my'' = mg - ay' - b(y')^2. \quad (30)$$

Оно имеет второй порядок и требует постановки двух начальных условий. Если отсчитывать координату y от начального положения тела и считать, что его движение начинается из состояния покоя, условия примут вид:

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (31)$$

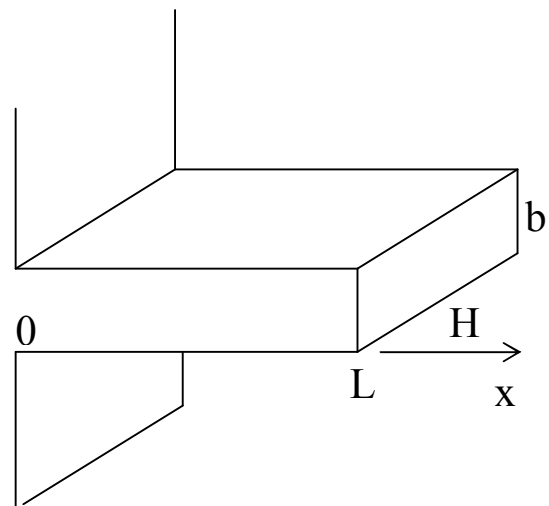
Задачу можно описать также системой двух уравнений (28), (29), каждое из которых имеет первый порядок. Таким образом, уравнение высокого порядка можно преобразовать в систему уравнений пониженного порядка, принимая производные за новые переменные аналогично (29). Начальные условия в этом случае будут выглядеть:

$$y = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (32)$$

Рассмотренная задача дает пример математической модели физического процесса, описываемого задачей Коши.

б) для улучшения охлаждения к корпусу теплового двигателя температурой T_0 приварены ребра – тонкие металлические пластины. Необходимо определить распределение температуры вдоль ребра и количество тепла, отводимое с его помощью в окружающую среду.

Распространение тепла в толще ребра описывается так называемым законом Фурье:



$$Q = -\lambda F \frac{dT}{dx}, \quad (33)$$

где Q – количество тепла, переносимое за 1 сек через сечение ребра площадью $F=bH$; λ – так называемый коэффициент теплопроводности, T – температура. Количество тепла, отводимое в окружающую среду с участка поверхности ребра длиной dx , равно (T_{oc} – температура окружающей среды):

$$dQ_{пов} = [\alpha(T - T_{oc}) + \sigma(T^4 - T_{oc}^4)]Hdx.$$

Первое слагаемое в квадратных скобках выражает охлаждение поверхности ребра омывающим его воздухом, второе – отвод тепла путем теплового излучения. Исходя из теплового баланса слоя ребра, ограниченного сечениями, соответствующими значениям координат x и $x+dx$, можем записать:

$$Q(x) = Q(x + dx) + dQ_{пов},$$

откуда

$$\frac{Q(x + dx) - Q(x)}{dx} = -\alpha(T - T_{oc}) - \sigma(T^4 - T_{oc}^4)$$

В левой части равенства стоит выражение производной

$$\frac{dQ}{dx}$$

(так как наличие дифференциала dx указывает на предельный переход при $x \rightarrow 0$, ср. (22)). С учетом (33) получаем уравнение:

$$\lambda FT'' + \alpha(T - T_{oc}) + \sigma(T^4 - T_{oc}^4) = 0. \quad (34)$$

Это уравнение второго порядка и для него надо поставить два условия. Одно из них очевидно: $T=T_0$ при $x=0$. Второе условие в теории теплообмена ставится по-разному. Простейший вариант (пригодный для длинных ребер) – считать, что температура конца ребра совпадает с температурой окружающей среды: $T=T_{oc}$ при $x=L$. Таким образом, в данной задаче для дифференциального уравнения (34) поставлены граничные условия.

Рассмотрим некоторые методы решения ОДУ. Начнем с методов решения задачи Коши, то есть, численного решения дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(x, y) \quad (35)$$

и систем уравнений вида

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \\ \dots \end{cases} \quad (36)$$

с начальными условиями

$$y = y_0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \\ \dots \end{cases} \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (37)$$

а) метод Эйлера.

Используя формулу производной сеточной функции (23), можно записать:

$$y(x+h) \approx y(x) + h \cdot y'(x)$$

Это и есть расчетная формула метода Эйлера. Для решения отрезок оси Ox , на котором надо найти решение уравнения, разбивают на малые шаги h (создают сетку), затем в правую часть подставляют значения y_0 и $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Это позволяет приближенно определить значение искомой функции $y(x)$ в точке $x_1 = x_0 + h$. Затем найденные значения x_1 и $y_1 = y(x_1)$ опять подставляют в правую часть формулы (6), вычисляют $y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ и т.д. Если обозначить $x_i = x_0 + i \cdot h$, то формулу (6) можно записать в окончательном виде

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (38)$$

б) метод Рунге-Кутты. Этот метод основан на использовании представлений производных, имеющих более высокий порядок точности. Вычисление решения в очередном узле проводится по следующим формулам (приводятся без вывода):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_1 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_2). \end{aligned} \quad (40)$$

Оба метода достаточно легко обобщаются на случай систем ОДУ – в этом случае функции в правых частях формул оказываются функциями нескольких переменных, но их значения все равно вычисляются для уже рассчитанных узлов сетки.

Метод Эйлера реализуется существенно легче, чем метод Рунге-Кутты, поэтому его можно применить даже при расчете вручную, однако его точность крайне низка – он имеет первый порядок точности, тогда как метод Рунге-Кутты – четвертый. Поэтому в компьютерных расчетах используется метод Рунге-Кутты или другие методы высокого порядка точности.

Для решения краевых задач применяются разные методы. Рассмотрим самый простой из них – метод *пристрелки* или *стрельбы*. Он основан на преобразовании краевой задачи в задачу Коши.

Рассмотрим для примера задачу (34), которую запишем в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{q}' = -\mathbf{A}(\mathbf{T} - \mathbf{T}_{oc}) - \mathbf{B}(\mathbf{T}^4 - \mathbf{T}_{oc}^4), \\ \mathbf{T}' = \mathbf{q}; \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_0 && \text{при} && \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{oc} && \text{при} && \mathbf{x} = \mathbf{L} \end{aligned}$$

Вместо последнего граничного условия при $\mathbf{x}=\mathbf{L}$ зададим дополнительное условие при $\mathbf{x}=0$: $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. Тогда мы получим задачу Коши. Величину $\mathbf{q}_0$ можно выбрать произвольно, например, принять в первом приближении равной нулю.

Решив задачу Коши одним из вышеописанных методов, мы определим значение неизвестной величины T на конце ребра, при $x=L$. Скорее всего, оно будет отличаться от значения T_{oc} . Сущность метода пристрелки заключается в том, что значение дополнительного начального условия подбирается таким образом, чтобы после решения задачи Коши оказалось выполненным граничное условие на конце рассматриваемого отрезка (в данном случае при $x=L$). Это действительно напоминает пристрелку при артиллерийской стрельбе, где дополнительному начальному условию можно сопоставить угол наклона ствола орудия, который меняется до тех пор, пока не будет выполнено граничное условие на другом конце – совпадение траектории полета снаряда с точкой местонахождения цели.

Фактически получается, что значение граничного условия на конце отрезка является функцией величины дополнительного начального условия: $T|_{x=L} = f(q_0)$. Тогда условие совпадения конечного условия с заданной величиной T_{oc} запишется в виде некоторого нелинейного уравнения:

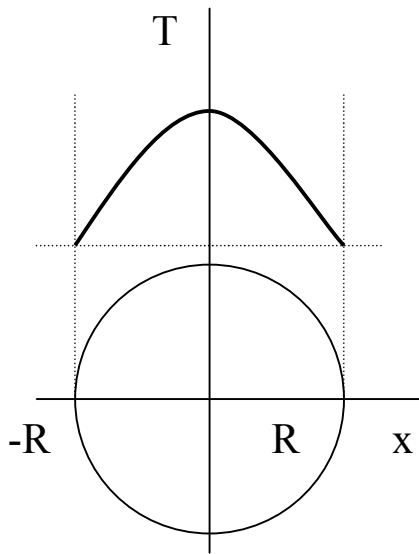
$$f(q_0) - T_{oc} = 0,$$

где функция определяется путем решения задачи Коши. Подбор граничного условия можно, таким образом, проводить с помощью описанных ранее методов решения нелинейных алгебраических уравнений, например, метода половинного деления (что, опять-таки, имеет прозрачную "артиллерийскую" аналогию – взятие цели в "вилку").

3.6. Моделирование процессов, приводящих к дифференциальным уравнениям в частных производных

При анализе химико-технологических процессов, нагрева и охлаждения тел и т.п., часто приходится иметь дело с величинами, значения которых меняются от одной точки тела к другой непрерывно. Так, если поместить головку сыра для хранения в холодильник, ее температура будет меняться постепенно. Сначала остынет поверхностный слой, тогда как центральная часть головки будет оставаться теплой. Постепенно охлажденная зона будет занимать все более толстый слой, но в центре головки температура долго будет оставаться более высокой, чем у поверхности. Изменение температуры внутри головки можно представить графиком $T(x)$, где x – координата, отсчи-

тываемая вдоль диаметра головки. Очевидно, температура является функцией расстояния от центра головки, а также зависит от времени t :



$$T = f(r, t), \quad r = |x|$$

Эта функция непрерывна, т.к. температура в сплошной среде не может измениться скачкообразно. Если вместо симметричной головки взять тело иной формы, температура в нем окажется функцией трех координат и времени:

$$T = f(x, y, z, t) \quad (42)$$

Такое непрерывное распределение температуры по точкам в сплошной среде называется *полем* температуры. Поля могут быть образованы и другими величинами – давлением, концентрацией растворённого вещества и т.п.

Бывают векторные поля; например, поле скоростей в жидкости или газе. Если в жидкости движется какое-то тело (например, весло в воде), оно увлекает за собой часть жидкости; в то же время, жидкость вдали от тела остается неподвижной. Вектор скорости изменяется от точки к точке, постепенно уменьшаясь до нуля, так что

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t).$$

Такое векторное поле можно представить, как комбинацию трех скалярных полей проекций скорости на оси координат.

3.7. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Рассмотрим процесс теплообмена в твердом теле. Количество тепла, передаваемое за некоторое бесконечно малое время dt через бесконечно малый элемент dF поверхности, нормальной к координатной оси Ox , пропорционально dt и dF , а также зависит от скорости изменения температуры в направлении оси Ox – чем быстрее изменяется температура, тем больше передается тепла. В большинстве слу-

чаев связь количества передаваемого тепла со скоростью изменения температуры вдоль Ox принимается линейной:

$$dQ_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy dz dt. \quad (43)$$

Коэффициент пропорциональности λ называется коэффициентом теплопроводности; знак "минус" указывает на известный из физики факт – тепло передается в сторону убывания температуры.

Отношение

$$\frac{dQ_x}{dt dy dz} = q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

называется плотностью потока тепла в направлении координаты x (численно величина q_x соответствует количеству тепла, передаваемому за 1 сек через 1 м^2 поверхности). Аналогично можно записать:

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

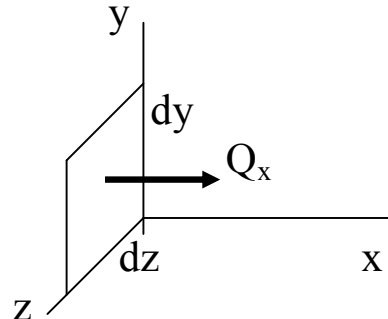
$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Величины q_x , q_y , q_z можно рассматривать, как компоненты вектора

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k},$$

называемого вектором плотности потока тепла. Он определяет направление переноса тепла через данную точку пространства и количество тепла, переносимого за 1 сек в расчете на 1 м^2 площади поверхности, нормальной к этому направлению. Производные температуры по координатам тоже являются компонентами вектора, называемого градиентом температуры:

$$\text{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}.$$



Для определения градиента температуры необходимо знать вид функции (42), поэтому он является характеристикой температурного поля. Аналогично вводятся градиенты других величин – давления, концентрации и т.п. (существуют и градиенты векторных величин, например, скорости, но их рассмотрение требует применения сложного математического аппарата).

В векторной форме закон теплопроводности записывается:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad} T.$$

Это соотношение называется *законом Фурье*. Аналогичный вид имеет так называемый *закон Фика*, описывающий диффузию какого-либо вещества в сплошной среде:

$$\vec{g}_i = -\rho D_i \cdot \text{grad} c_i,$$

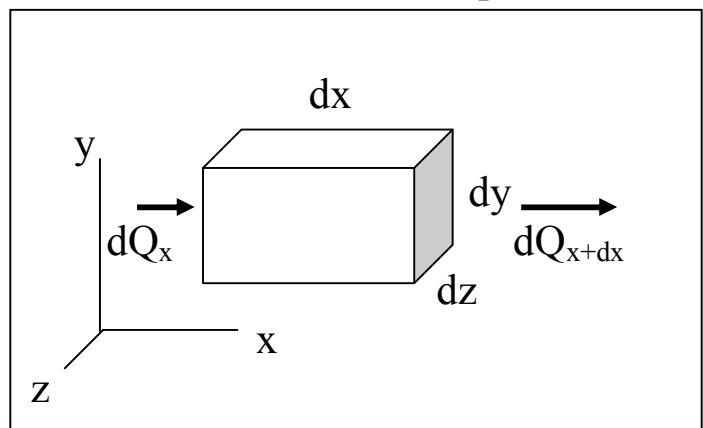
где вектор $\vec{g}_i$ – вектор плотности потока массы i -компонента смеси веществ (модуль этого вектора показывает, сколько данного вещества проходит за 1 сек через малый элемент поверхности, нормальной к направлению переноса, в расчете на 1 м² площади поверхности), **grad** c_i – градиент концентрации данного вещества, ρ – плотность среды, D_i – коэффициент диффузии данного вещества.

В силу аналогии законов Фурье и Фика многие закономерности и расчетные формулы теплообмена оказываются справедливыми и для массообмена (диффузии).

Рассмотрим бесконечно малый элемент сплошной среды в виде параллелепипеда с ребрами dx ,

dy , dz . Через левую грань объема в него поступает количество теплоты dQ_x , описываемое формулой (43). Одновременно через правую грань из него уходит теплота

$$dQ_{x+dx} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} dy dz dt.$$



Если температура меняется вдоль оси Ox , значения производных $(\partial T / \partial x)$ на противоположных гранях неодинаковы. В итоге внутри рассматриваемого элемента остается тепло

$$d^2Q_x = -\lambda dydzdt \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} \right] =$$

$$= -\lambda dydzdt \cdot dx \left[\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}}{dx} \right].$$

Если dx – бесконечно малая величина (т.е., в конце вывода должен быть совершен предельный переход при $dx, dy, dz, dt \rightarrow 0$), выражение в квадратных скобках является второй производной температуры по x (со знаком "минус"); тогда

$$d^2Q_x = \lambda \cdot dV \cdot dt \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Аналогично можно рассмотреть две другие пары противоположных граней. Тогда общее количество тепла, накопленное в объеме за время dt , равно

$$d^2Q = d^2Q_x + d^2Q_y + d^2Q_z = \lambda \cdot dV \cdot dt \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Накопление тепла вызывает нагрев вещества в объёме:

$$d^2Q = dm \cdot c \cdot (\partial T)_t = \rho \cdot dV \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt,$$

где $(\partial T)_t = (\partial T / \partial t) \cdot dt$ - частный дифференциал температуры.

