ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Г.И. Станевко, Т.Г. Колесникова, Е.Б. Асташенко

МАТЕМАТИКА. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ В СРЕДЕ MATHCAD

Учебное пособие

Для студентов вузов

Кемерово 2008

УДК 681.3.06
519.6
004.421.2

Рецензенты:
В. Я. Карташов, доктор техн. наук, профессор;
В. С.Черкасов, канд. физ.-мат. наук, доцент.

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Кемеровского технологического института
пищевой промышленности

Станевко Г. И., Колесникова Т. Г., Асташенко Е. Б.
Математика. Численные методы. Лабораторный практикум в среде MathCad: учебное пособие / Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2008. - 41 с.
ISBN

Лабораторный практикум содержит 9 работ, в которых рассматриваются численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, задач одномерной оптимизации, обработки экспериментальных данных. В каждой лабораторной работе кратко изложены необходимые теоретические сведения по численным методам, элементам и конструкциям математического пакета MathCad. Приведены задания и рекомендации по их выполнению.

Предназначается для студентов вуза, научных работников и аспирантов.

УДК 681.3.06
519.6
004.421.2

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие требования к выполнению лабораторных работ

Выполненная лабораторная работа должна содержать рукописный и электронный отчёты.

Первая часть рукописного отчёта оформляется при подготовке к лабораторной работе и должна содержать краткое изложение теории по теме работы, блок-схемы алгоритмов.

Вторая часть оформляется после выполнения работы и должна содержать требуемые в задании сравнительные анализы: методов, результатов, математического обеспечения; выводы, а также заключение преподавателя о проделанной работе.

Электронный отчёт должен формироваться в процессе выполнения работы и содержать:

- номер и тему выполняемой лабораторной работы;
- номера выполняемых пунктов;
- сопроводительные тексты (например, <Исходные данные:>, <Расчётные формулы:>, <Предполагаемые гипотезы:> и т. д.);

Лабораторная работа 1

Входной язык и организация простейших вычислений

Необходимо выполнить все операции, изложенные в теоретическом материале

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

MathCad – мощная гибкая универсальная система компьютерной математики.

Элементы интерфейса

MathCad обладает стандартным графическим интерфейсом, принятым в Windows. Новшеством является палитра математических знаков (рис 1.1), предоставляющая доступ к вычислительным инструментам системы. Вызов палитры осуществляется командой View (Вид) → Math Palette (Математическая палитра).

Работа с текстовым редактором

Тексты применяются для оформления заголовков, комментариев, пояснений по ходу решения задачи. Для ввода текста необходимо выполнить следующие действия:

- введите знак двойной кавычки " на английском регистре – появится прямоугольник с курсором ввода;
- начните набор текста на русском языке (введите хотя бы первые несколько символов, не обращая внимание на их изображение!);

- выделите набранные символы и в списке шрифтов выберите шрифт, содержащий знаки кириллицы, например, Arial Cyr.

Работа с формульным редактором

Для запуска формульного редактора необходимо установить указатель мыши в любое свободное место окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой. На этом месте появится курсор ввода в виде ***красного креста*** (+). В математическом выражении курсор приобретает вид ***синего уголка*** (⌊ или ⌋). Он указывает направление ввода и управляется клавишами перемещения курсора.

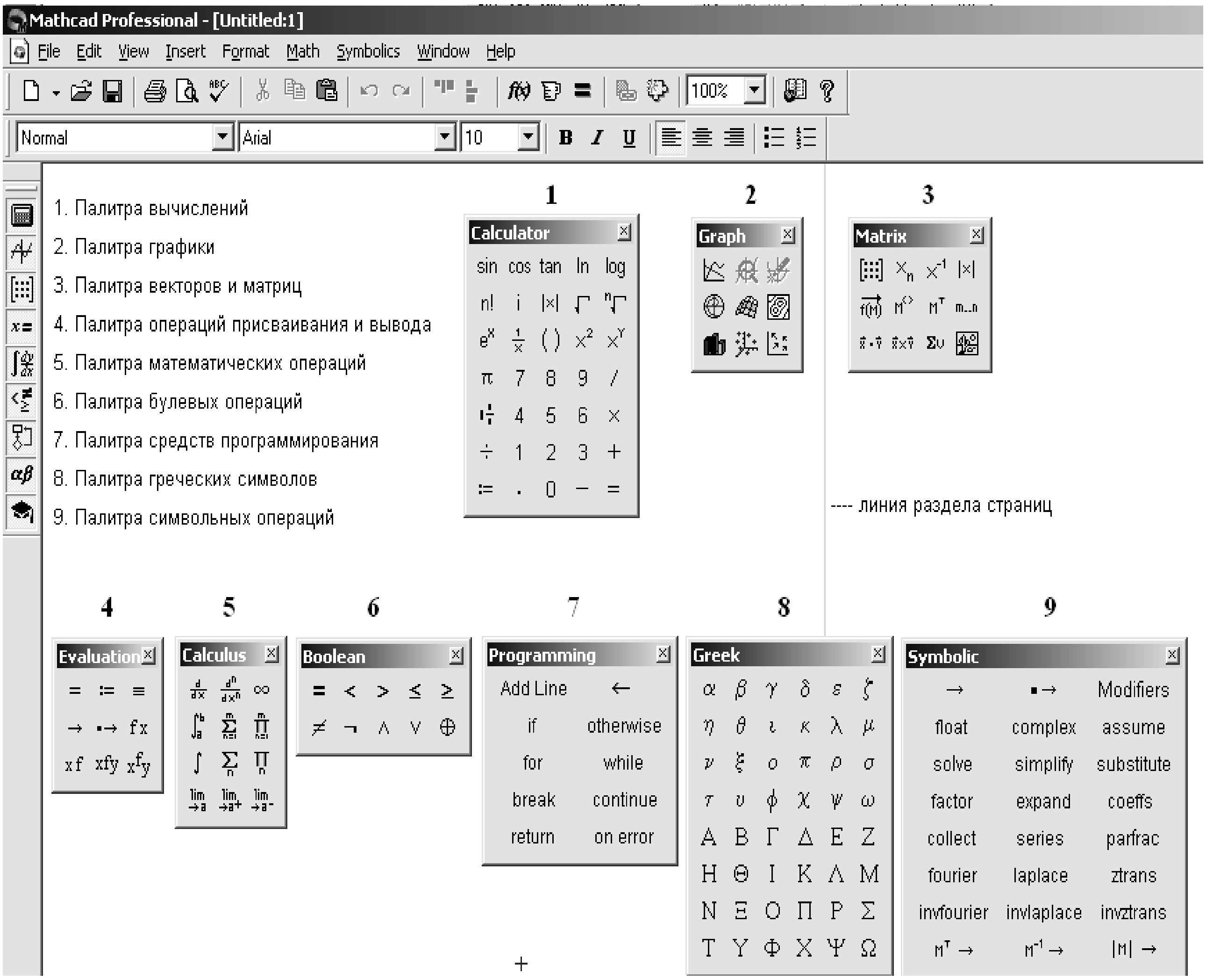


Рис 1.1 Окно MathCad с палитрами математических знаков

Входной язык – промежуточный **математически ориентированный** язык визуального программирования, предполагающий при наборе формул заполнение уже готовых системных шаблонов (элементы шаблона, подлежащие заполнению, изображаются черными прямоугольничками). Эти шаблоны позволяют значительно ускорить и облегчить работу пользователя.

Например:

x:=⌊■ sin(⌊■) ⌊■+■

Составные части языка: переменная, оператор, функция, математическое выражение.

Переменная – это объект, с которым связано имя и значение. Буквы строчные и прописные воспринимаются как ***разные***. Переменные могут быть простыми и индексными.

Оператор – специальный символ, указывающий на выполнение операций над ***данным-операндами***.

Набор и отображение некоторых символов:

- деление (/) отображается дробным выражением; 2/3$\rightarrow\frac{2}{3}$;
- умножение (*) отображается точкой; 2*3$\rightarrow$2·3;
- возведение в степень (^) отображается верхним индексом; 2^3$\rightarrow 2^3$; 2^(1/3) $\rightarrow 2^{\frac{1}{3}}$;
- двоеточие (:) отображается знаком присваивания (:=); x:5$\rightarrow$x:=5;
- точка с запятой (;) отображается двумя подряд расположенными точками (..), означающими диапазон изменения (**от..до включительно**).

Функция – объект, имеющий имя и параметры, указываемые в круглых скобках. В инструкциях по применению функций фразу “возврат значения” следует понимать, как результат вычисления в ответ на обращение к функции.

Математическое выражение – формула, состоящая из операндов, операторов и функций. Набор клавиши равно (=) вызывает вычисление математического выражения с выводом результата на экран:

2+Ln (2.73) = *3*.

Способы выделения

- Выделение позиции ввода осуществляется щелчком левой кнопки мыши.
- Выделение всей формулы или части её осуществляется последовательным нажатием клавиши ***пробел*** до тех пор, пока ***курсор в виде синего уголка*** не охватит всё выражение или его требуемую часть.
- Часть рабочего документа выделяется протаскиванием мыши при нажатой левой кнопке по диагонали области от верхнего левого угла в нижний правый, при этом выделяемая область окаймляется штриховой границей.

Выделенный фрагмент можно копировать, перемещать, удалять и вставлять обычными средствами Windows.

Порядок расположения вычислительных блоков

Вычислительные блоки нельзя располагать в документе произвольно. Блоки, готовящие данные для выполнения каких-либо операций, должны располагаться выше и левее блоков, выполняющих эти операции.

Организация счёта по формулам

Набор формул можно производить непосредственно, используя клавиатуру, или с помощью инструментов математической палитры. Набор выражений:

a+b, a/b, a*b

лучше начинать с набора знака операции.

Задание 1. Наберите с помощью клавиатуры и вычислите выражения:

-5.5+54 8-21/7 7+(8-4)/(2+6) 3^3 15*2.5

32 ^ (1/4) -15*cos(1.57) (-27)^(1/3) 3-((2+6)/(5-3))*4

Задание 2. Наберите с помощью математических инструментов и вычислите:

-8*sin(3.14) 5*cos (π/6) $\sqrt[5]{96}$ - $\sqrt{37}$

$\left(\sum_{i=2}^{6} i\right)$- (1+3)/((5-2)^2) $\prod_{k=-1}^{3}(k+1)$ $\int_{-3}^{5} x dx$

Задание 3. Вычислите выражения с данными таблицы 1, используя копирование формул.