Приравняв два выражения для d^2Q , получаем

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \lambda \nabla^2 T \quad (44)$$

- *дифференциальное уравнение теплопроводности*. Оно получено в предположении постоянства λ и отсутствия внутреннего тепловыделения в сплошной среде (такое тепловыделение может быть обусловлено, например, протеканием химической реакции в веществе или другими физико-химическими процессами). Более общие формы уравнения теплопроводности рассматриваются в литературе по тепломассообмену.

Символом $\nabla^2 T$ обозначен так называемый *лапласиан* температуры (сумма вторых частных производных по координатам). Лапласианы различных величин часто встречаются в дифференциальных уравнениях в частных производных.

Аналогичным образом (применяя законы физики к бесконечно малым объемам) можно получить и другие дифференциальные уравнения, описывающие процессы в сплошных средах. Примеры таких уравнений:

- уравнение диффузии:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = D_i \left(\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_i}{\partial z^2} \right) = D_i \nabla^2 c_i;$$

- волновое уравнение (уравнение распространения волн в сплошной среде):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u,$$

где u – величина, волновое колебание которой рассматривается (давление, температура, электрический потенциал и др.), v – скорость распространения волны;

- уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0, \quad (45)$$

описывающее стационарные распределения различных величин (температуры, электростатического потенциала и др.) в сплошной среде.

3.8. Краевые задачи для уравнений в частных производных

Уравнение теплопроводности применимо к анализу распространения тепла в любой системе – от куска сыра до стенки атомного реактора. Поэтому при рассмотрении конкретных задач к уравнению надо добавить описание особенностей задачи, отличающих ее постановку от других задач теплопроводности.

Эти особенности называют *условиями однозначности*. Сюда входит описание формы и указание размеров тела, указание значений его физических свойств.

Наиболее важными среди условий однозначности являются *краевые условия*, разделяющиеся на пространственные (граничные) и временные (начальные). Их количество зависит от типа уравнений.

Дифференциальные уравнения в частных производных можно разделить на три типа:

I. *Эллиптические* уравнения описывают стационарные (установившиеся) процессы в замкнутой области пространства. Они не содержат производных по времени и к ним ставятся только граничные условия (на границах рассматриваемой области), которые в свою очередь могут быть разного рода. Наиболее важные:

а) Условия I рода, когда на границах области задаются значения искомых величин;

б) Условия II рода, когда на границах задаются значения производных от искомых величин;

в) Условия III рода, когда на границах области задаются соотношения между значениями искомых величин и их производных; например, соотношение

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_0)$$

выражает так называемый "закон Ньютона-Рихмана" для теплообмена тела с омывающей его жидкостью температуры T_0 (здесь α - постоянный коэффициент теплоотдачи).

Примером эллиптического уравнения может служить уравнение Лапласа.

II. *Параболические* уравнения описывают нестационарные процессы в замкнутой области. Они содержат первые производные искомых величин по времени и краевые условия к ним, помимо граничных, включают еще и начальные – значения искомых величин в начальный момент процесса. Примерами параболических уравнений служат уравнения теплопроводности и диффузии.

III. *Гиперболические* уравнения описывают волновые процессы. В них входят вторые производные по времени; соответственно, в состав краевых условий входят два начальных – значения искомых величин и их производных в начале процесса. Пример гиперболического уравнения – волновое уравнение.

3.9. Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Сложная структура дифференциальных уравнений в частных производных приводит к тому, что непосредственное решение их возможно только в редких случаях. Обычно прибегают к приближенным численным методам.

Рассмотрим в качестве простого примера стационарное распределение температуры в двумерной области (например, в тонкой длинной балке квадратного сечения, неравномерно подогреваемой и охлаждаемой с поверхности). Распределение температуры описывается дифференциальным уравнением теплопроводности, в котором отсутствуют производные по времени (процесс стационарный) и по координате z (в длинной балке можно не учитывать изменение температуры по длине). Поскольку $\lambda \neq 0$, уравнение (44) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (46)$$

т.е., к двумерному уравнению Лапласа.

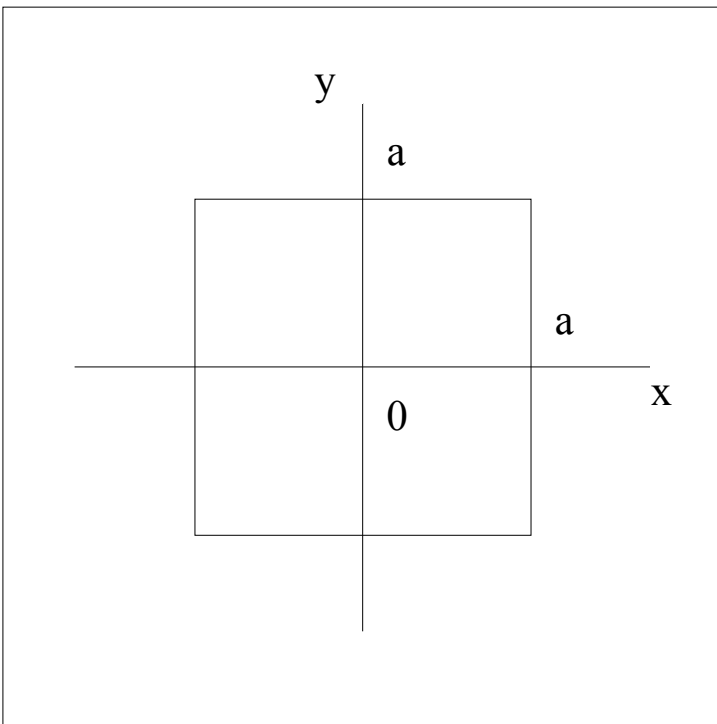
Пусть справа и слева балка подогревается, а сверху и снизу охлаждается, например, по закону:

$$T = 300 + 50 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \quad (47)$$

при $x = \pm a$,

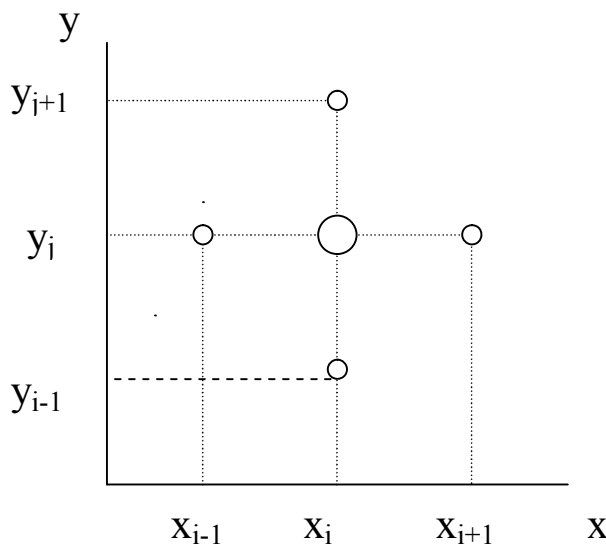
$$T = 300 - 50 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (48)$$

при $y = \pm a$.



Выражения (47, 48) являются граничными условиями к уравнению (46).

Для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных чаще всего пользуются различными вариантами метода сеток. Накроем рассматриваемую область сеткой из $2N+1$ горизонтальных и $2N+1$ вертикальных линий, равноотстоящих друг от друга. Расстояние между соседними линиями составит тогда $h = a / N$. Точки пересечения линий называются *узлами сетки*. Будем обозначать линии сетки номерами: i – для вертикальных (соответствующих определенному значению $x_i = ih$, если номер i изменяется от $-N$ до N) и j – горизонтальных (соответствующих определенным значениям $y_j = jh$).



Тогда узел сетки можно определить по номерам линий, на пересечении которых он лежит.

Рассмотрим один из узлов сетки с номерами i, j .

Обозначим $T_{i,j} = T(x_i, y_j)$. Аналогично обозначаются значения температуры или ее производных в других узлах сетки. Используя разложение функции $T(x, y)$ в ряд Тейлора, можно за-

писать:

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_{i,j} h^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_{i,j} h^4 + \dots$$

$$T_{i-1,j} = T_{i,j} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_{i,j} h^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_{i,j} h^4 - \dots$$

Сложим эти выражения почленно:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} = 2T_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_{i,j} h^4 + \dots$$

Отсюда можно выразить вторую производную:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right) h^2 + \dots \quad (49)$$

Такой способ получения выражений для производных сеточных функций является более общим, чем графический, представленный в п. 3.4.

Аналогично можно представить и вторую производную температуры по координате y . Подставив приближенные выражения производных в уравнение (48), получим его разностное представление:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2} = 0,$$

или

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}). \quad (50)$$

Записав такие соотношения для каждого узла сетки, получим систему из $(N-1)^2$ линейных алгебраических уравнений для нахождения значений температуры в узлах (кроме узлов, лежащих на границах, для которых значения температур определяются граничными условиями (47, 48)).

Решение этой системы можно осуществить различными способами. Наиболее простым (но не самым эффективным) является метод последовательных приближений.

3.9. Оптимизационные модели. Основные понятия и определения

Под *оптимизацией* понимают процесс выбора наилучшего варианта среди всех возможных. Например, выбор наилучшего варианта конструкции, наилучшего способа раскроя материала, наилучшего режима работы оборудования, наилучшего графика перевозок и т. п.

Если в конкретной задаче обозначить независимые параметры через $x_1, x_2, \dots, x_n$, а зависимый параметр через P , то величину P можно представить, как функцию:

$$P = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (51)$$

Процесс оптимизации будет заключаться в том, чтобы найти такие значения аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ из области определения функции P , при которых эта функция достигает наибольшего или наименьшего значения. Функцию P называют *целевой функцией*. Параметры $x_1, x_2, \dots, x_n$ в инженерной практике называют *проектными параметрами* (при решении экономических задач – *параметрами плана*), область изменения проектных параметров – *областью проектирования*. Количество n проектных параметров, подлежащих учёту, определяет размерность задач и позволяет разделить их на *одномерные* ($n = 1$) и *многомерные* ($n \geq 1$).

При решении конкретных задач, как правило, возникает необходимость учитывать дополнительные ограничения, налагаемые на проектные параметры, а также связи между параметрами, отражающие законы природы, сырьевые и материальные ресурсы, спрос и предложения рынка и т.п. Такие задачи называются *условными*.

Связи и ограничения можно описать в виде *ограничений–равенств, ограничений–неравенств*, или их совокупности:

Ограничения – равенства:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Ограничения – неравенства:

$$\begin{aligned} a_1 \leq q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 \\ a_2 \leq q_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_k \leq q_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_k \end{aligned} \quad (52)$$

Ограничения сужают область проектирования и иногда позволяют выразить одни проектные параметры через другие, что позволяет уменьшить размерность решаемой задачи и сокращает время, затрачиваемое на решение.

Пример. Необходимо сконструировать контейнер в форме прямоугольного цилиндра, так, чтобы при заданном объёме длина сварных швов была наименьшей.

Целевой функцией (величиной подлежащей оптимизации) является длина швов L . Она зависит от двух параметров: высоты контейнера H и радиуса R , и определяется по формуле:

$$L = F(H, R) = 4\pi R + H,$$

где R, H – проектные параметры. Ограничение на объем банки

$$V_0 = \pi R^2 H$$

является ограничением-равенством. Воспользуемся им для уменьшения количество проектных параметров. Этого можно достичь, выразив R через V_0 и H , или, выразив H через V_0 и R .

В первом случае:

$$R = \sqrt{\frac{V_0}{\pi H}} \quad \text{и} \quad L = F(H) = 4\pi \sqrt{\frac{V_0}{\pi H}} + H.$$

Во втором:

$$H = \frac{V_0}{\pi R^2} \quad \text{и} \quad L = F(R) = 4\pi R + \frac{V_0}{\pi R^2}.$$

Во втором случае оптимизируемая функция оказалась проще, поэтому возьмём её в качестве целевой при *естественных* ограничениях: $H > 0$, $R > 0$.

Теперь можем сформулировать задачу в стандартной форме:

Задача: одномерная.

Проектный параметр: R .

Целевая функция, минимум которой надо найти:

$$L(R) = 4\pi R + V_0/\pi R^2.$$

Основываясь на данном примере, можно заключить, что для разработки математической модели задачи оптимизации необходимо:

- По смысловому содержанию выделить проектные параметры.
- Записать целевую функцию.
- Записать систему ограничений и с помощью ограничений-равенств максимально снизить количество проектных параметров (размерность задачи).

3.10. Схема решения задач оптимизации

Процесс выбора наибольшего или наименьшего значений целевой функции в области проектирования можно провести по схеме:

1. Определить точки максимума или минимума целевой функции внутри области проектирования и вычислить в этих точках её значения.
2. Вычислить значения целевой функции на границе области проектирования.
3. Сравнить полученные значения функции и выбрать среди них требуемое экстремальное.
4. За значения проектных параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$ принять значения, удовлетворяющие выбранному значению целевой функции.

Оценим эту схему с точки зрения практической реализации. Для нахождения максимального или минимального значения функции мы располагаем классическим методом приравнивания к нулю производных, применимость которого распространяется только на достаточно простые, непрерывные и дифференцируемые целевые функции. Получаемая при этом система уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (53)$$

подлежит решению. Решение таких систем даже для определения одной точки, подозрительной на экстремум - весьма трудоёмкое мероприятие. А ведь целевая функция может иметь внутри области проектирования несколько экстремумов.

Далее, если граница области проектирования задана аналитическими соотношениями в виде равенств или неравенств, то практически невозможно вычислить значения целевой функции в каждой точке границы. Отсюда следует, что для нахождения экстремумов целевых функций необходимы специальные численные методы.

3.11. Численные методы решения задач безусловной одномерной оптимизации

Пусть требуется найти экстремум (максимум или минимум) функции одной независимой переменной

$$y = f(x) \quad \text{при } a \leq x \leq b.$$

Интервал изменения параметра x принято называть интервалом проектирования или интервалом неопределенности.

В дальнейшем условимся:

- рассматривать только поиск минимума целевой функции, поскольку в силу симметричности функции $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ относительно оси Ox , минимум функции $y = f(x)$ является максимумом для функции $y = -f(x)$;

- предполагать, что на интервале неопределённости целевая функция *унимодальна*, т.е. имеет только один экстремум.

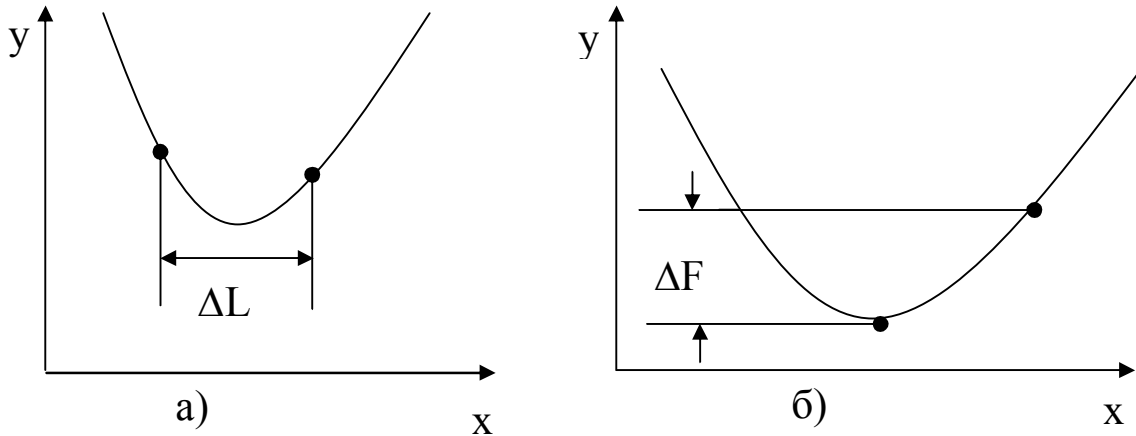
Последнее предположение не ограничивает применимость методов оптимизации для целевых функций, имеющих несколько *локальных* (местных) экстремумов, т.к. найдя локальные экстремумы и, сравнив их, найдем экстремум *глобальный* (справедливый для всей области проектирования).

Классический метод для функции одной переменной приводит к решению уравнения $\frac{df}{dx} = 0$. Найти его корни можно:

- для простых уравнений непосредственно: путем выделения переменной x для уравнений вида $ax + b = 0$; через дискриминант для уравнений квадратных: $ax^2 + bx + c = 0$ и приводящихся к ним и т.д.;

- для сложных - применением специальных методов, например последовательных приближений, половинного деления (см. выше п. 3.2).

Если же функция $y = f(x)$ или ее производная сложны или имеют разрывы в некоторых точках интервалах $[a, b]$, то применение классического приема затруднительно или невозможно. Численные методы в этих случаях действуют безотказно. Суть этих методов заключается в сужении границ интервала неопределенности (внутри которого заключена искомая точка экстремума) до таких размеров, в пределах которых любая точка x может быть взята в качестве приближенного решения с некоторой, заранее оговорённой точностью. Точность решения, естественно, задается разработчиком либо по длине интервала неопределенности ΔL , либо по изменению целевой функции ΔF (см. рисунок), исходя из смыслового содержания решаемой задачи.



Определение погрешности:

- а) по длине интервала неопределённости ΔL ;
- б) по значениям целевой функции ΔF .

Условимся задавать точность по длине интервала неопределённости ΔL .

Наиболее простым для понимания является метод *половинного деления*. Этот метод сужает интервал на каждом этапе ровно вдвое и требует на каждом шаге вычисления значения функции в двух точках.

Алгоритм метода половинного деления:

1. Определяется первоначальный интервал неопределённости $[a, b]$ (анализом графика или таблицы значений функции $F(x)$).
2. Определяется численное значение производной F'_x в точке $c = (a+b)/2$, то есть, в середине интервала. Для этого можно использовать приближенное выражение второго порядка точности (25); в качестве шага h берется значение $\varepsilon/2$;
3. Если производная положительна, за новый интервал неопределённости принимается $[a, c]$, в противном случае $[c, b]$. Если производная окажется равной нулю, искомая точка минимума – это точка c .
4. Шаги 2, 3 повторяются до тех пор, пока новый интервал неопределённости не окажется короче, чем допустимая величина погрешности ε . Тогда за искомую точку принимается середина последнего найденного интервала.

(Замечание: из выражения (25) видно, что можно не определять производную, а просто поставить условие:

$$F\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) > F\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Если оно выполнено, производная положительна, в противном случае – отрицательна).

3.12. Многомерная безусловная оптимизация

Пусть целевая функция зависит от n проектных параметров:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для простоты изложения условимся отыскивать экстремум целевой функции, зависящей от двух проектных параметров $y = F(x_1, x_2)$. Зададим координаты начальной точки $M^0(x_{10}, x_{20})$. На первом этапе параметр x_1 зафиксируем, а x_2 будем считать переменным. Целевая функция будет зависеть только от одного параметра. x_2 , так что, применив к ней вышеописанный метод решения задач одномерной оптимизации, находим экстремальное значение по этому свободному параметру, то есть, при фиксированном значении параметра $x_1 = x_{10}$. На этом первый шаг заканчиваем. Взяв полученную точку в качестве начальной и, приняв теперь в качестве свободного параметра x_1 , находим экстремум по этому параметру, зафиксировав, соответственно, x_2 . В результате получаем конечную точку $M^1(x_{11}, x_{21})$ первого этапа. Взяв её в качестве стартовой на втором этапе, и, повторив схему движения первого этапа, получим возможность продолжения пути на третьем этапе и т.д. Процесс следует закончить, если для двух соседних этапов: k -го и $(k+1)$ -го выполняются соотношения

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon_i \quad \text{для } i = 1, 2,$$

где ε_i – точность вычислений i -го параметра. Впрочем, точность может быть одинаковой по всем параметрам.

3.13. Условная оптимизация при решении инженерных задач

До сих пор мы рассматривали численные методы для задач безусловной оптимизации. На практике довольно часто задача кроме целевой функции предполагает наличие дополнительных условий и становится задачей условной оптимизации. Наиболее простой случай такой оптимизации имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \text{ при } a_i \leq x_i \leq b_i,$$

т.е. для каждого проектного параметра введены граничные условия.

Такую задачу можно решить по той же схеме решения, что и для безусловной оптимизации. В том случае, когда значение переменной x_i на k -ой итерации выходит на (или за) нижнюю границу, т.е. оказывается $x_i^k \leq a_i$, то за минимальное значение $\overline{x_i}$ принимают a_i и поиск продолжается по остальным переменным. Аналогично осуществляется поиск и для верхней границы.

3.14. Линейное программирование

Мы рассмотрели задачи условной оптимизации, которые могут быть сформулированы при решении инженерных задач. В экономике такой класс задач является предметом изучения раздела науки – *математического программирования*. Последнее слово появилось в наименовании по той причине, что широкое решение таких задач стало возможным только с появлением электронной вычислительной техники. Совокупность проектных параметров называется *планом*, а сами параметры – *компонентами плана*. Ограничений в таких задачах может быть сколько угодно. Самый простой случай ограничений - это когда количество ограничений равно количеству проектных параметров. В этом случае задача имеет единственное решение. Такие задачи практически не представляют интереса, т.к. не предоставляют возможности выбора.

В настоящее время уже выделился определённый класс задач, эффективно решаемых методами математического программирования. Это задачи: распределительные; управления запасами; замены

оборудования; упорядочения и согласования; выбора оптимальных режимов движения и др.

Если в решаемой задаче целевая функция и ограничения линейно зависят от проектных параметров, то задача относится к разделу *линейного программирования*, в противном случае к нелинейному. Мы рассмотрим только задачи линейного программирования.

Рассмотрим пример: Цех располагает четырьмя группами оборудования А, В, С, D и выпускает 2 вида продукции. Количество единиц оборудования и его занятость приведены в таблице. Там же даны величины прибыли, получаемой за счет выпуска единицы продукции каждого вида.

Задача: определить план выпуска продукции каждого вида, обеспечивающий максимальную прибыль.

Группы оборудования	Количество единиц оборудования в группе	Количество единиц оборудования, используемых при выпуске единицы продукции	
		Вида 1	Вида 2
А	12	2	2
В	10	1	2
С	16	4	0
D	12	0	4
Прибыль		200 руб.	300 руб.

Математическая постановка задачи:

Обозначим через x_1 и x_2 – количество единиц продукции 1-го и 2-го вида соответственно, планируемое к выпуску. Тогда целевая функция выразится:

$$L(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2. \quad (54)$$

Ограничения, определяющие занятость оборудования по группам:

$$\begin{array}{ll}
 \text{А: } 2x_1 + 2x_2 \leq 12 & x_1 + x_2 \leq 6, \\
 \text{В: } x_1 + 2x_2 \leq 10 & \text{или } x_1 + 2x_2 \leq 10, \\
 \text{С: } 4x_1 + 0x_2 \leq 16 & x_1 \leq 4,
 \end{array} \quad (55)$$

$$D: 0x_1 + 4x_2 \leq 12 \quad x_2 \leq 3.$$

Естественные ограничения:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (56)$$

Требуется определить наибольшее значение целевой функции $L(x_1, x_2)$ при ограничениях (55) и (56).

Рассмотрев пример, можем сформулировать задачу линейного программирования в общем виде: необходимо найти наибольшее (наименьшее) значение целевой функции

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (57)$$

при ограничениях: ресурсных:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (58)$$

и естественных:

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (59)$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных в ограничениях.

В задачах линейного программирования ограничения формируют область допустимых решений.

Если задача имеет только два параметра, то она может быть решена графически. При большем числе параметров для решения надо использовать специальный метод, называемый *симплекс – методом*.

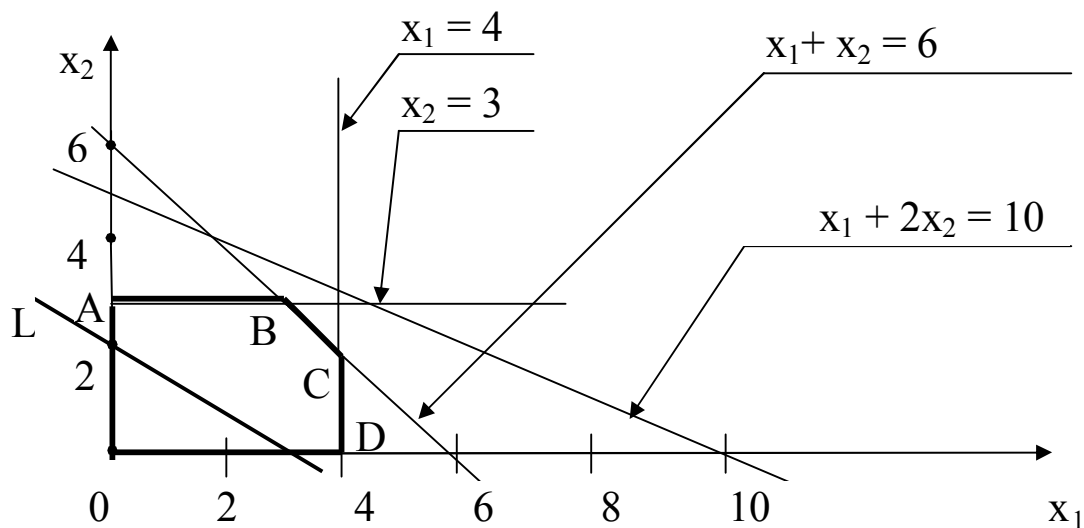
Проиллюстрируем суть графического метода на примере решения задачи, поставленной выше

1. На плоскости построим систему координат x_1, x_2 .

2. Построим область допустимых решений. Из естественных ограничений (47) следует, что она расположена в первой координатной четверти, т.е. выше оси Ox_1 и правее оси Ox_2 .

На первом ресурсном ограничении покажем как строится область. Сохранив в ограничении только знак равенства, превращаем это ограничение в уравнение прямой $x_1 + x_2 = 6$. Строим эту прямую. Она делит плоскость на две полуплоскости: полуплоскость, лежащую выше и полуплоскость лежащую ниже её. Для определения требуемой полуплоскости возьмём любую точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и поставим её координаты в рассматриваемое ограничение – неравенство. Для простоты вычислений возьмём точку начала координат, т.е. точку $O(0,0)$, поставив её координаты в неравенство, получим верное выражение: $0 \leq 6$. Из этого следует вывод о том, что в область допустимых решений входит полуплоскость, расположенная ниже прямой $x_1 + x_2 = 6$.

Аналогично определяем полуплоскости, соответствующие остальным ограничениям. Общая часть всех полуплоскостей образует область проектирования **OABCD**, выделенную на рисунке.



Вершинами образованного пятиугольника **OABCD** являются точки пересечения прямых. Любая точка, принадлежащая этому пятиугольнику, определяет допустимое решение задачи или допустимый план, который может быть выполнен **при имеющихся ресурсах**.

3. Для нахождения оптимального плана нам необходимо найти такую точку, принадлежащую пятиугольнику, в которой целевая функция достигает наибольшего значения.

Рассмотрим на плоскости x_1x_2 линии уровня этой целевой функции; они представляют семейство прямых линий, параллельных прямой

$$L = 200x_1 + 300x_2$$

Зададим значение L таким, чтобы прямая проходила через область допустимых решений. При $L = 600$ получим прямую $2x_1 + 3x_2 = 6$. Построим её. Параллельный перенос этой прямой вверх соответствует возрастанию целевой функции, вниз – убыванию. Строим семейство параллельных прямых до тех пор, пока одна из них не соприкоснется с областью допустимых решений в единственной точке. В нашем случае общей последней точкой является точка В с координатами $x_1 = 3$ и $x_2 = 3$, полученная пересечением линий: $x_1 + x_2 = 6$ и $x_1 = 3$. Решение $x_1 = 3$ и $x_2 = 3$ – единственное из возможных, позволяющих нам получить наибольшую прибыль; при данных значениях параметров она достигнет 1500 руб.

В общем случае предельная прямая может совпасть с одной из границ области допустимых решений. Тогда любая точка этой границы является оптимальным решением, что дает право говорить о бесчисленном множестве решений задачи.

Анализ полученного решения:

1. Анализируя график можно получить информацию о том, какие ресурсные ограничения являются существенными, а какие таковыми не являются. В нашем случае ограничение

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

находится вне области допустимых решений, значит, является несущественным и при дальнейших исследованиях его можно не учитывать. Остальные ограничения существенны.

2. В оптимальной точке неравенства переходят в точные равенства, следовательно, соответствующие им ресурсы используются полностью (такие ресурсы называются *лимитирующими*).

3. Подставляя оптимальные значения параметров в оставшиеся ограничения, получим возможность видеть, что одна единица оборудования С и три – оборудования В свободны и можно распорядиться ими по своему усмотрению.

3.15. Обработка экспериментальных данных

Пусть в результате эксперимента получена таблица, в которой x_i - значения независимой переменной, y_i - значения исследуемой функции.

X:	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Y:	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Поскольку измерения ведутся с той или иной погрешностью, точки (x_i, y_i) не укладываются на гладкую кривую даже если искомая зависимость $Y(X)$ является гладкой. В общем случае, между этими точками можно провести бесчисленное множество различных гладких кривых, однако, если задать дополнительные условия, то можно получить единственную кривую. Чаще всего условия задаются в виде требования расположения кривой среди точек таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений этой кривой от экспериментальных данных была наименьшей. Построение такой кривой и определение алгебраической формулы выражаемой ею функции называется *аппроксимацией экспериментальных данных по методу наименьших квадратов*.

Предполагаемую функциональную зависимость назовём *эмпирической* и обозначим через $F(x)$. Как уже указано, её аналитическое выражение подбирается так, чтобы величина

$$S = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - y_i]^2 \quad (60)$$

была наименьшей.

Решение поставленной задачи осуществим в два этапа. На первом этапе подберём подходящую эмпирическую формулу и запишем её в общем виде через неизвестные параметры **a**, **b** и т.д. На втором этапе определим численные значения этих параметров.

Подбор эмпирической формулы начинается с построения графика по результатам проведённого эксперимента. На график наносятся экспериментально найденные точки (x_i, y_i) . Затем по виду набора точек, путём сравнения его с графиками известных зависимостей таких, как:

1. $y = a + bx$ - линейная функция
2. $y = ab^x$ - показательная функция

- 3. $y = a + b \cdot \ln x$ - логарифмическая функция
- 4. $y = ax^b$ - степенная функция
- 5. $y = a + b/x$ - гиперболическая функция
- 6. $y = ae^{bx}$ - экспоненциальная функция
- 7. $y = ax^2 + bx + c$ - полином второй степени

- выбирается общий вид эмпирической формулы.

Процесс нахождения параметров эмпирических зависимостей продемонстрируем на примере линейной зависимости

$$Y = A + BX. \quad (61)$$

Отклонения этой функции от экспериментальных значений y_i в каждом узле x_i равны

$$E_i = y_i - A - Bx_i. \quad (62)$$

Из квадратов отклонений составим функционал

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^n E_i^2 = \sum (y_i - A - Bx_i)^2. \quad (63)$$

Выберем неизвестные A и B такими, при которых этот функционал принимает наименьшее значение. Необходимые условия минимума функционала S :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^n [(y_i - A - Bx_i)(-1)] = -2 \left\{ \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n A - B \sum_{i=1}^n x_i \right\} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial B} = 2 \sum_{i=1}^n [(y_i - A - Bx_i)(-x_i)] = -2 \left\{ \sum_{i=1}^n y_i x_i - A \sum_{i=1}^n x_i - B \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} = 0 \end{cases} \quad (64)$$

Полученная система содержит два уравнения и две неизвестные величины A и B . Для решения приведём систему к виду:

$$\begin{cases} nA + B \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ A \sum_{i=1}^n x_i + B \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (65)$$

Решив её (с использованием правила Крамера), найдем:

$$B = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - n \sum_{i=1}^n y_i x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (66)$$

$$A = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - B \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Параметры в других зависимостях могут быть найдены аналогичным путём. Однако гораздо проще сначала привести зависимость к линейной, а затем воспользоваться только что выведенными формулами.