$x^3 - \dfrac{y*z+k}{t-k} + 5.67$ $\sum_{i=z}^{k}(x*i - \sqrt{t} + 5)$ x*y-(t^(k+1)+5*$\sqrt[3]{z}$

Таблица 1

x	y	z	t	k
2	-3	-5	4	-2
5	3	-2	7	2

Организация символьных вычислений

MathCad выполняет многие математические преобразования и операции математического анализа. Для этих целей разработан специальный символьный редактор, который активизируется щелчком по пункту **Symbolics** (символьные вычисления) главного меню. Символьные операции выполняются только с выделенными фрагментами. Меню **Symbolics** содержит операции символьной математики. Приведём некоторые из них:

- **Expand** (развернуть) – раскрыть скобки, перемножить и привести подобные;
- **Solve** – найти значения выделенной переменной, при которых содержащее её выражение становится равным нулю;
- **Symplify** (упростить) – выполнить арифметические операции, привести подобные, сократить дроби, использовать для упрощения основные тождества (формулы сокращённого умножения, тригонометрические тождества и т.п.);
- **Substitute** – заменить выделенную переменную содержимым буфера обмена;

- **Series** – разложить в ряд Тейлора в <u>окрестности</u> заданной точки (в позиции ввода шаблона надо набрать переменную и её значение)[1];
- **Faktor** (разложить на множители) – представить, если возможно, выражение в виде произведения простых сомножителей;

Задание 4. Вычислите:

$\int x^3 dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad \dfrac{d^2}{dx^2} x^3$ $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(2n)!}$

Раскройте скобки: $(x^2 - y^2)(x^3 - y^3)$.

Разложите на множители: $(x^3 - y^3)$.

Упростите выражение: $\left(2- \dfrac{3}{4x-2}\right)\left(2-\dfrac{8x^4}{4x \quad + 2}\right)$.

Разложите функции

f(x)=cos(x) и f(x)=sin(x/(x+2))

в ряд Тейлора в окрестности точки x=0.

Вычисление значений функции

Вычисление значения функции в одной точке осуществляется набором функции в общем математическом виде

f(x):= <выражение>

и оператором обращения к ней при конкретном значении аргумента.
Например,

f(x):=x+3.5
f(5)=

В функциях многих переменных аргументы разделяются запятой.
Например,

F(x, y):=<выражение>
F(3.5, 2)=

Задание 5. Вычислите значения функций

Z(k)=k^2 -5cos(k+2)
z(x, y)=(x-y)/(x+y) – 4

при данных таблицы 1.

[1] В более поздних версиях Mathcad кроме окрестности точки указывается количество членов разложения в ряд.

Лабораторная работа 2

Табулирование функций. Построение графиков

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

В механизме вычисления значений функции при аргументе, изменяющимся на интервале *[a, b]* с шагом *h*, заложен цикл *for*, требующий задания начального значения аргумента, его следующего и конечного значений. По разности первых двух значений автоматически вычисляется шаг изменения аргумента.

Например, оператор изменения аргумента

x:=-2,-1.5..0

формирует значения

x=-2,-1.5,-1,-0.5,0.

При шаге, равном 1, запись сокращается. Так, оператор

x:=2..4

формирует значения

x=2, 3, 4.

После задания оператора изменения аргумента следует набрать оператор вызова функции и нажать клавишу ***равно (=)***. Результаты табулирования будут выданы в виде вектора-столбца.

Аналогично выдаются и значения аргумента.

Задание 1. Вычислите значения функций

$$\mathbf{Z(k)=k^{2}-5*cos(k+2)}$$
$$\mathbf{z(x, y)=(x-y)/(x+y)-4}$$

при

$k\in[3, 4]$, изменяющимся с шагом 0,2;
$x\in[1, 5]$ и $y\in[2, 6]$, изменяющихся с шагом 1.

Задание 2. Присоединить к таблицам столбцы со значениями аргументов. При оформлении таблицы значений функции двух переменных таблица строится следующим образом: первому аргументу вручную присваивается первое значение на интервале, при нем вызываются все значения второго аргумента и соответствующие значения функции. Далее первому аргументу опять вручную присваивается второе значение на интервале и при нем действия повторяются, как и при его первом значении и так далее до конца интервала изменения первого аргумента (рис. 2.1).

x:=1	y=	z(x,y)=
	2	…
	3	…
	…	…
	6	…
x:=2	y=	z(x,y)=
	2	…
	3	…
	…	…
	6	…
…	…	…

Рис 2.1 Таблица результатов табулирования функции двух переменных

Построение графика функции

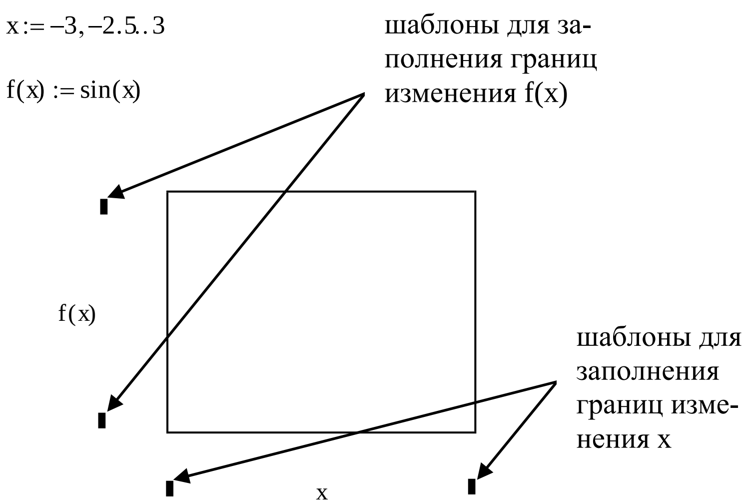
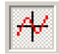
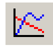


Рис. 2.2 Подготовка к построению графика функции

Ниже функции, набранной в общем виде, воспользуйтесь пиктограммой  с изображением графика  или клавишей @. После вывода шаблона графика (рис. 2.2) заполните позиции ввода по горизонтали начальным значением аргумента, наименованием аргумента и его конечным значением, а по вертикали в средней позиции ввода укажите наименование функции (не забудьте указать и аргумент). Если строятся графики нескольких функции на одном поле, то их имена перечисляются через запятую. За щелчком вне поля графика последует его вывод.

Форматирование графика

Любое форматирование графика осуществляется по пунктам контекстного меню, вызываемого двойным щелчком по полю графика (рис 2.3).

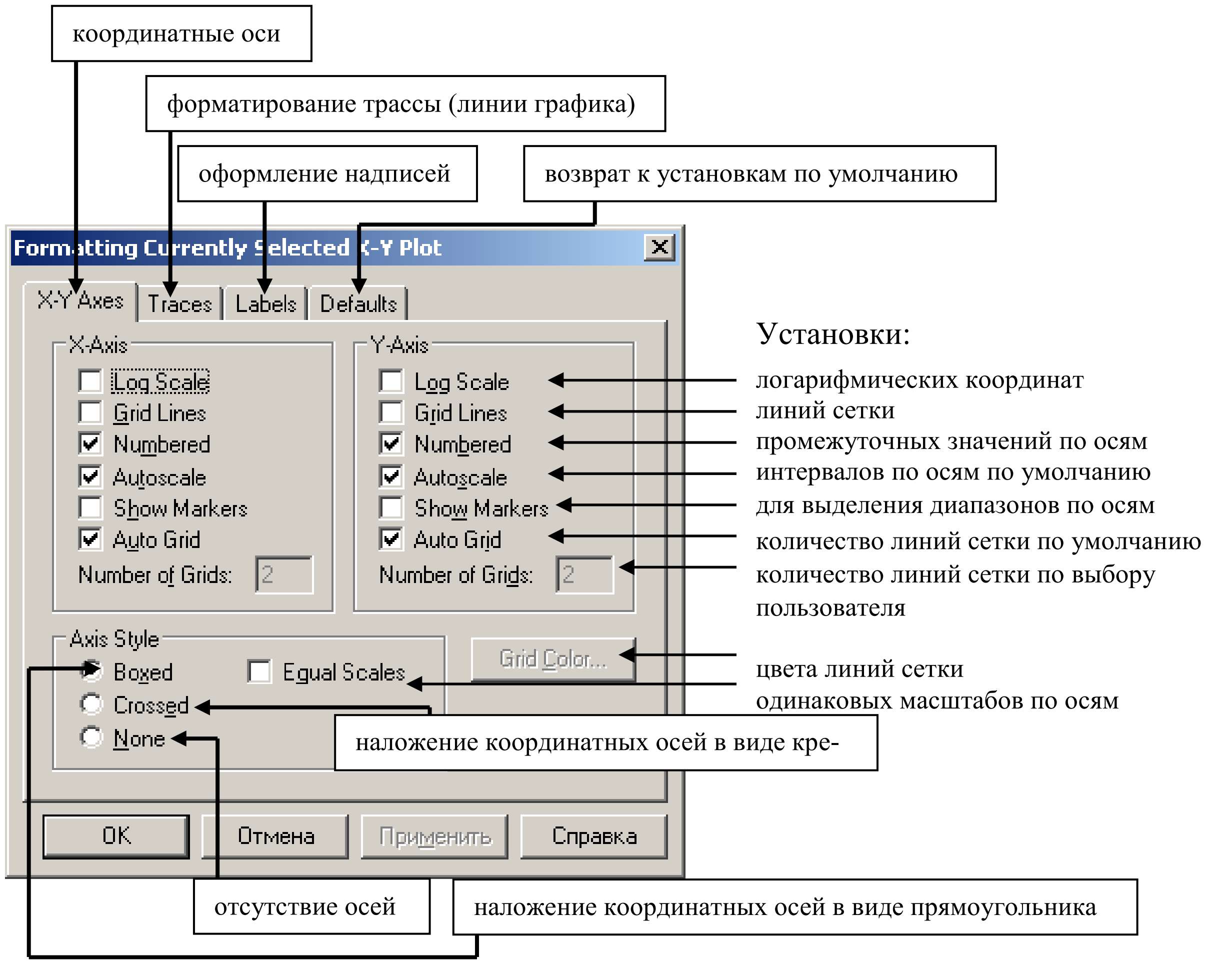


Рис 2.3 Контекстное меню форматирования графика

Задание 3. Постройте графики функций:

$$y=(x-2)^2+4 \qquad y=-(x-2)^2+4$$

отдельно и вместе. Проиграйте все пункты меню: вкладки X-Y Axes, Traces, Labels, Defaults. Наложите сетки. Установите координатные оси. Увеличьте размеры графиков.