Продemonстрируем этот процесс на примере зависимости $y = ax^b$.

Прологарифмировав, получим $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x$. Обозначив:

$$B = b; \quad Y = \ln y; \quad A = \ln a; \quad X = \ln x,$$

получим

$$Y = A + BX.$$

С учетом этих обозначений формулы для расчёта коэффициентов **A** и **B** примут вид:

$$\mathbf{B} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln y_i \right) - n \sum_{i=1}^n (\ln y_i)(\ln x_i)}{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2},$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln y_i - \mathbf{B} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right).$$
(67)

Возвращаясь к первоначальным переменным, будем иметь: $\mathbf{b} = \mathbf{B}$, $\mathbf{a} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}}$. Определив значение $\mathbf{a}$, и, подставив $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в исходную формулу, получим её конкретный вид. Значение $\mathbf{A}$ отдельно можно было и не вычислять, а сразу воспользоваться формулой

$$\mathbf{a} = \exp \left\{ \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln y_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \right\}.$$
(68)

Для выбора из нескольких аппроксимационных зависимостей лучшей нужно определить их параметры; затем для каждой зависимости вычисляется величина:

$$\Omega = \frac{\sum_{i=1}^n [y_i^3 - y_i^T]^2}{n - m},$$
(69)

где y_i^3 - экспериментальные значения (исходные данные в таблице);

y_i^T - значения, рассчитанные с помощью той или иной аппроксимационной функции;

n - число экспериментальных точек;

m - количество параметров в формуле.

Величина Ω называется *выборочной дисперсией* или *критерием Гаусса*. Согласно принципу оценки по критерию Гаусса наилучшей функциональной зависимостью будет та, при которой величина Ω минимальна.

IV. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Курс лабораторных работ предусматривает практическое знакомство студентов с простыми численными методами решения задач математического моделирования. Для реализации методов выбран пакет электронных таблиц EXCEL. Он позволяет проводить достаточно сложные вычисления; при этом студенты наглядно могут представить себе механизм действия того или иного метода.

Для выполнения лабораторных работ студенты должны быть знакомы с устройством пакета EXCEL. Он изучается в курсе "Информационные технологии". Перед началом выполнения работ следует повторить следующий материал

1. Структура файла EXCEL;
2. Содержание и значение ячейки;
3. Применение формул. Изменение формул при автозаполнении. Абсолютные и относительные ссылки в формулах.
4. Адреса и имена ячеек.
5. Математические и логические функции.

Задания для выполнения лабораторных работ содержат по 25 различных вариантов. Номер конкретного варианта выбирается согласно личному шифру студента, как остаток от деления двузначного числа шифра на 25 (аналогично тому, как это делалось в курсе информатики). Для шифров 00, 25, 50, 75 номер варианта – 25.

4.1. Работа 1: Табулирование функций.

Цель работы: закрепление навыков простых вычислений, применения логических функций и построения диаграмм.

Работа состоит из двух частей:

1. Табулирование функции одной переменной.

Пример: составить таблицу значений функции

$$y = 5xe^{-x}$$

на отрезке $[0; 5]$ с шагом 0,25 и построить ее график.

Для начала создаем заголовок таблицы. В ячейку A1 вносится с клавиатуры текст '**Значения**', затем ячейки A1:B1 выделяются мышью и нажимается кнопка [Объединить и поместить в центре] на панели форматирования. Введенный текст помещается в центре объединенной ячейки – части заголовка создаваемой таблицы. Аналогичным образом ячейки A2:B2 заполняются текстом '**функции** $y = 5xe^{-x}$ '. После ввода каждого текста нажимается клавиша <Enter>. При этом часть введенного текста может исчезнуть из вида (если он не помещается в ячейку). Этот недостаток устраняется на последнем этапе работы – при форматировании таблицы.

Далее в ячейки A3 и B3 вносим соответственно '**x**' и '**y**' – заголовки столбцов. После этого в ячейку A4 заносится первое значение аргумента x , равное 0, в ячейку A5 – следующее по порядку значение, равное 0,25. Диапазон A4:A5 выделяется и затем копируется вниз на нужное количество строк. При копировании на экране всплывают небольшие окна, в которых можно видеть очередное значение x , это позволяет вовремя закончить автозаполнение столбца значений аргумента. Если при автозаполнении окажутся заполнены несколько лишних ячеек, их следует выделить заново и очистить нажатием клавиши <Delete>. Если автозаполнение было прервано преждевременно, то его можно продолжить, если с заполненных ячеек не было снято выделение. Если выделение было снято, продолжить заполнение можно только, выделив заново две смежные ячейки столбца и копируя диапазон вниз.

Затем заполняется столбец значений функции. В ячейку B4 вносится формула : $=5*A4*\exp(-A4)$ (обратите внимание, что вместо обозначения переменной ' x ' в формуле всюду стоит адрес ячейки A4!). Затем эта формула копируется вниз до заполнения всей таблицы. Выделяя различные ячейки столбца B, можно видеть (анализируя содержание строки формул), как изменяются ссылки в формулах при переходе из ячейки в ячейку.

Теперь оформляем таблицу. Выделяем столбец A и входим в меню "Формат" – "Ячейки" – щелчком по закладке "Число" открываем диалоговое окно установки числовых форматов. Слева находится список числовых форматов, среди которых выделяем формат "Числовой". После щелчка мыши по названию формата открывается диалоговое окно, в котором можно установить (в основном с помощью мыши):

- число знаков дробной части после запятой;

- способ обозначения отрицательных чисел: они могут снабжаться или не снабжаться знаком "минус", выделяться или не выделяться красным цветом;
- флажок "Разделитель групп разрядов": его установка приводит к тому, что цифры целой части числа группируются по три, а между группами вставляются пробелы, что облегчает чтение многозначных чисел.

Для ячеек столбца А устанавливаем количество знаков после запятой, равное 2 (т.е., равное количеству знаков после запятой у величины шага табулирования). Аналогичным образом для ячеек столбца В устанавливаем формат чисел с 3-4 знаками после запятой.

Если после этого отдельные числа не будут помещаться в ячейки (об этом свидетельствует появление вместо цифр числа знаков '#####'), следует изменить ширину столбца. Это делается либо с помощью меню ("Формат" - "Столбец" - "Автоподбор ширины"), либо с помощью мыши. Во втором случае следует навести мышь на границу между заголовками столбцов, чтобы указатель принял вид двунаправленной стрелки, и перетащить границу в нужном направлении.

Если теперь нажать на стандартной панели инструментов кнопку [Предварительный просмотр], на экране будет показан вид созданной таблицы, который получится на листе бумаги при печати. Видно, что в таблице отсутствуют линии сетки. Для их установки необходимо вернуться в режим редактирования нажатием виртуальной клавиши [Заккрыть], выделить ячейки созданной таблицы и войти в меню "Формат" - "Ячейки" - "Граница". Открывается диалоговое окно, в котором в разделе "Линия" щелчком мыши выбираем тонкую сплошную линию и затем слева виртуальными кнопками, на которых условно показано, какие линии (верхние, нижние, промежуточные вертикальные или горизонтальные и т.п.) устанавливаются нажатием кнопки, устанавливаем промежуточные линии сетки таблицы. Другой вариант - щелкнуть мышью на месте соответствующей линии в окне, где схематически показаны 4 смежных ячейки. При установке линии на этой схеме появляются соответствующие линии и в таблице. Установив промежуточные линии, в разделе "Линия" выбираем толстую сплошную (вариант - тонкую двойную) линию и устанавливаем внешние линии таблицы (кнопками или щелчками мыши по схеме ячеек). Установив все линии, закрываем окно форматирования щелчком по кнопке [Заккрыть] в верхнем правом углу окна. Теперь в режи-

ме предварительного просмотра можно видеть, что таблица разграфлена и обведена толстой линией по внешнему контуру.

Затем следует выделить ячейки столбцов А и В, содержащие численные значения x и y , и построить график табулированной функции. В окне "Тип диаграммы" выбираем тип "Точечная" (любой из предлагаемых вариантов).

В окне "Источник данных диаграммы" проверяем правильность выделения диапазона для построения диаграммы. Переключатель "Ряды в:" должен стоять в позиции "столбцах". Т.к. в окне дается вид будущей диаграммы, можно переставить переключатель на "Ряды в строках" и посмотреть, что получится. В этом случае за значения x будут взяты числа из первой строки таблицы, а по каждой следующей строке будет строиться отдельный график (проанализируйте сами результат такого построения, учитывая, какие значения находятся в первой строке). Затем следует вернуть переключатель обратно.

Вкладка "Ряд" этого же окна позволяет строить на одной координатной сетке несколько графиков. Для добавления нового графика надо щелкнуть клавишу [Добавить], затем щелчком мыши установить курсор редактирования в окно "Значения y " и выделить в таблице столбец ячеек для построения нового графика.

Окно "Параметры диаграммы" содержит ряд вкладок. С помощью вкладки "Заголовки" можно нанести заголовки координатных осей и всей диаграммы, вкладка "Оси" служит для снятия/нанесения значений для разметки координатных осей, вкладка "Линии сетки" позволяет наносить/удалять координатную сетку. Вкладка "Легенда" служит для управления размещением т.н. легенды - текстового пояснения к диаграмме, указывающего, какая из нескольких линий диаграммы соответствует тому или иному ряду данных таблицы, установленных ранее в окне "Источник данных" (вкладка "Ряд"). Если построен всего один график, надобность в легенде отпадает и ее убирают, снимая флажок "Добавить легенду".

Вкладка "Подписи данных" позволяет нанести непосредственно на график значения функции для каждой из точек, по которым строился график. Как правило, это только загромождает диаграмму, поэтому таким приемом следует пользоваться осторожно.

Любое изменение параметров сразу отражается на виде диаграммы, показанном в окне, что позволяет подбирать параметры нужным образом.

Последнее окно "Размещение диаграммы" имеет всего один переключатель для помещения диаграммы на тот же лист, что и таблица, либо на отдельный лист, называемый по умолчанию 'Диаграмма 1'. Заголовок листа можно изменить, установив щелчком в окно ввода заголовка курсор редактирования. При размещении диаграммы на одном листе с таблицей она может закрыть собой часть таблицы. Для перемещения диаграммы надо щелкнуть по ней, тогда на границах диаграммы появляются маркеры размера в виде черных квадратиков. Теперь можно перетащить диаграмму мышью. Во время перетаскивания указатель мыши принимает вид четырехконечной стрелки. Также можно перетаскивать маркеры размера для изменения размеров диаграммы.

Любой элемент построенной диаграммы (координатную ось, линию графика, поле диаграммы) можно выделить, щелкнув непосредственно по нему. После этого можно:

двойным щелчком вызвать окно форматирования элемента (установка цветов и толщины линий, цветная заливка фона и т.п.)

щелчком правой кнопкой вызвать контекстное меню, которое, в частности, позволяет вновь войти в любое из окон Мастера диаграмм и изменить соответствующие характеристики диаграммы.

2. Табулирование функции двух переменных

Структура таблиц EXCEL позволяет также оперировать функциями двух переменных $z = f(x, y)$. В этом случае значения одного из аргументов располагаются в какой-то строке, значения другого - в каком-то столбце таблицы. Прямоугольный диапазон, ограниченный с двух сторон фрагментами этих строки и столбца, соответствует прямоугольной области определения функции $f(x, y)$ на координатной плоскости xy . Каждая ячейка диапазона соответствует точке области определения с координатами, взятыми из строки и столбца, содержащих значения x и y . В ячейки заносятся значения табулируемой функции $f(x, y)$.

Формула вычисления $f(x, y)$ заносится в одну из ячеек диапазона и копируется в остальные ячейки. При копировании необходимо, чтобы в ссылках обозначения строки, содержащей значения x , и столбца, содержащего значения y , не изменялись. Для этого соответствующие элементы ссылок при введении формулы с клавиатуры снабжаются знаком \$.

Рассмотрим для примера построение таблицы и графика функции

$$z = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y .$$

в области $x \in [-0,5; 0,5]$ с шагом 0,25 по обоим переменным. Для этого:

1. Создаем заголовок '*Табулирование функции двух переменных*' – вводим текст в ячейку A1, затем выделяем ячейки A1:A6, входим в меню "Формат" – "Ячейки" – "Выравнивание" – в окне ввода устанавливаем выравнивание по горизонтали "По центру выделения".
2. В ячейку A2 вводим поясняющий текст ' $y \backslash x$ '.
3. В диапазоне B2:F2 создаем список значений аргумента x в виде арифметической прогрессии $-0,5; -0.25 \dots 0.5$.
4. В диапазоне A3:A7 создаем такую же прогрессию для значений аргумента y .
5. В ячейку B3 вносим формулу:

$$= \sin(B2) \cdot \cos(A3) + \cos(B2) \cdot \sin(A3)$$

и копируем сначала вниз в ячейки B4:B7, затем вправо, так, чтобы заполнился диапазон B3:F7.

Если теперь активизировать, например, ячейку C4, мы увидим в строке формул:

$$= \sin(C3) \cdot \cos(B4) + \cos(C3) \cdot \sin(B4),$$

тогда как в формуле в этой ячейке должны были бы использоваться ссылки на ячейки **B2** и **A4**:

$$= \sin(B2) \cdot \cos(A4) + \cos(B2) \cdot \sin(A4)$$

то есть, номер строки 2 и обозначение столбца A не должны меняться при копировании формул. Для этого при вводе формулы в ячейку B3 эти элементы ссылок помечаются знаком '\$':

$$= \sin(B\$2) \cdot \cos(\$A3) + \cos(B\$2) \cdot \sin(\$A3) .$$

Для этого следует вновь активизировать ячейку B3, щелчком по строке формул установить в ней курсор и отредактировать формулу нужным образом. Затем формула заново копируется в ячейки диапазона B3:F7. Теперь можно проверить вид формулы в любой ячейке диапазона и убедиться, что при вычислении значения функции ис-

пользуются значения ячеек, находящиеся в столбце А и строке 2 – то есть, значения аргументов x и y .

Для построения диаграммы следует выделить в таблице диапазон, содержащий значения функции (но не аргументов!), запустить Мастер Диаграмм и выбрать тип диаграммы "Поверхность". Предлагается 4 варианта диаграммы "Поверхность" – два в виде пространственного изображения (цветная и т.н. "проволочная" – контурами без раскраски) и две плоских картины, на которых распределение значений функции показано набором линий равных значений. Наиболее наглядным является вариант цветного пространственного изображения.

Задание 1. Составить таблицу значений и построить график функции $y=f(x)$ на отрезке от a до b с шагом h .

Замечание: встречающиеся в заданиях функции **sh**, **ch**, **th** – это так называемые *гиперболические* тригонометрические функции. В EXCEL они обозначаются соответственно **sinh**, **cosh**, **tanh** (для их ввода в формулы можно воспользоваться Мастером функций).