Лабораторная работа 3

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Необходимо выполнить все операции, изложенные в теоретическом материале. Протоколы решения задач должны сопровождаться текстовыми комментариями. Для каждого уравнения при действительных корнях должна быть выполнена проверка.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Общий вид уравнения *f(x)=0*.

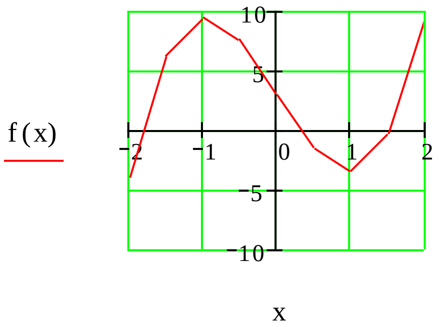
Численное решение уравнения осуществляется в два этапа. На первом этапе производится ***отделение корней***, т.е. установление интервалов, в каждом из которых находится только один корень. На втором этапе осуществляется ***уточнение отделенных корней***, т.е. доведение их значений до заданной точности.

Пример 1. **Отделение корней** уравнения на основе построения графика:
Пусть уравнение имеет вид:

$$2 \cdot x^3 - 10 \cdot \sin(x) + 3 = 0$$

На рисунке 3.1 приведены: график функции, интервалы отделенных корней и рекомендации по заданию начальных приближений к корням.

$x := -2, -1.5 .. 2 \qquad f(x) := 2 \cdot x^3 - 10 \cdot \sin(x) + 3$



На интервале [-2,2] уравнение имеет три действительных корня, принадлежащие подинтервалам: [-2,-1.5], [0,0.5], [1.2,2]. За начальное приближение к корню на каждом подинтервале можно взять любое значение x, наиболее близкое к истинному значению корня, принадлежащему этому подинтервалу.

Рис 3.1 График функции $f(x)=2 \cdot x^3 - 10 \cdot \sin(x) + 3$

Средства MathCad

Для выполнения работы необходимо описать функцию в виде

f(x):=<выражение>

1. Команда *solve*. Возвращает аналитическое и (или) численное значение корней уравнения *f(x)=0*.

Пример 2. Получение аналитического решения для квадратного уравнения:

Вариант I:

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b + \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b - \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

Вариант II:

$$f(x) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c \qquad f(x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b + \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b - \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

Пример 4. Получение численного решения для квадратного уравнения

$$5x^2 + 3x - 2 = 0:$$

Вариант I:

$$5\cdot x^2 + 3\cdot x - 2 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Вариант II:

$$f(x) := 5\cdot x^2 + 3\cdot x - 2 \qquad f(x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Вариант III:

$$a := 5 \qquad b := 3 \qquad c := -2$$

$$f(x) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

$$f(x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Получили два вещественных корня: -1, 0,4.

2. Функция *root*. Синтаксис:

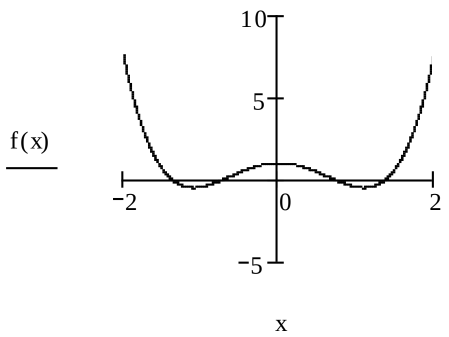
***root** (Выражение, имя переменной).*

Функция реализует процесс уточнения корня итерационным методом. Перед её применением надо задать начальное приближение к корню, которое может быть определено по результатам табулирования функции или на основе построения графика. Функцию ***root*** можно применять в виде *x1:=* ***root****(F(x),x)* или ***root****(F(x), x) =* .

Пример 3. Демонстрация вариантов применения функции ***root***:

Пусть уравнение имеет вид $x^4 - 2\cdot x^2 + \cos(x) = 0$

График функции $f(x) := x^4 - 2\cdot x^2 + \cos(x)$



Решение:

1) Начальное приближение: $x := -1$

$koren1 := root\left(x^4 - 2\cdot x^2 + \cos(x), x\right)$

$koren1 = -1.378$

2) Начальное приближение: $x := -2$

$koren2 := root(f(x), x)$

$koren2 = -1.378$

3) Начальное приближение: $x := 2$

$root(f(x), x) = 1.378$

4) Начальное приближение: $x := 1.5$

$koren4 := root(f(x), x)$

$koren4 = 1.378$

Остальные корни уточняются аналогично.

3. Вычислительный блок *Given*. Блок предназначен для приближённого нахождения действительных решений уравнений и систем и имеет структуру:

- *Начальные значения*:
  для уравнения - значение переменной;
  для систем - вектор значений переменных.
  Начальные значения задаются в виде: <переменная> := <значение>.
- ***Given***
- *Уравнение (я).*

Знак равенства набирается жирным знаком равно (**=**) из палитры знаков соотношений.

- *Ограничительные условия на неизвестные* (могут отсутствовать).
- *Выражения с функциями* ***Find*** или ***Minerr.***

Между функциями ***Find*** и ***Minerr*** существует принципиальные различия. Первая функция используется, когда решение реально существует. Вторая функция пытается найти максимальное приближение даже к несуществующему решению путём минимизации среднеквадратической погрешности решения. При использовании этих функций рекомендуется дополнить блок проверкой решения.

Пример 6. Уточнение отделённых корней для уравнения

$$2 \cdot x^3 - 10 \cdot \sin(x) + 3 = 0$$

Уточнение корня на интервале [-2, -1.5] при начальном значении равном -2 и ограничении x≤0

$F(x) := 2 \cdot x^3 - 10 \cdot \sin(x) + 3$

$x := -2$ Given

$F(x) = 0$ $x \le 0$

$x1 := \mathrm{Find}(x)$

$x1 = -1.84783$ $x1 = -1.848$ (с точностью 0.00

Проверка: $F(x1) = 1.16 \times 10^{-6}$

Уточнение корня на интервале [1.2, 2] при начальном значении равном 1.5 и ограничении 1.2≤x≤2

$x := 1.5$ Given

$F(x) = 0$ $1.2 \le x \le 2$

$x2 := \mathrm{Find}(x)$

$x2 = 1.51726$ $x2 = 1.517$ (с точностью 0.00

Проверка: $F(x2) = -2.71 \times 10^{-8}$

Задание

1. Отделите любой корень каждого уравнения Вашего варианта (Таблица 1).
2. Найдите решение с точностью 0,0001 всеми приведенными методами.
3. Проведите проверку полученных решений.
4. Сравните методы решения и сделайте вывод о том, какими методами можно решать уравнения, имеющие действительные и/или комплексные корни.

Таблица 1

№ варианта	Уравнение 1	Уравнение 2
1	$x - \sin x = 0{,}25$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$
2	$tg(0{,}58x + 0{,}1) = x^2$	$x^3 - 6x - 8 = 0$

Окончание табл. 1

№ варианта	Уравнение 1	Уравнение 2
3	$\sqrt{x}-\cos(0{,}387x)=0$	$x^3-3x^2+6x+3=0$
4	$tg(0{,}4x+0{,}4)=x^2$	$x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$
5	$\lg x-\frac{7}{2x+6}=0$	$x^3-3x^2+9x+2=0$
6	$tg(0{,}5x+0{,}2)=x^2$	$x^2+x-5=0$
7	$3x-\cos x-1=0$	$x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}2=0$
8	$x+\lg x=0{,}5$	$x^3+3x+1=0$
9	$tg(0{,}5x+0{,}1)=x^2$	$x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}2=0$
10	$x^2+4\sin x=0$	$x^3-3x^2+12x-9=0$
11	$ctg1{,}05x-x^2=0$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}3x-1{,}2=0$
12	$tg(0{,}4x+0{,}3)=x^2$	$x^3-3x^2+6x-2=0$
13	$x\lg x-1{,}2=0$	$x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$
14	$1{,}8x^2-\sin 10x=0$	$x^3+3x^2+6x-1=0$
15	$ctgx-\frac{x}{4}=0$	$x^3+0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}2=0$
16	$tg(0{,}3x+0{,}4)=x^2$	$x^3+4x-6=0$
17	$x^2-20\sin x=0$	$x^3+0{,}2x^2+0{,}5x+0{,}8=0$
18	$ctgx-\frac{x}{3}=0$	$x^3-3x^2+12x-12=0$
19	$tg(0{,}47x+0{,}2)=x^2$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}3x+1{,}2=0$
20	$x^2+4\sin x=0$	$x^3-2x+4=0$
21	$ctgx-\frac{x}{2}=0$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}4=0$
22	$2x-\lg x-7=0$	$x^3-3x^2+6x-5=0$
23	$tg(0{,}3x+0{,}4)=x^2$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}3x+1{,}2=0$
24	$3x-\cos x-1=0$	$x^3-3x^2+6x-5=0$
25	$ctgx-\frac{x}{10}=0$	$x^3+3x^2+12x+3=0$
26	$x^2+4\sin x=0$	$x^3-0{,}1x^2+04x+2=0$
27	$tg(0{,}36x+0{,}4)=x^2$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}4x-1{,}4=0$
28	$x+\lg x=0{,}5$	$x^3+0{,}4x^2+0{,}6x-1{,}6=0$
29	$2^x+5x-3=0$	$2x^3-9x^2-60x+1=0$
30	$e^{-2x}-2x+1=0$	$2x^4-x^2-10=0$

Лабораторная работа 4

Решение систем линейных и нелинейных уравнений

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

1. **Система линейных алгебраических уравнений:**

- общепринятый вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad & \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- матричный вид:

$$Ax = B,$$

где
A - квадратная матрица коэффициентов,
x - вектор неизвестных,
B - вектор свободных членов.

2. **Система нелинейных уравнений:**

Общий вид:

$$\begin{aligned} F1(x_1, x_2, \ldots, x_n,) &= 0 \\ F2(x_1, x_2, \ldots, x_n,) &= 0 \\ \ldots \ \ldots & \\ Fn(x_1, x_2, \ldots, x_n,) &= 0 \end{aligned}$$

Средства MathCad

- За нумерацию элементов векторов и матриц в MathCad отвечает переменная ***ORIGIN,*** принимающая значения 0 или 1. По умолчанию ***ORIGIN*=0.**
- Матрица A^{-1} - обратная матрица для матрицы A.
- $| A |$ - определитель матрицы A.