	Функция $y = f(x)$	a	b	Шаг
1	$x^2 - 3x + 2$	0	4	0,25
2	$x \cdot \sin x$	0	6	0,25
3	$5x^3 e^{-x}$	0	5	0,25
4	$(e^x - e^{-x})/2$	-2	3	0.25
5	$3x^{-2} \cdot \ln x$	0.5	5	0.25
6	$2e^{-x/5} \sin(x/2)$	0	10	0.5
7	$2 \cdot \sin x \cdot \cos x$	0	6	0.25
8	$x^2 \sqrt{4 - x^2}$	-2	2	0.25
9	$\sqrt{x} - \ln(x + 1)$	0	4	0.25
10	$ \sin x $	-2	2	0.25
11	$1/\operatorname{ch} x$	-3	3	0.25
12	x^2 / e^x	0	10	0.5
13	$x^4 - x^3 + 2$	-2	2	0.25
14	$e^{ x } \cdot \cos x$	-2	2	0.2
15	$\sqrt{x^2 + 5x + 3}$	0	4	0.25

16	$e^{-x} \sqrt{x^2 + 5x + 3}$	0	6	0.25
17	$\ln x \cdot e^{-x^2}$	0.5	5	0.25
18	$x + \sin x$	0	5	0.25
19	$x + e^{-x} \cos x$	-1	3	0.25
20	$5(\sqrt{x} - \ln x - 1)$	1	3	0.1
21	$5e^{-x^2/2}$	-5	5	0.5
22	$0.5 \sin x \cdot \ln x$	1	5	0.25
23	$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$	-2	2	0.25
24	$\operatorname{th} x + 0.25 \sin 2x$	-2	2	0.2
25	$\operatorname{ch} x - x^4$	-2	2	0.25

Задание 2. Составить таблицу значений и построить график функции $z=f(x,y)$ в области $x,y \in [-2, 2]$. Шаг по x, y равен 0.2.

№	$f(x,y)$	№	$f(x,y)$
1	$3x^2 - 4y^2$	14	$\operatorname{arctg}(x+y)$
2	$x^2 \sin(\pi y)$	15	$\operatorname{arctg}(x + y)$
3	$0.125 \cdot x^2 y^3$	16	$\sin(xy)$
4	$5 \sin(\pi x/2) \cdot \cos(\pi y)$	17	$\sin(xy)$
5	$1 - x^2 - y^2$	18	$\sin(\sqrt{x^2 + y^2})$
6	$\cos x \cdot \sin y$	19	$5 \cdot e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \operatorname{arctg}(xy)$
7	$e^x \cdot \cos y$	20	$e^{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$
8	$e^{-xy} \cdot xy$	21	$x^2 - 3 \cdot xy + y^2$
9	$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y$	22	$x^2 - (x+y) - y^2$
10	$x^2 \cdot \sqrt{4 - y^2}$	23	$x \cdot (x+1) - y \cdot (y+1)$
11	$\ln(1 + x + y)$	24	$\operatorname{ch}(y) / \operatorname{ch}(x)$
12	$5 \cdot e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$	25	$-x^2 \cdot \operatorname{th} y$
13	$\operatorname{arctg}(xy)$		

4.2. Работа 2: Решение трансцендентных алгебраических уравнений

Цель работы: знакомство с методами решения уравнений общего вида $F(x)=0$, неразрешимых в квадратурах (см. п. 3.2)

1. Метод половинного деления интервала

В электронных таблицах Excel описанный в п 3.2. метод реализуется в таблице, содержащей 6 столбцов от А до F (можно, впрочем, обойтись пятью, но таблица из 6 столбцов позволяет более наглядно проследить процесс решения). Столбцы следует выделить и отформатировать с помощью меню “Формат” – “Ячейки” – вкладка “Числа” – в списке форматов числа выбрать “Числовой” и установить число десятичных знаков 5.

Столбцы заполняются следующим образом:

A1:F1 – заголовки:

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	$c=(a+b)/2$	F(a)	F(b)	F(c)
2						

A2:B2 – начальные значения **a** и **b**;

C2- заносится формула вычисления полусуммы содержимого ячеек A2 и B2;

D2:F2 – заполняются формулами для вычисления функции **F(x)** в зависимости от значений ячеек A2:C2 соответственно. При этом можно воспользоваться копированием формулы из ячейки D2 в соседние ячейки строки 2.

A3 – если корень уравнения локализован на отрезке **[a,c]**, заносится прежнее значение **a** (из ячейки A2); в противном случае – значение **c** (из ячейки C2). Это делается с помощью логической функции ЕСЛИ, условие локализации имеет вид: $F(a) \cdot F(c) < 0$.

B3 – аналогичным образом заполняется значением из ячейки C2, если корень локализован на отрезке **[a,c]**, в противном случае – значением из ячейки B2.

C3:F3 – копируются формулы из предыдущей строки.

Затем диапазон A3:F3 выделяется целиком и копируется на несколько строк вниз. При этом можно видеть, что значения в ячейках столбцов A, B, C сближаются, что показывает постепенное сужение отрезка локализации корня. Также сближаются (и приближаются к нулю) значения в столбцах D, E, F.

Об окончании процесса определения решения свидетельствует совпадение значений в ячейках столбцов A, B, C. Если ячейки отформатированы с выводом на экран 5 десятичных знаков, совпадение наблюдаемых на экране значений говорит о том, что разница между ними (и, соответственно, погрешность определения корня) не превышает 10^{-6} .

2. Метод последовательных приближений (итераций)

Уравнение приводится к виду $x=f(x)$. Задается какое-нибудь начальное приближение значения корня x_1 (например, из ранее определенного отрезка $[a,b]$). Это значение подставляется в правую часть уравнения и вычисляется $f(x_1)$. Это значение принимается за новое приближение значения корня и опять подставляется в правую часть уравнения, так что на каждом шаге процесса $x_{i+1}=f(x_i)$.

Процесс повторяется до тех пор, пока два последовательно вычисленных приближения корня не совпадут с заданной точностью.

Этот процесс организуется гораздо проще, чем процесс половинного деления интервала и быстро сходится, однако сходимость имеет место только при выполнении на отрезке локализации корня условия: $|f'(x)| < 1$.

Простейший вариант реализации итерационного процесса в EXCEL требует использования всего двух столбцов, заполняемых следующим образом

	A	B
1	x (заголовок)	$f(x)$ (заголовок)
2	x_1 (число)	формула вычисления $f(x_1)$
3	=B2	копируется формула из B2
4- ...	копируются формулы из предыдущей строки вниз на несколько строк...	

После копирования последней строки вниз можно видеть, как значения в ячейках столбца A постепенно перестают меняться, т.е.,

приближения корня сходятся к его точному значению. Окончание процесса определяется визуально, по виду содержимого ячеек.

3. Использование модуля "Подбор параметра"

"Подбор параметра" – модуль (пакет встроенных процедур) для решения задач с одним неизвестным. Для решения следует привести уравнение к виду $F(x)=0$. Таблица заполняется следующим образом

	A	B
1	начальное значение x	формула F(x)

Затем с помощью меню "Сервис" – "Подбор параметра" запускается модуль. Появляется окно с заголовком "Подбор параметра" и тремя внутренними окнами, которые заполняются:

- окно "Установить в ячейке" – вносится адрес ячейки с формулой $F(x)$;
- окно "Значение" – вносится число 0;
- окно "Изменяя значение ячейки" – адрес ячейки со значением x (в данном случае A1).

Затем нажимается виртуальная клавиша [OK]. Появляется следующее окно с сообщением "Решение найдено", в котором можно видеть также величину погрешности, с которой выполняется при найденном значении корня условие $F(x)=0$. Нажатие клавиши [OK] в новом окне позволяет зафиксировать найденное решение.

Видно, что решение отыскивается чрезвычайно просто. Недостатки использования модуля "Подбор параметра" :

а) погрешность определяется возможностями встроенной подпрограммы и уменьшить ее с помощью повторного применения модуля уже не удастся;

б) в некоторых случаях компьютер вообще не может отыскать корень.

Задание: Найти решение уравнения согласно своего варианта тремя описанными способами.

1. $\operatorname{ctg}(x) = \frac{x}{5}$ (найти корень $x \in (0, \pi)$)

2. $e^{-x/2} = x - 1$

3. $5 - x = \ln(x)$

$$4. \quad \mathbf{x \cdot ch(x) = 1}$$

$$5. \quad \mathbf{sh\left(\frac{x}{5}\right) = ctg(x)} \quad (\mathbf{x \in (0, \pi) })$$

$$6. \quad \mathbf{x = (x - 1)^5}$$

$$7. \quad \mathbf{x^3 - 1 = sin(x)}$$

$$8. \quad \mathbf{x^3 - 1 = e^{-x}}$$

$$9. \quad \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x + 1}}(\mathbf{1 + sin(x)}) = \mathbf{5 - x^2}$$

$$10. \quad \mathbf{ch\left(\frac{x}{10}\right) = e^{x+1}}$$

$$11. \quad \mathbf{ln(0,5 \cdot x) = -(x - 3)^3}$$

$$12. \quad \mathbf{e^x + ln(x) = 0,5 - x}$$

$$13. \quad \mathbf{th \, x = 2 - x}$$

$$14. \quad \mathbf{5x^2 \cdot e^{-x} + 1 = sh \, x}$$

$$15. \quad \mathbf{x^3 = 5 - x}$$

$$16. \quad \mathbf{x(1 + 6x^2)^{2.5} = 0.5}$$

$$17. \quad \mathbf{x^3 = cos \, x}$$

$$18. \quad \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x + 1}} = \mathbf{e^{-x}}$$

$$19. \quad \mathbf{cos^2 \, x = x - 1}$$

$$20. \quad \mathbf{ch(x - 1) = e^x}$$

$$21. \quad \mathbf{0.5 \ln\left(\frac{x + 0.25}{x}\right) + \frac{1}{10(x + 0.25)} = \frac{1}{5x}}$$

$$22. \quad \mathbf{x \cdot th \, x = 1}$$

$$23. \quad \mathbf{cos \, x = ln \, x}$$

4.3. Работа 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Цель работы: изучение практических методов решения СЛАУ.

1. Метод простых итераций

Для реализации процесса последовательных приближений для метода простых итераций в EXCEL можно использовать описанную ниже структуру таблицы (рассматривается пример системы:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

с решением $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=4$.)

	A	B	C	D
1	Коэффициенты исходной системы			
2	5	1	-1	10
3	1	5	1	2
4	1	-1	3	16
5	x1	x2	x3	
6	=D2/A2	=D3/B3	=D4/C4	
7	=(D\$2-\$B\$2*B6-\$C\$2*C6)/\$A\$2	=(D\$3-\$A\$3*A6-\$C\$3*C6)/\$B\$3	=(D\$4-\$A\$4*A6-\$B\$4*B6)/\$C\$4	
8	... копируются формулы из строки 7 на несколько строк вниз			
...				

Строки 1-5 содержат текстовые заголовки и числовые значения. В частности, диапазон A2:D4 содержит значения коэффициентов системы. Эти ячейки заполняются вручную.

Также вручную в ячейки A6:C7 заносятся формулы. Они соответствуют формулам (11,12) из конспекта лекций. Затем ячейки A7:C7 выделяются и копируются вниз на несколько строк. Окончание итерационного процесса определяется визуально по совпадению значений двух последовательных приближений (в соседних строках таблицы).

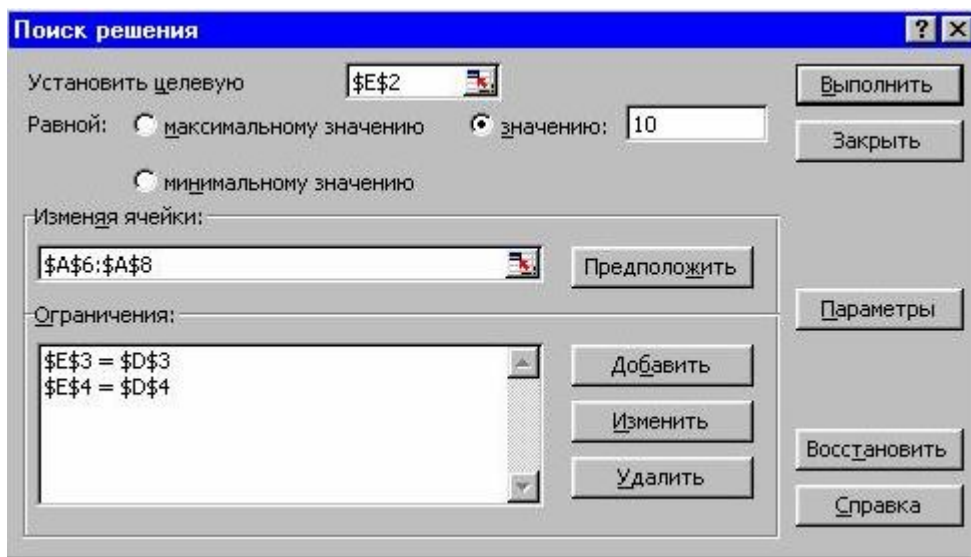
2. Применение модуля "Поиск решения"

"Поиск решения" – модуль EXCEL, применяемый для решения задач с несколькими переменными, поиска одного из нескольких корней алгебраических уравнений и вообще для решения задач, в которых на искомое решение наложены условия в виде уравнений или неравенств.

Модуль "Поиск решения" вызывается через меню: "Сервис" – "Поиск решения". После этого на экране появляется диалоговое окно, с помощью которого осуществляется решение задачи. Структуру и принцип работы с этим окном разберем на примере решения той же системы.

Поиск решения проведем на новом листе рабочей книги. Прежде всего туда копируются исходные коэффициенты, которые вместе с заголовками заполняют диапазон A1:D4. Затем в ячейку A6 вставляется заголовок '**Решение**'; оно будет находиться в ячейках A7:A9. В качестве первого приближения в эти ячейки можно занести, например, значения правых частей уравнений. Ячейки E2:E4 заполняются формулами для вычисления левых частей уравнений системы. Для этого формула вносится в ячейку E2 и затем копируется в две другие ячейки. При этом ссылки на ячейки A7:A9 делаются абсолютными (см. ниже структуру получающейся таблицы).

После этого вызывается модуль "Поиск решения". Диалоговое окно имеет вид:



Одна из вспомогательных ячеек, в данном случае E2, выбирается в качестве **целевой** и компьютеру дается задание подобрать значения неизвестных так, чтобы значение этой ячейки стало равным значению правой части первого уравнения системы. Для этого переключатель устанавливается на позицию "Значению" и в соответствующее окно ввода заносится численное значение правой части (в данном случае нельзя пользоваться ссылкой на ячейку, содержащую это значение). Два других уравнения образуют набор дополнительных условий, накладываемых на значения переменных. Эти условия заносятся в окно ввода "Ограничения" с помощью диалогового окна, появляющегося после нажатия виртуальной клавиши [Добавить]. Это окно содержит три внутренних окна ввода. В первое вставляется ссылка на ячейку, содержащую формулу вычисления левой части второго уравнения (можно использовать способ быстрого создания ссылок), в третье – ссылка на ячейку, содержащую значение правой части этого уравнения. Второе окно ввода содержит один из знаков математических отношений (равенства или неравенства) и значок раскрывающегося списка. Раскрыв список, можно установить в окне нужный знак – в данном случае знак равенства. Затем так же в окно "Ограничения" вставляется второе условие, т.е., третье уравнение системы. В окно "Изменяя ячейки" вставляются ссылки на ячейки, предназначенные для размещения искомого решения. После выполнения этих подготовительных действий нажимается виртуальная клавиша [Выполнить].

Принцип работы модуля "Поиск решения" ясен из описанной структуры окна. Компьютер подбирает значения неизвестных так,

чтобы одновременно соблюдалось и требование (выполнения первого уравнения), и условия (выполнение второго и третьего уравнений). В случае, если ему это удастся, в возникающем диалоговом окне появляется сообщение "Решение найдено". Имеющийся в окне переключатель позволяет либо занести в таблицу полученное решение, либо отменить его и восстановить ранее внесенные в ячейки значения.