1. Точные методы решений:
- **Крамера;**
- $\boldsymbol{x=A^{-1}B}$**;**
- **Функция *lsolve(A,B)* -** возвращает вектор решения, такой, что $Ax=B$.

2. Приближённые методы решений:
- **Функции *Find(x, y, z, ..)* и *Minerr(x*,** y, z**, ..),** включённые в блок ***Given,*** возвращают приближённое решение системы уравнений, записанной в **простых переменных *x, y, z, ...*** . Число аргументов в этих функциях должно быть равно числу неизвестных. **Начальные значения** неизвестных задаются перед блоком ***Given.***

Задание

1. Решите всеми указанными способами системы уравнений Вашего варианта (Таблицы 1, 2), и проведите проверку полученных решений.
2. Сравните способы решений и сделайте вывод о том, какими методами можно решать системы нелинейных уравнений.

Таблица 1. Системы линейных уравнений

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2{,}45x_1 + 1{,}75x_2 - 3{,}24x_3 = 1{,}23 \\ 1{,}75x_1 - 1{,}16x_2 + 2{,}18x_3 = 3{,}43 \\ -3{,}24x_1 + 2{,}18x_2 - 1{,}85x_3 = -0{,}16 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 1{,}65x_1 - 2{,}27x_2 + 0{,}18x_3 = 2{,}25 \\ -2{,}27x_1 + 1{,}73x_2 - 0{,}46x_3 = 0{,}93 \\ 0{,}18x_1 - 0{,}46x_2 + 2{,}16x_3 = 1{,}33 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 3{,}23x_1 + 1{,}62x_2 + 0{,}65x_3 = 1{,}28 \\ 1{,}62x_1 - 2{,}33x_2 - 1{,}43x_3 = 0{,}87 \\ 0{,}65x_1 - 1{,}43x_2 + 2{,}18x_3 = -2{,}87 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 0{,}93x_1 + 1{,}42x_2 - 2{,}55x_3 = 2{,}48 \\ 1{,}42x_1 - 2{,}87x_2 + 2{,}36x_3 = -0{,}75 \\ -2{,}55x_1 + 2{,}36x_2 - 1{,}44x_3 = 1{,}83 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 1{,}42x_1 - 2{,}15x_2 + 1{,}07x_3 = 2{,}48 \\ -2{,}15x_1 + 0{,}76x_2 - 2{,}18x_3 = 1{,}15 \\ 1{,}07x_1 - 2{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}88 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2{,}23x_1 - 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 1{,}28 \\ -0{,}71x_1 + 1{,}45x_2 - 1{,}34x_3 = 0{,}64 \\ 0{,}63x_1 - 1{,}34x_2 + 0{,}77x_3 = -0{,}87 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 1{,}63x_1 + 1{,}27x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}51 \\ 1{,}27x_1 + 0{,}65x_2 + 1{,}27x_3 = -0{,}63 \\ -0{,}84x_1 + 1{,}27x_2 - 1{,}21x_3 = 2{,}15 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 0{,}78x_1 + 1{,}08x_2 - 1{,}35x_3 = 0{,}57 \\ 1{,}08x_1 - 1{,}28x_2 + 0{,}37x_3 = 1{,}27 \\ -1{,}35x_1 + 0{,}37x_2 + 2{,}86x_3 = 0{,}47 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 0{,}83x_1 + 2{,}18x_2 - 1{,}73x_3 = 0{,}28 \\ 2{,}18x_1 - 1{,}41x_2 + 1{,}03x_3 = -1{,}18 \\ -1{,}73x_1 + 1{,}03x_2 + 2{,}27x_3 = 0{,}72 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}16 \\ -1{,}18x_1 + 1{,}71x_2 - 0{,}52x_3 = 1{,}81 \\ 1{,}23x_1 - 0{,}52x_2 + 0{,}62x_3 = -1{,}25 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 1{,}35x_1 - 0{,}72x_2 + 1{,}38x_3 = 0{,}88 \\ -0{,}72x_1 + 1{,}45x_2 - 2{,}18x_3 = 1{,}72 \\ 1{,}38x_1 - 2{,}18x_2 + 0{,}93x_3 = -0{,}72 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 1{,}48x_1 + 0{,}75x_2 - 1{,}23x_3 = 0{,}83 \\ 0{,}75x_1 - 0{,}96x_2 + 1{,}64x_3 = -1{,}12 \\ -1{,}23x_1 + 1{,}64x_2 - 0{,}55x_3 = 0{,}47 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2{,}16x_1 - 3{,}18x_2 + 1{,}26x_3 = 1{,}83 \\ -3{,}18x_1 + 0{,}63x_2 - 2{,}73x_3 = 0{,}54 \\ 1{,}26x_1 - 2{,}73x_2 + 3{,}15x_3 = 1{,}72 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 0{,}63x_1 - 1{,}72x_2 + 3{,}37x_3 = -0{,}75 \\ -1{,}72x_1 - 2{,}27x_2 + 1{,}62x_3 = 1{,}27 \\ 3{,}27x_1 + 1{,}62x_2 - 0{,}43x_3 = 2{,}74 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 1{,}36x_1 + 0{,}92x_2 - 1{,}87x_3 = 2{,}15 \\ 0{,}92x_1 - 2{,}24x_2 + 0{,}77x_3 = -2{,}06 \\ -1{,}87x_1 + 0{,}77x_2 - 1{,}16x_3 = 0{,}17 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2{,}32x_1 + 1{,}17x_2 - 0{,}28x_3 = 1{,}43 \\ 1{,}17x_1 - 1{,}43x_2 + 0{,}88x_3 = -0{,}47 \\ -0{,}28x_1 + 0{,}88x_2 - 1{,}45x_3 = 1{,}09 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 0{,}75x_1 - 1{,}24x_2 + 1{,}56x_3 = 0{,}49 \\ -1{,}24x_1 + 0{,}18x_2 - 1{,}72x_3 = -0{,}57 \\ 1{,}56x_1 - 1{,}72x_2 + 0{,}79x_3 = 1{,}03 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 1{,}18x_1 + 2{,}32x_2 - 0{,}67x_3 = 1{,}83 \\ 2{,}32x_1 + 1{,}87x_2 + 1{,}35x_3 = -0{,}73 \\ -0{,}67x_1 + 1{,}35x_2 - 0{,}88x_3 = 0{,}68 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 0{,}78x_1 + 1{,}13x_2 + 1{,}87x_3 = 0{,}83 \\ 1{,}13x_1 - 0{,}68x_2 + 2{,}16x_3 = -0{,}27 \\ 1{,}87x_1 + 2{,}16x_2 - 2{,}63x_3 = 1{,}37 \end{cases}$

Окончание табл. 1.

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
21	$\begin{cases} 1{,}17x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}54x_3 = -1{,}43 \\ -0{,}65x_1 + 1{,}16x_2 - 1{,}73x_3 = 0{,}68 \\ 1{,}54x_1 - 1{,}73x_2 + 2{,}15x_3 = 1{,}87 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 0{,}87x_1 + 1{,}35x_2 - 0{,}44x_3 = 1{,}51 \\ 1{,}35x_1 - 1{,}22x_2 + 2{,}32x_3 = 0{,}71 \\ -0{,}44x_1 + 2{,}32x_2 - 3{,}73x_3 = 0{,}53 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 1{,}17x_1 + 2{,}23x_2 - 0{,}77x_3 = 1{,}11 \\ 2{,}23x_1 - 0{,}81x_2 + 1{,}72x_3 = 1{,}88 \\ -0{,}77x_1 + 1{,}72x_2 - 0{,}65x_3 = 0{,}57 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2{,}16x_1 + 1{,}45x_2 - 0{,}89x_3 = 0{,}61 \\ 1{,}45x_1 - 2{,}44x_2 + 1{,}18x_3 = 1{,}05 \\ -0{,}89x_1 + 1{,}18x_2 - 2{,}07x_3 = -0{,}83 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 0{,}64x_1 + 1{,}05x_2 - 2{,}93x_3 = 1{,}18 \\ 1{,}05x_1 - 1{,}41x_2 + 0{,}16x_3 = -0{,}27 \\ -2{,}93x_1 + 0{,}16x_2 - 1{,}51x_3 = 0{,}72 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 1{,}54x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}36x_3 = 2{,}45 \\ -0{,}75x_1 + 0{,}87x_2 - 0{,}79x_3 = 1{,}07 \\ 1{,}36x_1 - 0{,}79x_2 + 0{,}64x_3 = 0{,}54 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 2{,}44x_1 - 1{,}16x_2 + 0{,}83x_3 = 0{,}65 \\ -1{,}16x_1 - 3{,}45x_2 + 0{,}57x_3 = 1{,}88 \\ 0{,}83x_1 + 0{,}57x_2 - 1{,}71x_3 = 0{,}74 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2{,}56x_1 + 0{,}67x_2 - 1{,}78x_3 = 1{,}14 \\ 0{,}67x_1 - 2{,}67x_2 + 1{,}35x_3 = 0{,}66 \\ -1{,}78x_1 + 1{,}35x_2 - 1{,}55x_3 = 1{,}72 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 0{,}53x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}83x_3 = 0{,}68 \\ -0{,}75x_1 + 0{,}68x_2 - 1{,}19x_3 = 0{,}95 \\ 1{,}83x_1 - 1{,}19x_2 + 2{,}15x_3 = 1{,}27 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 1{,}65x_1 - 1{,}76x_2 + 0{,}77x_3 = 2{,}15 \\ -1{,}76x_1 + 1{,}04x_2 - 2{,}61x_3 = 0{,}82 \\ 0{,}77x_1 - 2{,}61x_2 - 3{,}18x_3 = -0{,}73 \end{cases}$

Таблица 2. Системы нелинейных уравнений

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8 \\ \sin x - 2y = 1{,}6 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$	4	$\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0{,}4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1{,}5 \\ y + \cos(x-2) = 0{,}5 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8 \\ \sin y - 2x = 1{,}6 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$	14	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0{,}4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6 \\ \cos(y-1) + x = 1 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}2 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 2 \end{cases}$

Окончание табл. 2.

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
19	$\begin{cases}\sin(x+2)-y=1{,}5\\ x+\cos(y-2)=0{,}5\end{cases}$	20	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1{,}2\\ \cos(y-2)+x=0\end{cases}$
21	$\begin{cases}\sin(y+1)-x=1{,}2\\ 2y+\cos x=2\end{cases}$	22	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=1\\ \sin y-2x=2\end{cases}$
23	$\begin{cases}\cos(y-1)+x=0{,}5\\ y-\cos x=3\end{cases}$	24	$\begin{cases}\sin(x-1)+y=1{,}5\\ x-\sin(y+1)=1\end{cases}$
25	$\begin{cases}\sin y+2x=2\\ \cos(x-1)+y=0{,}7\end{cases}$	26	$\begin{cases}\sin(y+1)-x=1\\ 2y+\cos x=2\end{cases}$
27	$\begin{cases}\cos y+x=1{,}5\\ 2y-\sin(x-0{,}5)=1\end{cases}$	28	$\begin{cases}\cos(y-1)+x=0{,}8\\ y-\cos x=2\end{cases}$
29	$\begin{cases}\sin(y+0{,}5)-x=1\\ \cos(x-2)+y=0\end{cases}$	30	$\begin{cases}\cos(x-1)+y=1\\ \sin y+2x=1{,}6\end{cases}$

Лабораторная работа 5

Программирование в среде MathCad

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Программный модуль (блок) – последовательность операторов, выделенная в тексте документа жирной вертикальной чертой.

Для формирования модуля используется структура подпрограммы – функции с параметрами. Модуль выполняет роль тела функции. Объявление функции имеет вид:

F(x, y, … ,t) := < модуль>

где

F – имя функции;

x, y, .. , t - список параметров - входных данных: имен функций, имен переменных и/или конкретных значений.

Последняя строка модуля инициирует результат его выполнения и должна иметь вид:

<имя результата>

Результатом выполнения модуля может быть простая переменная или массив. Переменные программного модуля являются локальными переменными, прекращающими своё действие за его пределами.

Обзор программных операторов MathCad

Набор операторов для создания программных модулей весьма ограничен и содержит следующие элементы:

Add Line – создаёт и при необходимости удлиняет жирную вертикальную линию, справа от которой в шаблонах задаётся запись программного блока;
$\leftarrow$ – символ локального присвоения (в теле модуля вместо символа **:=**);
if – условный оператор;
for – оператор задания цикла с фиксированным числом повторений;
while – оператор задания цикла "пока" (цикл выполняется, пока выполняется некоторое условие);
otherwise – оператор иного выбора (обычно применяется с **if**);
break – оператор прерывания;
continue – оператор продолжения;
return – оператор-функция возврата;
on error – оператор обработки ошибок.

- **Оператор Add Line** выполняет функции расширения программного блока. Расширение фиксируется удлинением вертикальной черты программных блоков или их древовидным расширением. Благодаря этому, в принципе, можно создавать сколь угодно большие программы.
- Оператор внутреннего присваивания $\leftarrow$ выполняет функции внутреннего локального присваивания.

  Например, выражение $\boldsymbol{x \leftarrow 123}$ присваивает переменной $\boldsymbol{x}$ значение ***123***. Локальный характер присвоения означает, что такое значение $\boldsymbol{x}$ сохраняет только в теле программы. За пределами тела программы значение переменной $\boldsymbol{x}$ может быть не определённым, либо равным значению, которое задаётся операторами локального **:=** и глобального $\equiv$ присвоения вне программного блока.
- Условный оператор **if** в виде:

  Выражение* if *Условие

  Если условие **выполняется**, то возвращается значение ***Выражения***. Совместно с этим оператором часто используются операторы прерывания **break** и оператор иного выбора **otherwise**.

  Кроме условного оператора **if** Mathcad располагает условной функцией ***if***, имеющей вид:

  if (Условие, f1, f2)

  и возвращающей значение ***f1***, если ***Условие*** истинно, и значение ***f2*** в противном случае.
- Оператор **FOR** служит для организации счётных циклов (циклов с заданным числом повторений). Он записывается в виде:

  for i $\in$ Nmin .. Nmax

  где переменная **i - параметр цикла**, изменяющийся на интервале **[Nmin, Nmax]** с шагом **+1**.

  Телом цикла является блок, помещённый в шаблон.
- Оператор **while** служит для организации цикла с предусловием, действующего до тех пор, пока выполняется некоторое условие. Оператор записывается в виде:

  while *Условие*

Условие - выражение записывается на место шаблона.

- Оператор **otherwise** – "иначе" обычно используется совместно с оператором **if**. Его использование поясняют следующие программные конструкции:

$$f(x) \leftarrow \left| \begin{array}{l} 1 \;\; \text{if} \;\; x > 0 \\ -1 \;\; \text{otherwise} \end{array} \right. \qquad \text{или} \qquad x \leftarrow \left| \begin{array}{l} a \;\; \text{if} \;\; B \\ c \;\; \text{otherwise} \end{array} \right.$$

где B – проверяемое условие.

- Оператор **break** вызывает прерывание работы программы всякий раз, как он встречается. Чаще всего он используется совместно с оператором условного выражения **if** и оператором циклов **while** и **for**, обеспечивая переход в конец тела цикла.
- Оператор **continue –** оператор продолжения, используется для продолжения работы после прерывания. Совместно с операторами циклов **while** и **for**, обеспечивает после прерывания возврат в начало цикла.
- Оператор-функция возврата **return** прерывает выполнение программы и возвращает значения своего операнда, стоящего следом за ним. Например,

return 5 IF X<0

будет возвращать значение ***5*** при любом ***X < 0***.

- Оператор **on error** и функция **error –** средства обработки ошибок – позволяют создавать конструкции обработчиков ошибок. Оператор задаётся в виде:

Выражение 1* on error *Выражение 2

Если при выполнении ***Выражение 1*** возникает ошибка, то выполняется ***Выражение 2*.**

Функция **error(S)**, возвращает окошко с надписью, хранящейся в символьной переменной ***S*** или в символьной константе (любой фразе в кавычках).

Пример разработки программы продемонстрируем на алгоритме решения уравнения ***y=x³-9*** методом половинного деления (бисекции).

$$\text{PolDel}(f,a,b,eps) := \left| \begin{array}{l} \text{while } |b-a| \ge eps \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \dfrac{a+b}{2} \\ \text{break if } f(c) = 0 \\ d \leftarrow f(a)\cdot f(c) \\ a \leftarrow c \;\; \text{if} \;\; d > 0 \\ b \leftarrow c \;\; \text{if} \;\; d < 0 \end{array} \right. \\ c \leftarrow \left| \begin{array}{l} c \;\; \text{if} \;\; f(c) = 0 \\ \dfrac{a+b}{2} \;\; \text{otherwise} \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

$f(x) := x^3 - 9 \qquad a := 0 \qquad b := 9 \qquad eps := 0.0001 \qquad x := \text{PolDel}(f,a,b,eps)$

Корень уравнения: Проверка:

$x = 2.0801 \qquad f(x) = 7.459 \times 10^{-5}$

Задание

1. Разработать блок-схемы решения систем уравнений методом простой итерации и методом Зейделя.
2. Разработать программы.
3. Варианты заданий выбрать из Таблицы 2 Лабораторной работы 4.
4. Получить результат с точностью 0,001.

Лабораторная работа 6

Одномерная оптимизация

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Под ***оптимизацией*** понимают процесс выбора наилучшего варианта среди всех возможных. Например, выбор наилучшего варианта конструкции, наилучшего способа раскроя материала, наилучшего режима работы оборудования, наилучшего графика перевозок и т. п.

Для выбора математических соотношений, описывающих задачи оптимизации воспользуемся тем, что решение таких задач определяется параметрами двух категорий: параметрами, дающими количественные оценки возможных вариантов, и параметрами, от которых эти оценки зависят.

Пусть в конкретной задаче независимые параметры обозначены через

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

а зависимый параметр через F, тогда величину F можно описать в виде функции

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Задача оптимизации будет заключаться в том, чтобы **найти такие значения аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ из области определения функции F, при которых эта функция достигает наибольшего или наименьшего значения. Функцию F называют *целевой* функцией.**

Параметры $x_1, x_2, \dots, x_n$ в инженерной практике называют ***проектными параметрами*** (при решении экономических задач – параметрами плана).

Область изменения проектных параметров $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ***областью проектирования*** или ***областью неопределенности*** проектных параметров.

Количество проектных параметров, подлежащих учёту, определяет размерность задач и позволяет классифицировать их на одномерные ($n=1$) и многомерные ($n\geq2$).

Оптимизация с ограничениями (условиями), наложенными на проектные параметры, называется ***условной***, в противном случае – ***безусловной***.

Целевая функция называется ***унимодальной***, если в области неопределённости она имеет ***только один экстремум***.

Методы решения задач безусловной одномерной оптимизации

Пусть требуется найти экстремум (максимум или минимум) функции одной независимой переменной

$$y = f(x)$$

в интервале неопределенности $[a, b]$.

В дальнейшем условимся:

- говорить только об экстремуме-минимуме целевой функции, поскольку в силу симметричности функции $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ относительно оси Ox, минимум функции $y = f(x)$ является максимумом для функции $y = -f(x)$;
- предполагать, что на интервале неопределённости целевая функция унимодальна.

Классический метод для функции одной переменной приводит к решению уравнения $\frac{df}{dx} = 0$.

Численные методы

1. Метод простого перебора

Это самый простой метод, заключающийся в табулировании целевой функции на интервале проектирования с шагом h, и выборе среди её полученных значений наименьшего. В качестве нового интервала выбирается окрестность точки, соответствующая этому наименьшему значению. Описанная процедура позволяет сузить интервал неопределённости за один шаг до величины $Z = 2h$ (рис.6.1).

Пути реализации:

Можно провести исследования за один прием, протабулировав функцию с шагом $h = \varepsilon/2$ в N точках интервала $[a, b]$

$$N = \left[\frac{b-a}{h}\right] + 1 = 2\left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1$$

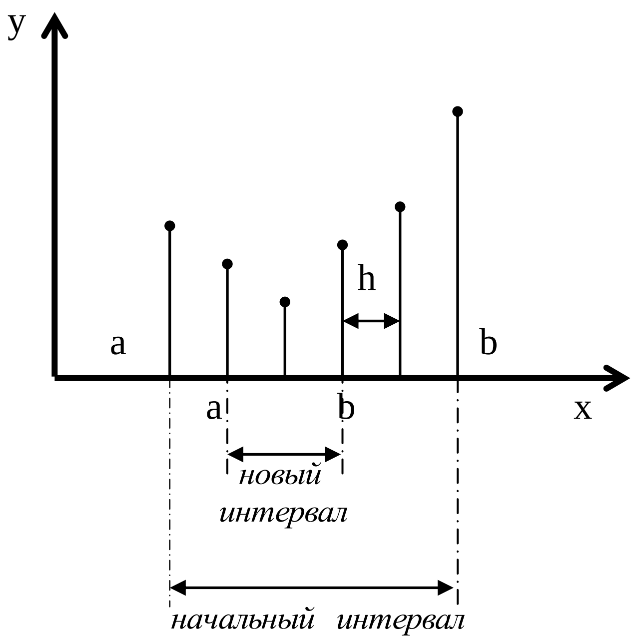


Рис. 6.1 Графическая иллюстрация метода простого перебора

Часто удается сократить объем вычислений за счет поэтапного табулирования функции с шагом h значительно большим чем $\varepsilon/2$ на каждом этапе, кроме последнего, и с $h = \varepsilon/2$ на последнем. Этот процесс можно провести по схеме:

- Разбить $[a, b]$ на небольшое количество N подинтервалов;
- Провести табулирование функции с шагом $h = (b\text{-}a)/N$;
- Определить точку $c = x$, в которой функция имеет минимум;
- За концы нового интервала взять точки $a = c - h$, $b = c + h$;
- повторить всё сначала для нового интервала $[a, b]$ до выполнения условия $| b - a | \le \varepsilon$.