Структура таблицы, предназначенной для применения модуля "Поиск решения", в данном случае имеет вид:

	A	B	C	D	E
1	Коэффициенты				
2	5	1	-1	10	=A2*\$A\$6+B2*\$A\$7+C2*\$A\$8
3	1	5	1	2	=A3*\$A\$6+B3*\$A\$7+C3*\$A\$8
4	1	-1	3	16	=A4*\$A\$6+B4*\$A\$7+C4*\$A\$8
5	Решение:				
6	3				
7	-1				
8	4				

Задание: найти решение системы согласно своего варианта методом простых итераций и с помощью модуля "Поиск решения".

Вариант	A _{ij}			b _i
1	2,5	1	-0,5	4,8
	2	1,5	6,4	-11,36
	-3,2	2,7	-4	11,36
2	3,2	0,8	-1,5	-8,55
	0,5	-3,5	3	-4,9
	-2,7	4	2	20,15
3	5,3	3,1	1,2	4,13
	1,2	-6	2	6,36
	-0,8	4,2	3,1	0,98
4	-3,2	2,5	-2,3	-1,98
	1,2	-1,3	6,8	13,03
	3,5	2,8	0,1	-0,14

Вариант	A _{ij}			b _i
14	3,7	3,7	2,7	15,5
	3,1	-1,5	-4,9	-12,18
	1,4	6,4	-3,4	-3,4
15	5,6	0,9	-1,4	3,24
	1,1	0,9	2,2	8,64
	-0,2	3,3	3,7	13,5
16	3,8	2,1	0,5	7,74
	0,6	-1,6	4	11,44
	-2	2	-0,8	-3,2
17	0,25	-1,25	2,75	-1,575
	6,6	2,4	-4	-14,42
	-4	2	2,6	12,92

5	2,8	6,7	1,6	1,82	18	1,7	1,1	4,2	7,67
	3,5	0,5	-0,8	2,73		0,6	2,4	1,5	4,32
	0,9	5	-3,5	-1,59		-3	2	2,6	-8,38
6	2,7	4	0,5	-7,16	19	4,8	0,2	3,1	2,9
	3,7	0,8	-1	-2,04		0,6	-2,4	5,2	2,28
	1,2	6,1	-3,8	-32,67		4,4	-2	2,6	1,64
7	5,6	0,9	-1,4	16,74	20	4,7	0,3	3	5,94
	1,3	0,8	-2	8,3		0,7	2,5	5,2	4,98
	-0,8	3,1	-3,8	11,42		-3	2,1	-4	-3,23
8	5,8	1,1	-0,9	13,76	21	3,7	1,3	0,8	9,81
	1,7	0,5	-2,5	-7,73		1	2,4	5,1	18,06
	-1,6	3,9	2,4	9,71		-3	0,4	-0,6	-5,22
9	0,9	2,5	1,4	14,93	22	2,2	1,5	2,5	15,65
	1,7	2,4	-2,5	-5,22		4,6	0,8	-2,1	4,9
	9	-4	3,5	54,4		-1,7	4,4	2,3	14,5
10	5,6	3	1,3	26,64	23	2	1,8	3,1	4,7
	1,2	-6,3	2,1	-6,72		-4,2	-0,6	2,4	0
	-0,8	4	3,1	7,68		1,6	5	2,4	-5,3
11	2,6	0,8	-0,4	3,5	24	0,2	1,8	0,4	-0,8
	1,9	1,7	6,4	22,3		-4,4	0,8	2	-1,76
	-3,4	2,8	-4,2	-11,56		2,8	1,5	2,5	4,04
12	2,7	0,9	-0,4	9,87	25	0,6	2,6	-0,6	4,56
	-1,7	1,6	7,1	55,98		5	1,2	2,2	7,68
	2,6	2,5	-5	-16,94		4	2,5	-2,5	11,4
13	-3,2	2,5	2,2	4,18					
	1,2	1,4	6,8	6,28					
	3,5	2,8	0,2	4,74					

4.4. Работа 4: Решение задач линейного программирования

В отличие от других работ, при решении задач линейного программирования структура таблицы не является единообразной, но определяется постановкой задачи. Поэтому при выполнении работы студентам следует самостоятельно создать таблицу для решения своей задачи. Рассмотрим пример (т. н. "транспортную задачу").

Условия задачи: Для обеспечения молоком жителей микрорайона города построено четыре мини-завода по его переработке, объемы

производства которых соответственно равны 300, 400, 500, 200 тонн. Заключены договора на поставку молока с тремя фермерскими хозяйствами, производственная мощность которых 500, 600, 300 тонн. Затраты на перевозку одной тонны молока от фермерского хозяйства до завода представлены в таблице:

	Заводы			
	20	15	30	25
	25	9	12	10
	15	23	8	11

Необходимо составить такой план поставок молока, при котором суммарные затраты на транспортировку будут минимальными и заводы будут работать на полную производственную мощность.

Поскольку данная модель сбалансирована (суммарный объем произведенной продукции равен суммарному объему потребности в ней), то в этой задаче не надо учитывать издержки, связанные со складированием и с недопоставками продукции.

Для решения данной задачи построим ее математическую модель. Неизвестными в данной задаче являются объемы перевозок. Пусть x_{ij} – объем перевозок с i -ой фермы в j -й центр распределения (минизавод). Целевая функция – это суммарные транспортные расходы, т.е.

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij},$$

где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i -й фермы на j -й центр распределения.

Неизвестные в данной задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

- Объемы перевозок не могут быть отрицательными
- Так как модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с ферм, а потребности всех минизаводов должны быть полностью удовлетворены.

В результате имеем следующую модель:

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j \quad j \in [1,4],$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i \quad i \in [1,3],$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad j \in [1,4], \quad i \in [1,3].$$

где b_j – спрос на j -м минизаводе, a_i - объем производства на i -й ферме.

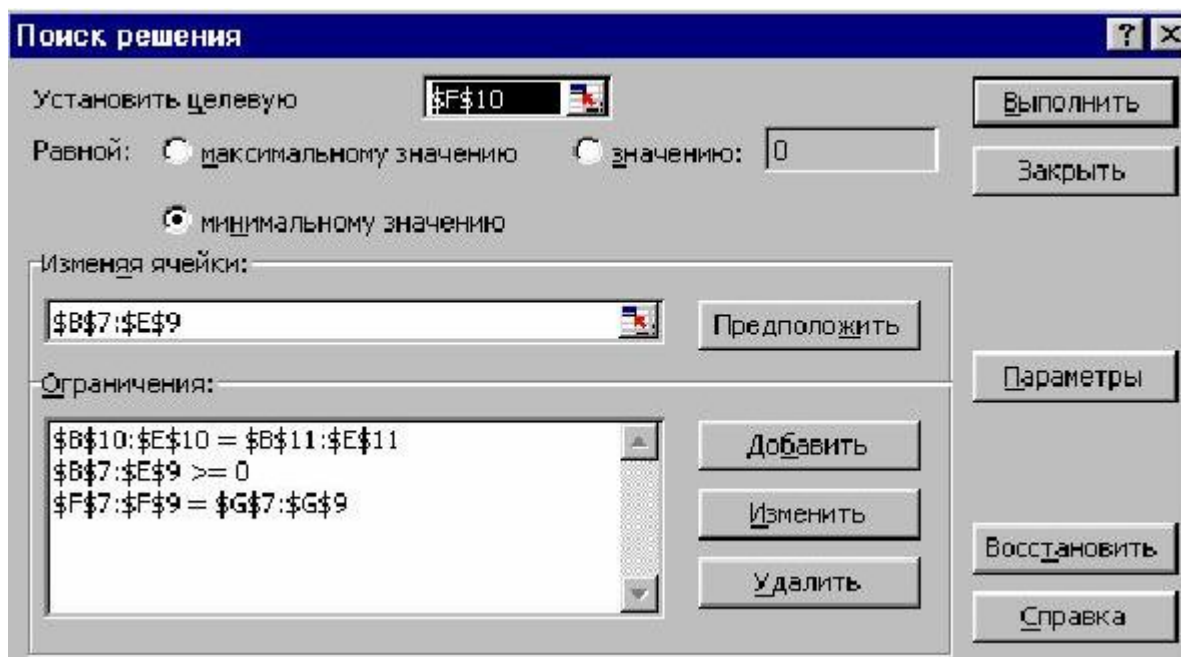
Для решения этой задачи с помощью модуля "Поиск решения" введем данные, как это показано на схеме таблицы. В ячейки B2:E4 введены стоимости перевозок. Ячейки B7:E9 отведены под значения неизвестных (объемы перевозок). В ячейки G7:G9 введены объемы производства на фермах, а в ячейки B11:E11 - потребность в молоке на минизаводах. В ячейке F10 находится целевая функция, в диапазоне B10:E10 - формулы, определяющие объем продукции, поставляемой на заводы. В ячейках F7:F9 находятся формулы, вычисляющие объем молока, вывозимого с фермы. Для вычисления целевой функции z использована встроенная функция EXCEL **СУММПРОИЗВ**, определяющая сумму попарных произведений двух диапазонов одинаковой структуры.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		20	15	30	25		
3	C =	25	9	12	10		
4		15	23	8	11		
5							
6						A ₁	
7		0	0	0	0	=СУММ(B7:E7)	500
8	X =	0	0	0	0	=СУММ(B8:E8)	600
9		0	0	0	0	=СУММ(B9:E9)	300
10	B _j	=СУММ(B7:B9)	=СУММ(C7:C9)	=СУММ(D7:D9)	=СУММ(E7:E9)	=СУММПРИЗВ(B2:E4;B7:E9)	
11		300	400	500	200		

В результате таблица будет выглядеть следующим образом:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		20	15	30	25		
3	C =	25	9	12	10		
4		15	23	8	11		
5							
6						a i	
7		0	0	0	0	0	500
8	X =	0	0	0	0	0	600
9		0	0	0	0	0	300
10	b j	0	0	0	0	0	
11		300	400	500	200		

Теперь выполним команду меню **Сервис, Поиск решения** и заполним открывшееся диалоговое окно **Поиск решения**, как это показано на рисунке.



Нажатием клавиши [Параметры] следует войти в диалоговое окно "Параметры поиска решения" и установить в нем флажки "Линейная модель" и "Неотрицательные значения". Нажатием кнопки [ОК] производится возврат в окно "Поиск решения".

Параметры поиска решения [?] [X]

Максимальное время: секунд

Предельное число итераций:

Относительная погрешность:

Допустимое отклонение: %

Сходимость:

☒ Линейная модель
 ☐ Автоматическое масштабирование

☐ Неотрицательные значения
 ☐ Показывать результаты итераций

Оценки: ☒ линейная ☐ квадратичная

Разности: ☒ прямые ☐ центральные

Метод поиска: ☒ Ньютона ☐ сопряженных градиентов

ОК
 Отмена
 Загрузить модель...
 Сохранить модель...
 Справка

После нажатия кнопки [Выполнить] подпрограмма поиска решения находит оптимальный план поставок молока и соответствующие ему транспортные расходы. Результаты решения представлены ниже.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		20	15	30	25		
3	C=	25	9	12	10		
4		15	23	8	11		
5							
6						a_i	
7		300	200	0	0	500	500
8	X=	0	200	200	200	600	600
9		0	0	300	0	300	300
10	b_j	300	400	500	200	17600	
11		300	400	500	200		

Задание: найти решение задачи линейного программирования, сформулированной в математической форме (то есть, без конкретного смыслового содержания), согласно своего варианта.

$$1. L = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$2. L = -x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 5$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \geq 0$$

$$3. L = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$4. L = -x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$5. L = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 - x_2 \leq 2$$

$$6. L = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$7. L = 7x_2 \rightarrow \min$$

$$-2,5x_1 + 3x_2 \geq 5$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$8. L = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$9. L = x_1 \rightarrow \min$$

$$-x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$10. L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq -3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$11. L = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq -1$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$12. L = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-3x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$13. L = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$$

$$5x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 \geq 1$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \geq -2$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$14. L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 \leq 4$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq 10$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

$$15. L = 8x_1 + 19x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 2$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$16. L = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$17. L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 4$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 3$$

$$18. L = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 19. \quad & L = x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
 & 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\
 & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20. \quad & L = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max \\
 & -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1 + x_2 \geq -1 \\
 & x_1 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21. \quad & L = x_1 + x_2 \rightarrow \min \\
 & x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\
 & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22. \quad & L = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min \\
 & x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23. \quad & L = x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\
 & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24. \quad & L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25. \quad & L = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\
 & -4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & x_1 - x_2 \leq 6 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26. \quad & L = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 & -x_1 - x_2 \geq -3 \\
 & 6x_1 + x_2 \leq 14 \\
 & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\
 & x_1 + x_2 = 4 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

4.5. Работа 5. Обработка экспериментальных данных

Цель работы: изучение приемов обработки экспериментальных данных с помощью метода наименьших квадратов.

Исходными данными являются 10 пар значений (x_i, y_i) , имитирующих данные экспериментального исследования зависимости $x(y)$, например

№	x_i	y_i
1	0,96	0,676
2	1,23	0,786
3	1,36	0,787
4	2,18	1,264
5	2,85	1,607
6	3,10	1,731
7	3,74	2,228
8	4,67	3,463
9	4,94	3,972
10	5,72	5,814

В лабораторной работе проводится определение коэффициентов регрессии A и B и оценка параметров полученной приближенной зависимости.

Для этого составляется таблица, содержащая, кроме значений x и y , значения квадратов (x^2) и произведений (xy). Затем с помощью автосуммирования вычисляются суммы соответствующих столбцов и по формулам (57) определяются коэффициенты A и B . После определения коэффициентов следует в дополнительном столбце таблицы протабулировать полученную регрессионную зависимость:

$$y = Ax + B$$

и построить график, представляющий как экспериментальные точки, так и полученную зависимость.

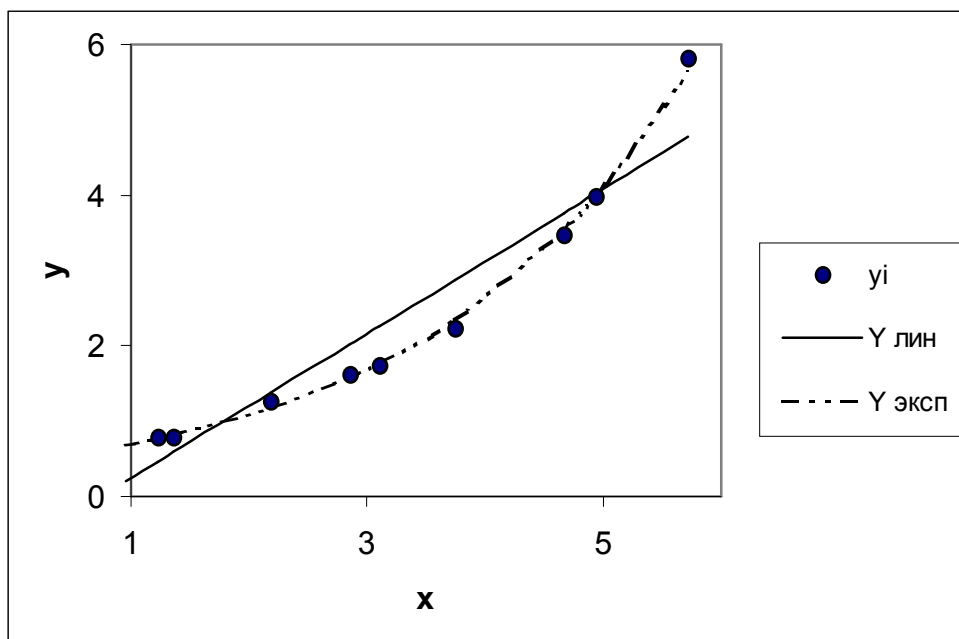
Если по виду "облака экспериментальных точек" сложно оценить предполагаемый вид зависимости $y(x)$, то определяют коэффициенты разных регрессий – линейной и степенной либо экспоненциальной. Затем сравнивают для них величины критерия Гаусса:

$$D_n = \frac{\sum_{i=1}^n [y_i - y_{\text{перп}}(x_i)]^2}{n - m},$$

где m – число параметров регрессионной зависимости (для указанных видов $m = 2$). Предпочтительной является зависимость, которая имеет наименьшую величину D_n .