2. Метод половинного деления (дихотомии)

Этот метод сужает интервал на каждом этапе ровно на половину (рис.6.2) и позволяет принять решение о выборе нового интервала на очередной итерации по значениям функции в трех внутренних точках.

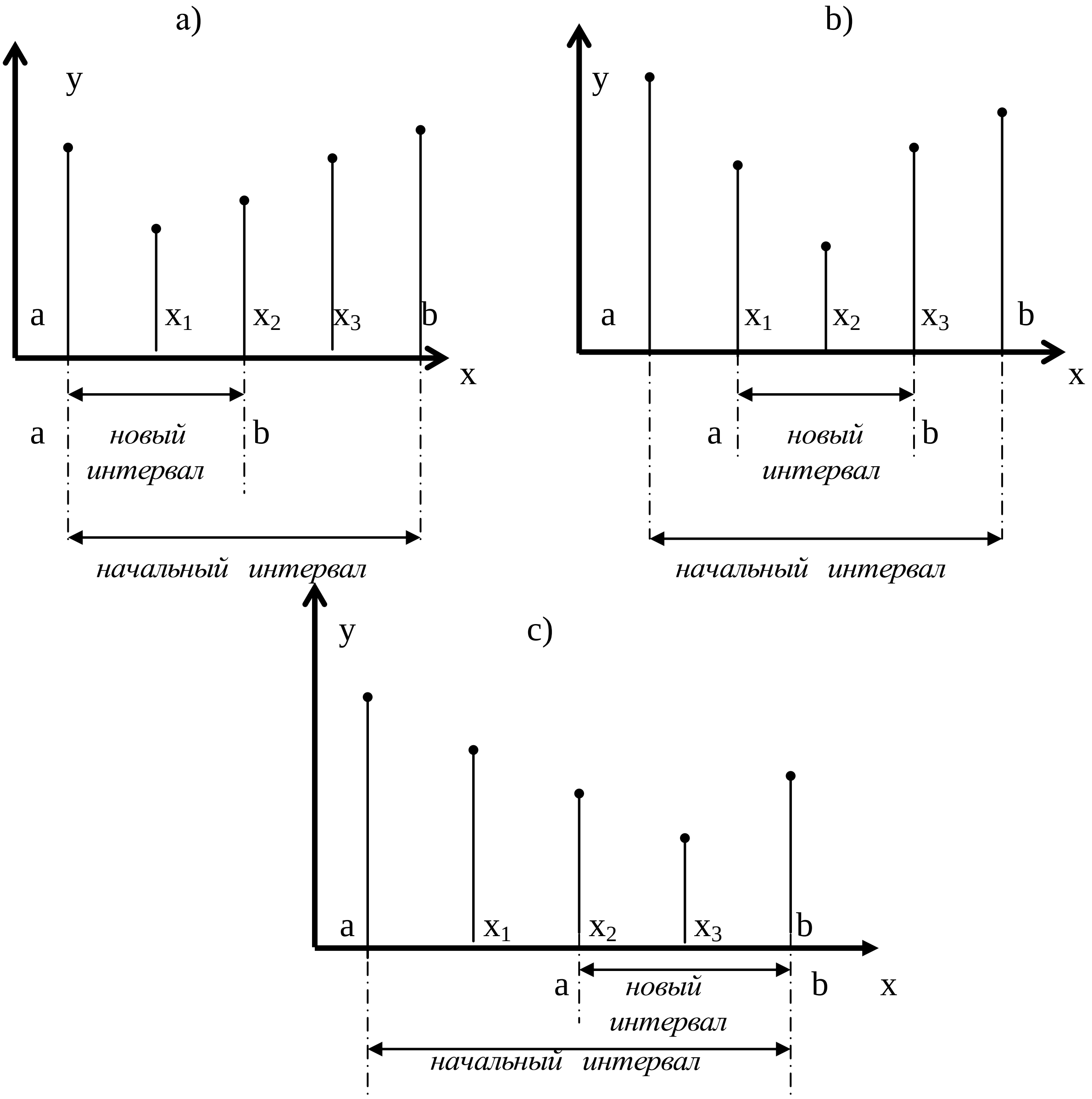


Рис.6.2 К выбору нового интервала в методе половинного деления

3. Метод золотого сечения

В этом методе принятие решения о выборе интервала на новой итерации осуществляется по результату сравнения функции только в двух внутренних точках. Точки выбираются (рис.6.3):

- на одинаковом расстоянии от его концов, т.е. $x_1 - a = b - x_2$;
- отношение его оставшейся части к длине всего интервала было равно отношению отбрасываемой части к оставшейся, т.е. для ситуации, представленной на рис.6.3 а)

$$\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{b - x_2}{x_2 - a},$$

а для ситуации представленной на рис.6.3 б)

$$\frac{b - x_1}{b - a} = \frac{x_1 - a}{b - x_1}.$$

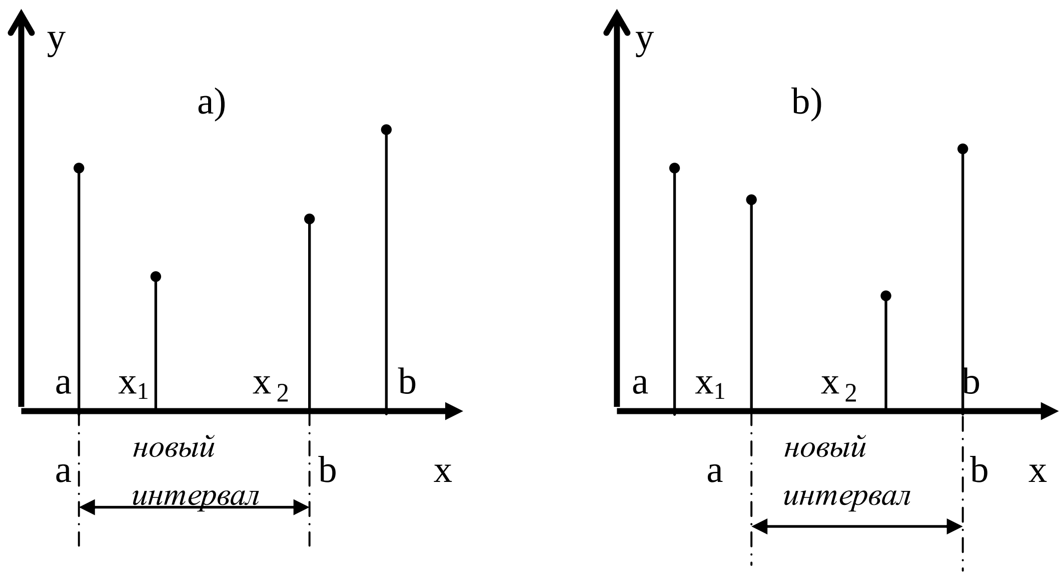


Рис.6.3 Расположение точек и выбор нового интервала
в методе золотого сечения

Расчетные формулы:

$$x_1 = a + 0.382(b - a),$$

$$x_2 = a + 0.618(b - a).$$

Уменьшив интервал на длину *0.382(b-a)* на очередном этапе, переходим к следующему этапу и т.д., до выполнения условия $|b-a| \le \varepsilon$.

Задание

1. Разработать блок-схемы решения задач оптимизации методами: простого перебора, дихотомии и золотого сечения.
2. Для вариантов заданий из Таблицы 1 разработать программы.
3. Вычислить один, выбранный Вами, локальный экстремум с точностью 0,001.

Таблица 1

№ варианта	Функция f(x)=	Экстремум	№ варианта	Функция f(x)=	Экстремум
1	$x^3\cos(x+3)$	max	**16**	$x^2 \cos(x^2-5)$	max
2	$x^3\cos(x^2+3)$	min	**17**	$x^2\sin(x^2-3)$	max
3	$x^3\cos x^2$	max	**18**	$e^x\sin x$	min
4	$x^2\cos x^2$	min	**19**	$e^x\cos x$	max
5	$x^2\cos(x^2-3)$	min	**20**	$e^x\cos(x-5)$	max
6	$\ln x\cdot\cos(x-5)$	max	**21**	$\ln x\cdot\cos^3 (x-5)$	min
7	$\ln x\cdot\cos^2 (x-5)$	max	**22**	$\ln x\cdot\cos^2 (x-5)-23$	max
8	$\ln x-50\cos^2 (x-5)$	min	**23**	$\sin x-5\cos^2 (x-5)$	min
9	$\sin x-5\cos^2 x$	max	**24**	$\sin x-5\cos x)$	max
10	$\sin x-x\cos x)$	min	**25**	$(x-7)\cos x$	min
11	$(x-3)\sin x$	max	**26**	$(x-3)^2-\sin x$	min
12	$x^2 +\sin(x^2-3)$	min	**27**	$x^4 +\sin(x^2-3)$	min
13	$x^4 +\sin(x+5)$	max	**28**	$x^2 +\sin(x+5)$	min
14	$(x^2-4)+\sin x$	min	**29**	$(x^2-4)\cos x$	min
15	$\sqrt{x+3}$ -cosx	max	**30**	$x\sqrt{x}\cdot\sin x$	max

Лабораторная работа 7

Обработка данных. Уплотнение таблиц на основе интерполяции

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Пусть имеется таблица данных (Таблица 1) , в которой x – независимая переменная, y – зависимая. Практический пример такой таблицы – любая справочная таблица физических свойств вещества, таблица тригонометрических функций и т.д.

В дальнейшем точку с координатами $(x_{i.},y_i)$,принадлежащую таблице, будем называть i-ым узлом.

Таблица 1

x	x_0	x_1	x_2	…	x_i	x_{i+1}	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_i	y_{i+1}	…	y_n

Уплотнить таблицу – значит дополнить её новыми значениями

$$y_к =f(x_к^*) \text{ при } x_0\le x_к^* \le x_n.$$

Решить задачу можно на основе ***интерполяции***.

Под ***интерполяцией*** понимается построение такой функциональной зависимости $y=f(x)$, график которой обязательно проходит через все узлы $(x_{i.}, y_i)$, $i=0,1,..,n$.

В общем случае функциональную зависимость можно представить в ***виде интерполяционного многочлена*** степени не выше n:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_j\,x^j+\ldots+a_nx^n \qquad (1)$$

с неопределёнными коэффициентами a_j. Значения коэффициентов могут быть определены в результате решения системы $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными:

$$a_0+a_1x_i^1+a_2x_i^2+\cdots+a_jx_i^j+\cdots+a_nx_i^n=y_i \text{ при } i=0,\,1,\ldots,\,n, \qquad (2)$$

полученной в результате подстановки табличных данных в соотношение (1).

Линейная интерполяция заключается в построении многочлена первой степени:

$$y(x)=a_0+a_1x \qquad (3)$$

Определение коэффициентов зависимости (3)

1. Коэффициенты могут быть определены в результате решения системы двух уравнений, для построения которых достаточно двух соседних точек: (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}).

2. Геометрически уравнение (3) является уравнением прямой с угловым коэффициентом a_1 и смещением a_0. Для получения их значений в явном виде (без решения системы) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две соседние точки табличных данных:

$$\frac{y(x)-y_i}{y_{i+1}-y_i}=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},$$

из которого следует, что в каждом промежутке $[x_i,x_{i+1}]$ табличных данных значения многочлена могут быть вычислены по формуле:

$$y(x)=y_i+\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}(x-x_i) \qquad (4)$$

где $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\ \Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

Для данных с равноотстоящими значениями x величина $x_{i+1}-x_i$ равна шагу h.

Интерполяция по Лагранжу заключается в построении многочлена n-ой степени, представленного в виде:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i \qquad (5)$$

или

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (6)$$

приводящимся путем алгебраических преобразований к виду (1).

Сплайновая интерполяция (splain– гибкая линейка) заключается в построении на каждом промежутке таблицы данных одного из следующих многочленов:

- кубического, проходящего через четыре смежных узла;
- квадратичного, проходящего через три смежных узла;
- линейного, проходящего через два смежных узла.

Mathcad предоставляет набор средств для уплотнения таблиц с использованием линейной и сплайновой интерполяции. При дальнейшем изложении использованы обозначения:

vx, vy – векторы – столбцы переменных *x* и *y*;

vs – вектор – столбец вторых производных в используемых узлах.

Функции:

linterp (vx, vy, x^*) – возвращает значение функции по значению величины x^* при её линейной интерполяции.

interp (vs, vx, vy, x^*) – возвращает значение функции по значению величины x^* при её сплайн-интерполяции, где вектор *vs* вычисляется по функции:

- *cspline (vx, vy)* при приближении к кубическому сплайну;
- *pspline (vx, vy)* при приближении к параболической кривой (квадратичному сплайну);
- *lspline (vx, vy)* при приближении к прямой.

Задание

1. Уплотнить линейной, сплайновой и Лагранжевой интерполяцией данные Вашего варианта (Таблица 2), вычислив дополнительные значения в каждом промежутке при среднем и произвольном значениях *x*.
2. Построить демонстрационные графики.

Таблица 2. Результаты эксперимента

№ варианта	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
	y	0,81	0,97	1,17	1,40	1,67	2,00	2,39	2,87	3,43	4,11
2	x	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
	y	12,50	10,00	8,00	6,40	5,12	4,10	3,28	2,62	2,10	1,68
3	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
	y	-4,91	-2,83	-1,61	-0,75	-0,08	0,47	0,93	1,33	1,68	2,00

Продолжение табл. 2

№ варианта	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
	y	0,00	0,01	0,04	0,10	0,19	0,32	0,51	0,77	1,09	1,50
5	x	-3,00	-2,70	-2,40	-2,10	-1,80	-1,50	-1,20	-0,90	-0,60	-0,30
	y	47,00	38,45	30,80	24,05	18,20	13,25	9,20	6,05	3,80	2,45
6	x	-3,00	-2,50	-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50
	y	143,00	86,13	48,00	24,88	13,00	8,63	8,00	7,38	3,00	-8,88
7	x	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80	2,05	2,30	2,55
	y	6,00	4,18	3,50	3,14	2,92	2,77	2,67	2,59	2,52	2,47
8	x	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
	y	2,24	1,50	1,01	0,67	0,45	0,30	0,20	0,14	0,09	0,06
9	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	0,72	1,29	2,30	4,11	7,36	13,17	23,55	42,13	75,37	134,82
10	x	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
	y	-3,69	-2,83	-2,16	-1,61	-1,15	-0,75	-0,40	-0,08	0,21	0,47
11	x	0,08	0,20	0,32	0,44	0,56	0,68	0,80	0,92	1,04	1,16
	y	0,00	0,01	0,05	0,13	0,26	0,47	0,77	1,17	1,69	2,34
12	x	-1,00	-0,35	0,30	0,95	1,60	2,25	2,90	3,55	4,20	4,85
	y	-36,29	-34,10	-30,64	-25,91	-19,91	-12,65	-4,11	5,68	16,75	29,08
13	x	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
	y	13,00	10,56	9,08	8,32	8,04	8,00	7,96	7,68	6,92	5,44
14	x	0,38	0,58	0,78	0,98	1,18	1,38	1,58	1,78	1,98	2,18
	y	-1,16	-0,07	0,46	0,78	0,98	1,13	1,24	1,33	1,39	1,45
15	x	2,00	2,60	3,20	3,80	4,40	5,00	5,60	6,20	6,80	7,40
	y	1,11	1,41	1,80	2,29	2,91	3,69	4,70	5,97	7,59	9,65
16	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	-0,85	-1,40	-2,30	-3,78	-6,21	-10,20	-16,77	-27,55	-45,27	-74,39
17	x	0,20	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,70	1,95	2,20	2,45
	y	-2,83	-0,40	0,93	1,85	2,55	3,11	3,59	4,00	4,37	4,69
18	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
	y	0,00	-0,03	-0,09	-0,20	-0,40	-0,69	-1,10	-1,64	-2,33	-3,20
19	x	-0,70	0,10	0,90	1,70	2,50	3,30	4,10	4,90	5,70	6,50
	y	-34,30	-24,34	-16,30	-10,18	-5,98	-3,70	-3,34	-4,90	-8,38	-13,78
20	x	-1,50	-1,20	-0,90	-0,60	-0,30	0,00	0,30	0,60	0,90	1,20
	y	-24,06	-8,42	1,07	5,95	7,74	8,00	8,26	10,05	14,93	24,42
21	x	0,30	0,47	0,64	0,81	0,98	1,15	1,32	1,49	1,66	1,83
	y	-6,00	-4,55	-3,88	-3,48	-3,22	-3,04	-2,91	-2,81	-2,72	-2,66
22	x	-3,00	-2,50	-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50
	y	1,79	1,10	0,64	0,50	0,74	1,28	2,00	2,72	3,26	3,50

Окончание табл. 2

№ варианта	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	x	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00
	y	2,58	3,08	3,40	3,50	3,36	3,01	2,50	1,91	1,34	0,86
24	x	0,43	0,94	1,45	1,96	2,47	2,98	3,49	4,00	4,51	5,02
	y	-0,75	0,42	0,98	0,78	-0,13	-1,52	-3,02	-4,27	-4,94	-4,86
25	x	-3,00	-2,50	-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50
	y	-1,37	-0,93	-0,30	0,63	2,11	4,52	8,00	11,48	13,89	15,37
26	x	-2,00	-1,60	-1,20	-0,80	-0,40	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60
	y	16,30	15,59	14,57	13,06	10,85	8,00	5,15	2,94	1,43	0,41
27	x	-2,00	-1,60	-1,20	-0,80	-0,40	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60
	y	-16,30	-15,59	-14,57	-13,06	-10,85	-8,00	-5,15	-2,94	-1,43	-0,41

Лабораторная работа 8

Обработка экспериментальных данных. Аппроксимация по методу наименьших квадратов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Одной из задач обработки данных является ***регрессионный анализ*** – представление совокупности экспериментальных данных (x_i, y_i) при $i=0,1,\ \ldots,n$ некоторой функцией

$$Y(x)=f(x, a_0, a_1, \ldots, a_m), \quad (1)$$

называемой регрессией y на x.

Задача заключается в получении параметров a_k, $k=0,1,\ \ldots,m$ функции (1) таких, чтобы сумма квадратов отклонений значений этой функции от экспериментальных данных была наименьшей:

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (Y(x_i) - y_i)^2 \to \min \qquad (2)$$

Метод построения такой зависимости получил название ***метода наименьших квадратов***.

Параметры могут быть найдены в результате решения системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0,\ j = 0, 1, \ldots, m \qquad (3)$$

Линейная регрессия описывает экспериментальные данные линейной функцией, соответствующей отрезку прямой:

$$Y(X)=A+BX, \qquad (4)$$

где $B=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}X_i\ \sum\limits_{i=0}^{n}Y_i-n\sum X_iY_i}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n}X_i\right)^2-n\sum\limits_{i=0}^{n}X_i^2}$ $\qquad A=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}Y_i-B\sum\limits_{i=0}^{n}X_i\right) \quad (5)$

Степень достоверности выбранной аппроксимации оценивается несмещенной оценкой выборочной дисперсии (***критерием Гаусса***):

$$\Omega=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(Y(x_i)-y_i\right)^2}{n-m} \qquad (6)$$

где

m – количество параметров аппроксимирующей функции.

Из нескольких приближений одной и той же табличной функции лучшим считается то, для которого (6) имеет наименьшее значение.

Полиномиальная регрессия описывает экспериментальные данные полиномом степени не выше n:

$$Y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m, m\le n \qquad (7)$$

Считая эту функцию аппроксимирующей, можем найти её коэффициенты как решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых на основе (3).

Приведение функциональных зависимостей к линейному виду

Функциональные зависимости, содержащие два параметра, преобразованием координат можно свести к линейному виду.