В лабораторной работе необходимо, кроме линейной регрессии, подобрать параметры степенной или экспоненциальной регрессии (на выбор студента, ориентируясь на вид "облака точек"), определить для обеих регрессий значение выборочной дисперсии и сделать вывод об эффективности оценки экспериментальных данных с помощью полученных зависимостей.

Ниже приведен пример таблицы расчета параметров линейной и экспоненциальной регрессий для последовательности точек, приведенной выше в качестве примера. На следующем рисунке показан построенный по результатам расчета график:



Расчет коэффициентов линейной и экспоненциальной регрессии

№ опыта	x_i	y_i	$Y_{\text{лин}}$	$Y_{\text{эксп}}$	x_i^2	$x_i y_i$	$\ln y_i$	$(\ln x_i)^2$	$x (\ln y_i)$
1	0,96	0,676	0,204	0,684	0,922	0,649	-0,392	0,002	-0,376
2	1,23	0,786	0,463	0,771	1,513	0,967	-0,241	0,043	-0,296
3	1,36	0,787	0,587	0,817	1,850	1,070	-0,240	0,095	-0,326
4	2,18	1,264	1,374	1,174	4,752	2,756	0,234	0,607	0,511
5	2,85	1,607	2,017	1,580	8,123	4,580	0,474	1,097	1,352
6	3,1	1,731	2,257	1,765	9,610	5,366	0,549	1,280	1,701
7	3,74	2,228	2,871	2,342	13,988	8,333	0,801	1,740	2,996
8	4,67	3,463	3,763	3,535	21,809	16,172	1,242	2,375	5,801
9	4,94	3,972	4,022	3,984	24,404	19,622	1,379	2,552	6,814
10	5,72	5,814	4,770	5,626	32,718	33,256	1,760	3,041	10,069
Сумма:	30,75	22,328			119,688	92,770	5,568	12,832	28,245

Коэффициенты линейной регрессии:

$B =$	0,959	$A =$	-0,717
-------	-------	-------	--------

Дисперсия:

$D =$	0,302
-------	-------

Коэффициенты экспоненциальной регрессии:

$B =$	0,443	$A =$	0,447
-------	-------	-------	-------

$D =$	0,008
-------	-------

Для того, чтобы разные зависимости были показаны по-разному (точками, пунктиром и т.д.) надо после построения диаграммы щелкнуть левой кнопкой мыши по одной из кривых (при правильном наведении указателя мыши на нужную кривую появляется подсказка, например, "Ряд Улин, точка ...") и в контекстном меню выбрать "Формат рядов данных". На вкладке "Вид" появившегося диалогового окна можно выбрать нужный формат линии и маркера для соответствующей кривой (или их отсутствие). На приведенном рисунке для ряда "у_i" отсутствует линия, но есть маркеры (точки), для рядов "Улин", "Уэксп" маркеры отсутствуют.

Варианты заданий:

	1		2		3		4	
№	X _i	Y _i	X _i	Y _i	X _i	Y _i	X _i	Y _i
1	0,302	1,276	0,446	1,233	0,946	0,301	0,606	0,204
2	0,556	1,565	1,132	0,740	0,992	0,339	1,568	0,149
3	1,296	2,220	1,603	0,546	1,327	0,423	1,893	0,122
4	1,469	2,165	2,026	0,388	1,400	0,432	2,521	0,118
5	1,627	2,452	2,171	0,372	2,218	0,779	2,913	0,112
6	2,249	2,482	2,622	0,278	2,655	0,933	3,782	0,099
7	2,983	2,855	2,776	0,231	3,155	1,321	4,609	0,091
8	3,096	2,837	3,580	0,125	3,467	1,766	4,980	0,080
9	3,236	2,887	3,920	0,101	3,765	2,097	5,549	0,083
10	3,672	3,023	4,912	0,051	4,397	3,193	5,738	0,078

	5		6		7		8	
№	X _i	Y _i	X _i	Y _i	X _i	Y _i	X _i	Y _i
1	0,184	0,144	0,593	1,128	0,057	1,381	0,845	0,091
2	0,206	0,132	1,111	0,873	0,114	1,248	0,997	0,097
3	1,200	0,080	1,785	0,788	0,458	1,074	1,383	0,084
4	2,097	0,076	1,937	0,769	0,511	1,088	1,562	0,080
5	2,673	0,067	2,042	0,812	0,805	1,083	1,960	0,078
6	3,426	0,064	2,342	0,712	0,872	0,957	2,291	0,068
7	4,031	0,065	3,002	0,660	1,082	0,935	3,233	0,067
8	4,059	0,064	3,320	0,643	1,646	0,995	3,354	0,065
9	4,249	0,058	4,240	0,625	2,039	0,945	3,568	0,060
10	4,689	0,062	4,342	0,614	3,030	0,951	4,458	0,060

	9		10		11		12	
№	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi
1	0,190	0,003	0,638	1,045	0,588	1,589	0,874	1,324
2	0,698	0,003	1,612	0,738	0,833	1,911	1,462	1,935
3	1,421	0,004	1,622	0,738	1,194	2,126	2,165	2,925
4	1,599	0,004	2,522	0,565	1,562	2,362	2,359	3,118
5	2,594	0,005	3,137	0,521	2,537	3,376	2,886	4,838
6	3,525	0,007	3,900	0,463	2,883	3,901	2,982	4,573
7	3,874	0,008	4,623	0,420	3,861	4,836	3,494	7,028
8	4,051	0,008	5,311	0,416	4,296	5,095	3,574	6,640
9	4,739	0,010	6,246	0,353	5,009	5,428	4,121	10,287
10	5,591	0,013	6,550	0,359	5,707	6,219	4,166	9,710

	13		14		15		16	
№	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi
1	0,913	3,667	0,128	0,240	0,630	1,236	0,721	0,905
2	1,338	5,361	1,109	0,589	1,252	1,048	0,987	1,073
3	1,447	6,038	1,746	1,167	1,916	1,002	1,487	1,522
4	1,666	6,853	2,532	2,187	2,105	0,898	2,103	2,388
5	2,607	16,612	2,977	3,435	2,212	0,975	2,406	3,252
6	3,190	30,838	2,987	3,242	2,418	0,979	2,709	3,889
7	3,510	40,393	3,851	7,207	2,551	0,894	3,469	7,400
8	4,359	92,118	4,079	8,858	3,146	0,849	4,432	14,841
9	4,572	113,603	4,549	15,172	3,683	0,865	5,406	34,562
10	5,017	181,838	5,031	20,935	4,375	0,828	5,531	36,439

	17		18		19		20	
№	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi
1	0,413	1,522	0,736	1,105	0,667	0,451	0,651	1,574
2	0,741	1,513	0,758	1,162	1,097	0,613	1,408	1,358
3	1,070	1,700	1,026	1,269	1,670	0,816	2,057	1,255
4	1,942	1,818	2,003	2,056	2,176	0,885	3,016	1,036
5	2,570	2,142	2,865	2,800	2,939	1,225	3,089	1,160
6	3,032	2,321	3,573	3,542	3,645	1,393	3,660	1,126
7	3,337	2,156	3,803	3,928	4,204	1,538	4,118	0,988
8	3,624	2,502	4,487	5,228	4,620	1,622	4,700	0,984
9	4,017	2,434	5,206	7,563	5,089	1,690	5,630	0,901
10	4,265	2,856	5,467	8,063	5,274	1,724	6,514	0,920

	21		22		23		24	
№	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi	Xi	Yi
1	0,256	0,451	0,749	1,532	0,633	0,526	0,046	1,706
2	0,837	1,253	0,897	1,611	1,446	0,419	0,992	2,076
3	1,310	1,600	1,012	1,656	1,821	0,383	1,627	2,553
4	1,749	2,055	1,873	2,518	2,066	0,307	1,941	2,927
5	2,227	2,712	2,624	3,249	2,946	0,229	2,284	2,968
6	3,135	3,474	3,030	3,295	3,227	0,217	2,646	3,555
7	4,130	4,154	3,812	4,013	3,593	0,188	3,206	4,154
8	4,978	4,973	4,732	5,033	3,957	0,179	3,638	4,531
9	5,245	4,868	4,839	5,292	4,692	0,136	3,705	4,726
10	5,863	5,416	4,850	5,308	5,564	0,104	4,118	5,137

V. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Учебным планом предусмотрено выполнение двух контрольных работ (если планом предусмотрена одна работа, решаются задача 2 из работы 1 и задача 1 из работы 2). Работы выполняются в тетради в клетку. Условия задач должны быть записаны полностью, необходимые схемы и таблицы вычерчиваются карандашом.

Решения задач могут быть проделаны вручную, тогда ответ должен быть получен с точностью до трех значащих цифр. Допускается выполнение работ с помощью электронных таблиц EXCEL с приложением распечаток таблиц в двух видах: с показом значений и с показом содержания ячеек (то есть, формул). При решении на компьютере точность представленных ответов – 5 цифр после запятой.

Задача линейного программирования должна быть записана в математической постановке (в виде системы равенств и неравенств) и решена либо графически, либо на компьютере с обязательным представлением графической иллюстрации.

Контрольная работа высылается в КемТИПП не позднее, чем за месяц до начала сессии (при выполнении на компьютере - с приложением дискеты, содержащей таблицы EXCEL). Возможен вариант пересылки контрольных работ, полностью выполненных на компьютере (с текстовым комментарием в виде документа WORD), электронной почтой по одному из адресов e-mail:

pmvt1@mail.kemtipp.ru

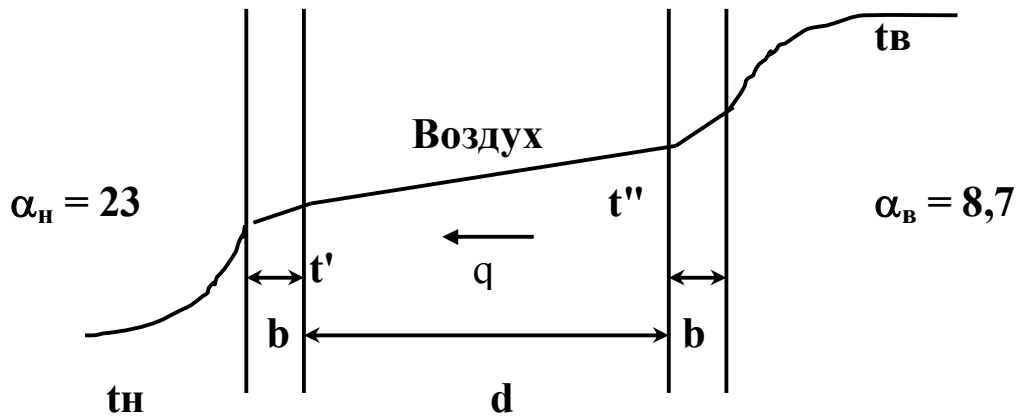
pmvt2@mail.kemtipp.ru

Файлы WORD и EXCEL в этом случае должны иметь формат RTF и быть приложены к письму. В качестве темы (Subject) указываются город, шифр учебной группы и фамилия студента.

Решение проводится в соответствии со своим вариантом задания. Вариант выбирается в зависимости от личного шифра студента, как остаток от целочисленного деления шифра на 25 (то есть, как и в курсе информатики). Исключение – задача линейного программирования, где вариант – это остаток от деления шифра на 15. Если остаток равен нулю, берется вариант 25 (или 15).

5.1. Контрольная работа № 1

Задача 1. Рассчитать перенос тепла через двухслойный оконный переплёт (без учёта излучения).



Перенос тепла через оконный переплёт

Для всех вариантов коэффициент теплопроводности стекла $\lambda_c = 1$ Вт/(м·К).

b – толщина стёкол, мм;

d – ширина зазора, мм;

t_n – наружная температура;

t_v – температура внутри помещения;

t' и t'' – температура поверхностей стёкол;

q – плотность потока тепла;

R – сопротивление (термическое) зазора;

A – коэффициент.

Указания:

Плотность потока тепла:

$$q = \frac{t_v - t_n}{\frac{1}{\alpha_n} + \frac{b}{\lambda_c} + R + \frac{b}{\lambda_c} + \frac{1}{\alpha_v}}$$

Термическое сопротивление зазора:

$$R = \frac{A}{(t' - t'')^{0.25}}$$

Температуры поверхностей стёкол

$$t'' = t_n + q \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{b}{\lambda_c} \right)$$

$$t' = t_b - q \left(\frac{1}{\alpha_b} + \frac{b}{\lambda_c} \right)$$

Необходимо определить плотность потока тепла q . Для этого необходимо знать сопротивление зазора, температуры поверхностей стёкол. Модель сводится к системе нелинейных уравнений.

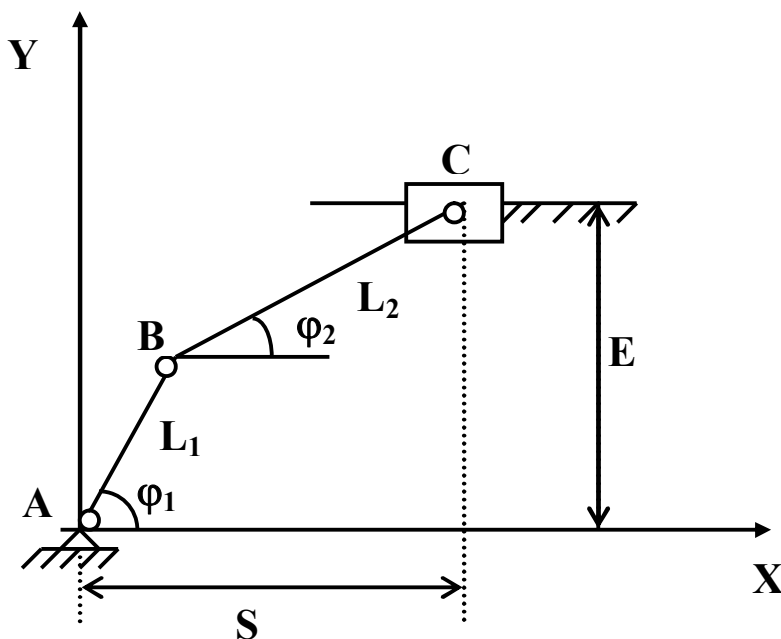
№	b	d	A	t _n	t _b
1	1	50	1,01	-40	30
2	2	60	1,015	-30	25
3	3	70	1,03	-25	22
4	2	80	1,06	-15	20
5	1	90	1,2	-10	18
6	1,5	60	1,015	-5	15
7	1	70	1,13	-38	25
8	2,5	80	1,15	-25	20
9	3	50	1,01	-15	18
10	3,5	60	1,015	-10	18
11	2	100	1,15	-5	15
12	1	110	1,17	-30	19

№	b	d	A	t _n	t _b
13	3	80	1,06	-20	20
14	2	90	1,2	-25	45
15	1	100	1,22	-10	30
16	2	110	1,3	5	18
17	3	120	1,4	-10	20
18	2	100	1,15	-15	22
19	2	50	1,01	10	18
20	2	60	1,015	-10	16
21	1	70	1,12	-22	20
22	1,5	80	1,11	-32	25
23	2,5	90	1,13	-5	18
24	3	100	1,15	-8	20
25	1	70	1,12	-30	22

Для решения использовать метод последовательных приближений.

Задача 2. Имеется кривошипно-ползунный механизм. Известно три положения звеньев: φ_{1i} и S_i , $i = 1, 2, 3$.

Определить: L_1 , L_2 , E .



Кривошипно-ползунный механизм.

L_1 - кривошип; L_2 - шатун; E – дезаксиал.

Указания: Для построения математической модели следует найти проекции L_1 и L_2 на оси X и Y и выразить S и E через эти проекции:

$$S = L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2,$$

$$E = L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \varphi_2$$

Для сокращения количества неизвестных необходимо избавиться от φ_2 . В этом поможет известная из школьного курса формула:

$$\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1.$$

Чтобы ею воспользоваться, следует в записанных формулах слагаемые с φ_2 перенести в левую часть, остальные оставить в правой и обе части возвести в квадрат, затем найти сумму полученных соотношений и упростить её:

$$(L_2 \cos \varphi_2)^2 = (S - L_1 \cos \varphi_1)^2, \quad (L_2 \sin \varphi_2)^2 = (E - L_1 \sin \varphi_1)^2,$$

$$S^2 = L_2^2 - L_1^2 - E^2 + 2L_1 S \cos \varphi_1 + 2L_1 E \sin \varphi_1.$$

Введём новые переменные x_1 , x_2 и x_3 для сокращения записи уравнения:

$$x_1 = L_2^2 - L_1^2 - E^2, \quad x_2 = 2L_1, \quad x_3 = 2L_1E.$$

Тогда

$$x_1 + (S \cos \varphi_1) x_2 + (\sin \varphi_1) x_3 = S^2$$

Итак, уравнение с тремя неизвестными величинами выведено. Учитывая известные три положения шатуна, следует записать систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Решив её, то есть, найдя величины x_1 , x_2 и x_3 , следует найти первоначальные неизвестные:

$$L_1 = x_2/2; \quad E = x_3/(2L_1); \quad L_2 = \sqrt{x_1 + L_1^2 + E^2}$$

№	1		
i	1	2	3
$\varphi_1, ^\circ$	45	90	180
S, м	0,439	0,283	0,083
№	2		
i	1	2	3
$\varphi_1, ^\circ$	60	120	150
S, м	0,312	0,162	0,119
№	3		
i	1	2	3
$\varphi_1, ^\circ$	45	60	120
S, м	0,362	0,344	0,224
№	4		
i	1	2	3
$\varphi_1, ^\circ$	60	90	180
S, м	0,312	0,229	0,095
№	5		
i	1	2	3
	30	75	150
S, м	0,369	0,321	0,196
№	6		
i	1	2	3
$\varphi_1, ^\circ$	60	100	200
S, м	0,520	0,421	0,232

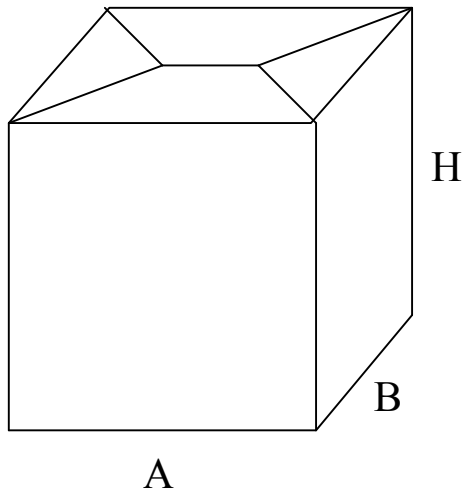
14		
1	2	3
50	90	160
0,561	0,477	0,293
15		
1	2	3
90	135	180
0,387	0,308	0,246
16		
1	2	3
80	180	220
0,423	0,196	0,154
17		
1	2	3
90	120	150
0,477	0,423	0,372
18		
1	2	3
150	180	300
0,330	0,292	0,409
19		
1	2	3
60	180	300
0,394	0,216	0,308

N₂	7		
i	1	2	3
φ₁, °	45	120	225
S, м	0,286	0,231	0,151
N₂	8		
i	1	2	3
φ₁, °	75	180	270
S, м	0,316	0,170	0,155
N₂	9		
i	1	2	3
φ₁, °	90	180	270
S, м	0,500	0,258	0,300
N₂	10		
i	1	2	3
φ₁, °	80	120	200
S, м	0,643	0,474	0,263
N₂	11		
i	1	2	3
φ₁, °	100	200	300
S, м	0,556	0,358	0,432
N₂	12		
i	1	2	3
φ₁, °	120	240	360
S, м	0,324	0,197	0,790
N₂	13		
i	1	2	3
φ₁, °	130	150	180
S, м	0,369	0,317	0,258

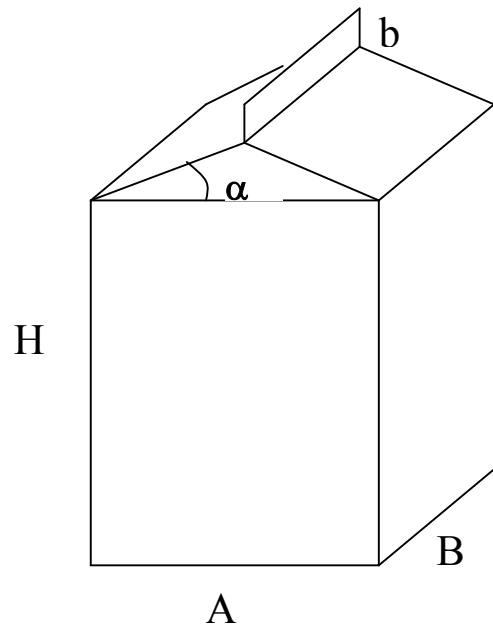
20		
1	2	3
60	150	270
0,428	0,173	0,245
21		
1	2	3
45	150	225
0,503	0,125	0,090
22		
1	2	3
30	120	225
0,462	0,279	0,147
23		
1	2	3
40	90	110
0,480	0,412	0,377
24		
1	2	3
60	80	120
0,526	0,490	0,406
25		
1	2	3
80	90	200
0,495	0,469	0,233

5.2. Контрольная работа № 2

Задача 1. (Одномерная оптимизация). Для упаковки жидких пищевых продуктов используется упаковка типа "тетрапак" одного из двух видов



Вид "А" (соки):



Вид "Б" (молочные продукты):

Для склеивания упаковок вдоль швов предусмотрены припуски шириной b . Геометрические характеристики упаковок и наложенные на них ограничения и связи приведены ниже в таблице для разных вариантов. Необходимо определить размеры упаковки заданного объема, на изготовление которой будет израсходовано наименьшее количество картона.

Для решения задачи следует:

1. Рассмотреть использованную упаковку подходящего типа, определить расположение клеевых швов и припусков и построить развертку упаковки. При необходимости дополнить упаковку до прямоугольника (при раскрое картона вырезаются заготовки в форме прямоугольника, а отрезанные от прямоугольников куски так или иначе идут в отходы). Выразить размеры и площадь прямоугольника через геометрические параметры упаковки.

2. Используя связи между геометрическими параметрами упаковки, привести задачу к одномерной, исключив из выражения площади заготовки часть размеров.

3. Определить значение оставшегося размера, при котором площадь прямоугольной заготовки окажется минимальной.

4. Определить значения остальных размеров упаковки.

Варианты заданий:

№	Вид	V, л	α°	b, см	Связи геометрических размеров
1	A	1	-	1	$A=0.618 H$
2	B	0.7	15	1	$A=B$
3	A	0.5	-	0,5	$A=2B$
4	B	0.5	20	0,5	$A=0.618 H$
5	A	0.2	-	0,25	$A=1.5 B$
6	B	1	25	0,7	$A=B$
7	A	0.7	-	0,5	$A=B$
8	B	0.3	30	0,5	$H=0.75 A$
9	A	0.25	-	0,2	$B=0.75 A$
10	B	0.7	15	0,3	$A=0.6 H$
11	A	1	-	1	$A=0.6 H$
12	B	0.7	20	1	$A=B$
13	A	0.5	-	0,3	$A=B$
14	B	0.5	25	0,3	$A=H$
15	A	0.2	-	0,2	$A=H$
16	B	1	30	0,7	$A=B$
17	A	0.7	-	0,7	$B=0.6 A$
18	B	0.7	15	0,5	$B=1.25A$
19	A	0.25	-	0,2	$A=2 B$
20	B	1	45	1	$B=1.2A$
21	A	1	-	0,6	$A=H$
22	B	0.7	30	0,5	$A=H$
23	A	0.5	-	0,5	$H=1.2 A$
24	B	0.5	15	0,3	$A=B$
25	A	0.2	-	0,3	$A=B$

Задача 2. (Линейное программирование). Поставить и решить графически задачу линейного программирования согласно одному из

приведенных ниже вариантов. Номер варианта в отличие от прочих задач выбирается, как остаток от деления личного шифра на 15.

Задание 1 (варианты 1 – 5). Необходимо определить, какое количество колбас двух видов (виды указаны в таблице по вариантам) нужно производить при имеющихся ресурсах сырья и мощности ведущего оборудования, чтобы получить максимальную прибыль.

В технологическом процессе "узким местом" является термический цех, мощность которого Q тонн колбас в сутки.

№ варианта	Виды колбас		Мощность (Q), т/сут
1	1	4	80
2	2	4	100
3	3	5	80
4	2	3	70
5	1	3	80

Исходные данные для задачи:

Сырьё	Расход сырья в кг на 1 ц колбасы по видам колбас					Ресурсы мяса, кг
	Столовой (вид 1)	Любительской (вид 2)	Докторской (вид 3)	Отдельной (вид 4)	Чайной (вид 5)	
Говядина по сортам:						
высшего		36	26			22700
I	38,6			55		92000
II					62,5	12500
Свинина п/жир	61,2		73		17,3	43336
нежирная		40		21,3		28600
шпик		25		13,9	7,2	20000
Прибыль от производства в руб / центнер продукции	42	75	30	44	25	

Какой вид сырья является лимитирующим?

Задание 2(варианты 6-7). Завод вырабатывает 4 сорта пива. Удельные нормы расхода сырья на производства каждого сорта и общие запасы по основным видам сырья приведены в таблице по вариантам. Уровень прибыли на 1 гектолитр Жигулёвского (пиво-вода) – 4 рубля, Жигулёвского пива бутылочного (0,5л) – 5 руб., Московского (0,5л) – 6 руб., Рижского (0,5л) – 5 руб. 30 коп.

Основные ви- ды сырья	Вариант 6		Вариант 7		Общий запас сы- рья, кг
	Расход на 1 гектолитр				
	Жигу- лёв- ское	Мос- ков- ское	Жигу- лёв- ское (пиво- вода)	Риж- ское	
Солод ячмен- ный	14,69	17,81	14,36	19,8	6956991,4
Сахар сырец	1,03	0	1,0	0	409178,6
Кислота мо- лочная	0,025	0,038	0,021	0,041	11796,8
Вода	1,2	1,3	1,2	1,2	559572
Хмель I сорта	0	0,361	0	0,299	21155,1
Хмель II сор- та	0,19	0	0,19	0	76292,6

Определить выпуск каждого вида пива, при котором общий расход сырья не будет превышать имеющиеся запасы, и суммарная прибыль будет максимальной.

Указать какой вид сырья - лимитирующий.

Задание 3(варианты 8-14). Необходимо определить, какое количество конфет двух видов (виды указаны по вариантам) нужно производить при имеющихся ресурсах сырья, чтобы получить максимальную прибыль.

В таблице приведены все данные по выпускаемой продукции.

Виды конфет по вариантам:

№ вариан- та	Виды конфет
8	Белочка, Фиалка
9	Маска, Кара-кум
10	Маска, Метелица
11	Белочка, Кара-кум
12	Фиалка, Метелица
13	Маска, Фиалка
14	Белочка, Маска

Определить лимитирующий вид сырья.

Норма расхода на 1 т продукции, кг	Бе- лочка	Мас- ка	Кара- Кум	Фи- алка	Мете- лица	Налич- ные объ- ёмы ре- сурсов, кг
Сахар	317,1	366,1	385,1	355,2	366,5	177370
Ореховое сырьё	321,4	93,5	97	45,4	74,3	60181
Молочные про- дукты	0	173,3	0	90,9	170,9	49000
Масло-какао или заменители	26,4	0	76,43	0	70,0	41000
Другие жиры	0	155,6	28,1	151,8	45,5	11000
Какао тёртое или порошок	63,1	20,9	96,1	68,1	0	51032
Шоколадная гла- зурь	304,5	254,6	303,2	254,6	307,6	137564
Максимально возможный объём производства, т	200	200	200	200	200	
Прибыль от про- изводства едини- цы изделия, руб.	3719,45	369,68	331,21	591,62	27,06	

Задание 5(вариант 15). Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и В, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В таблице приведены нормы расхода ингредиен-

тов, объём запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т чая сорта А и В.

Ингредиенты	Нормы расхода (т/т)		Объём за- пасов, т
	А	В	
Индийский чай	0.5	0.2	600
Грузинский чай	0.2	0.6	870
Краснодарский чай	0.3	0.2	430
Прибыль от реали- зации 1 т продук- ции, руб.	3200	2900	

Требуется составить план производства чая сорта А и В с целью максимизации суммарной прибыли.

Какой вид ингредиента - лимитирующий?

VI. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Основные понятия математического моделирования. Этапы создания математической модели.
2. Классификация математических моделей.
3. Адекватность и точность математических моделей.
4. Решение нелинейных алгебраических уравнений методом половинного деления.
5. Решение нелинейных алгебраических уравнений методом последовательных приближений. Условие сходимости метода.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
7. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом последовательных приближений. Условия сходимости метода.
8. Интерполирование сеточных функций: линейная интерполяция.
9. Интерполирование сеточных функций: алгебраическая полиномиальная интерполяция.
10. Дифференцирование сеточных функций.
11. Интегрирование сеточных функций
12. Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера
13. Принцип метода стрельбы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
14. Виды дифференциальных уравнений в частных производных.
15. Граничные условия к уравнениям в частных производных.
16. Принцип решения уравнений в частных производных методом сеток.
17. Общие принципы постановки задач оптимизации. Классификация задач оптимизации.
18. Решение одномерных задач оптимизации методом половинного деления.
19. Задачи линейного программирования (ЗЛП). Графический метод решения двумерной ЗЛП.
20. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия.
21. Преобразование переменных для построения степенной и экспоненциальной регрессий методом наименьших квадратов.

VII. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 496 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М: Высшая школа, 2002.- 840 с.
3. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. – М: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.
4. Гельман В.Я. Решение математических задач средствами EXCEL. – СПб: Питер, 2003. – 240 с.
5. Ларсен Р.У. Инженерные расчеты в EXCEL. – М: Вильямс, 2002. – 544 с.
6. Орвис В Дж. EXCEL для ученых, инженеров и студентов. – Киев: Юниор, 1999. – 528 с.

Семенов Андрей Германович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ПРАКТИКЕ
Учебное пособие

Редактор Л.М. Борискина

Художественный редактор Л.П. Токарева

Подписано к печати 17.12.03. Формат 60×84/16. Уч.-изд. л. 6,25.
Тираж 350 экз. Заказ № 215. Цена 25 руб. Отпечатано на ризографе.

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 650056, г. Кемерово, б-р Строителей, 47. Отпечатано в лаборатории множительной техники КемТИППа, 650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52.