Например:

1). $y=ax^b$

Прологарифмировав, получим: $\ln(y)=\ln(a)+b\cdot\ln(x)$

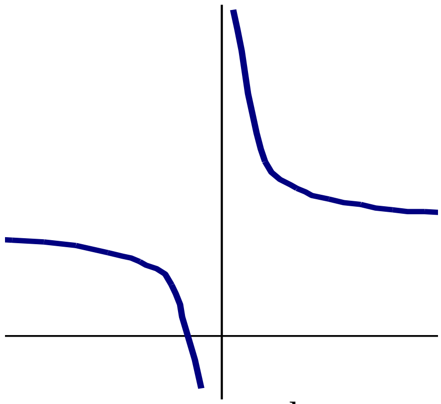
Обозначим: $Y=\ln(y)$, $X=\ln(x)$, $A=\ln(a)$, $B=b$

Тогда $Y=A+BX$

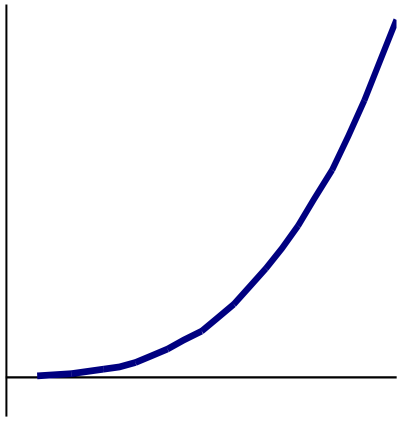
2). $y=\dfrac{1}{a+bx}$

Произведя замену $Y = \frac{1}{y}$, и положив $X = x$, $A = a$, $B = b$, получим $Y = A + BX$.

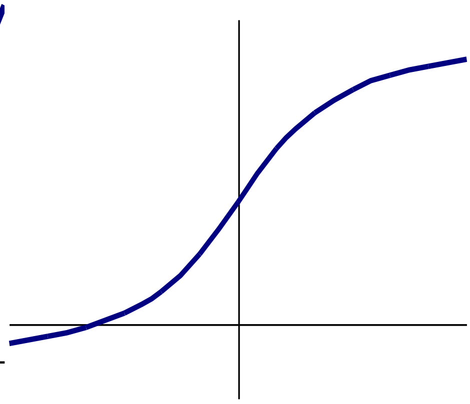
Графики некоторых нелинейных зависимостей:



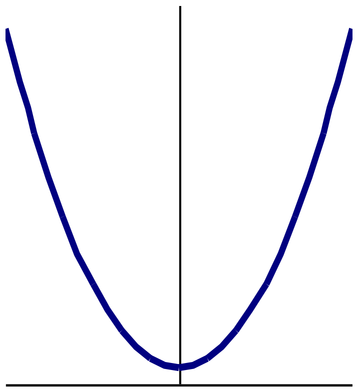
$y(x) = a + \frac{b}{x}$



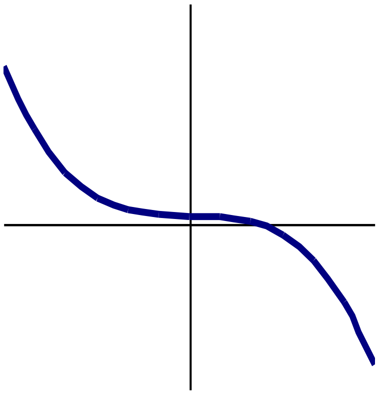
$y(x) = a \cdot x^{b}$



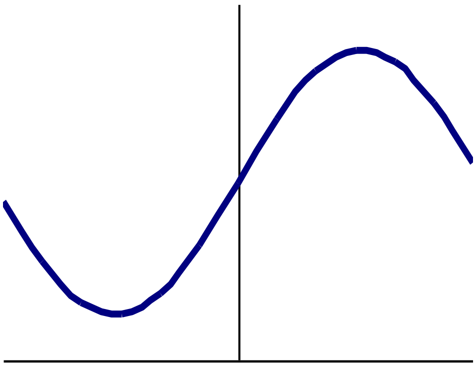
$y(x) = a + b \cdot \mathrm{arctg}(x)$



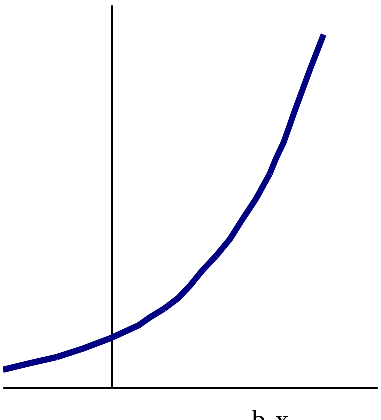
$y(x) = a + b \cdot x^{2}$



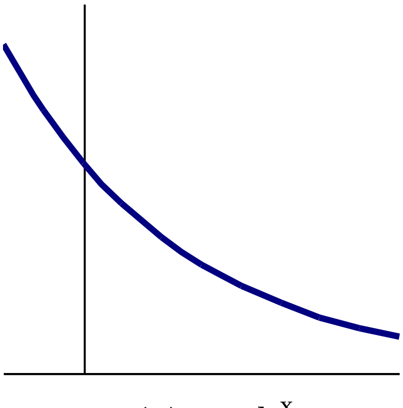
$y(x) = a + b \cdot x^{3}$



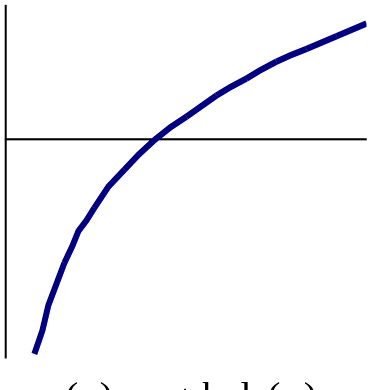
$y(x) = a + b \cdot \sin(x)$



$y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$



$y(x) = a \cdot b^{x}$



$y(x) = a + b \cdot \ln(x)$

Средства Mathcad

Средства Mathcad позволяют автоматизировать процесс построения линейной и полиномиальной регрессии. В приведённых программных средствах использованы обозначения:

vx, vy – векторы значений экспериментальных данных x_i и y_i;
x – аргумент аппроксимирующей функции.

Функции для выполнения линейной регрессии:

- *intercrpt(vx, vy)* – возвращает значение параметра *A* линейной регрессии;
- *slope(vx, vy)* – возвращает значение параметра *B* линейной регрессии;

Функции для выполнения полиномиальной регрессии:

- *regress(vx, vy, m)* – возвращает вектор *va*, запрашиваемый функцией *interp(va, vx, vy, x)* (см. Лаб.работу 7) и содержащий коэффициенты многочлена *m*-ой степени, построенного по методу наименьших квадратов. Эта функция создаёт единственный аппроксимирующий полином, коэффициенты которого вычисляются по всей совокупности экспериментальных данных;
- *loess(vx, vy, span)* – возвращает вектор *va*, используемый функцией *interp(va, vx, vy, x)* для приближения данных отрезками полинома второй степени; аргумент *span>0* указывает размер локальной области приближаемых данных (рекомендуемое начальное значение *span – 0.75*). Чем больше *span*, тем сильнее сглаживаются данные. При больших значениях *span* эта функция приближается к функции *regress(vx, vy, 2)*.

Функции для выполнения нелинейной регрессии:

- *expfit(vx, vy, vn)* – возвращает вектор, содержащий коэффициенты *(a, b, c)* аппроксимирующего выражения вида $ae^{bx}+c$; *vn* – вектор начальных приближений коэффициентов;
- *lgsfit(vx, vy, vn)* – то же, но для выражения $\dfrac{a}{1+be^{-cx}}$;
- *logfit(vx, vy)* – то же, но для выражения $a\ln(x+b)+c$ (начальных приближений не требуется);
- *medfit(vx, vy)* – то же, но для выражения $a+bx$ (начальных приближений не требуется);
- *pwrfit(vx, vy, vn)* – то же, но для выражения ax^b+c; *vn* – вектор начальных приближений коэффициентов;
- *sinfit(vx, vy, vn)* – то же, но для выражения $a\sin(x+b)+c$; *vn* – вектор начальных приближений коэффициентов.

Функция для выполнения нелинейной регрессии <u>общего</u> вида:

- *genfit(vx, vy, vn, F)* – возвращает вектор параметров любой нелинейной функции $Y(x)=F(x, k_0, k_1, \ldots, k_m)$. Вектор *vn* должен содержать начальные значения параметров, необходимые для решения системы нелинейных уравнений (3) итерационным методом. Вектор *F* должен быть матрицей – столбцом, содержащим аналитические выражения для исходной функции (9) и её производных по всем параметрам k_j *(j=0, 1, … , m).*

> Внимание! Применение этой функции требует
> *обязательного* обозначения параметров функции *Y(x)* через k_j.

Задание

1. По данным таблицы 2 лабораторной работы 7 построить график.
2. По виду графика выдвинуть не менее трёх гипотез о предполагаемых видах зависимости.
3. Среди предполагаемых зависимостей выбрать наилучшую.

Лабораторная работа 9

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Задача Коши

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называют соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y), \qquad (2)$$

где

$f(x, y)$ – заданная функция двух переменных,

называется ***дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной***.

Решением дифференциального уравнения на интервале $[a, b]$ называется непрерывно-дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, превращающая уравнение в тождество. Для уравнения (1) по определению получаем

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0 \qquad (3)$$

График решения $y = \varphi(x)$ называется ***интегральной кривой*** данного уравнения.

Задача о нахождении решения $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$ уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называют соотношение вида

$$F\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

где

x – независимая переменная (аргумент),

$y = y(x)$ – неизвестная функция аргумента x,

$F\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ – заданная функция переменных $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Задача Коши для уравнения (4) состоит в том, чтобы найти решение, удовлетворяющее условиям:

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \qquad (5)$$

где

$x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Любое дифференциальное уравнение (4), разрешённое относительно производной $y^{(n)}$, можно привести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Например, уравнение третьего порядка

$$y''' = x^3\, y + y' \cdot y''$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_o &= 4 \\ y_0 &= -5 \\ y_0' &= 0{,}8 \\ y_0'' &= -1 \end{aligned}$$

можно записать в виде системы трёх уравнений

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = t \\ t' = x^3 \cdot y + z \cdot t \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_o &= 4 \\ y_0 &= -5 \\ z_0 &= 0{,}8 \\ t_0 &= -1 \end{aligned}$$

Численные методы решения задачи Коши позволяют получить таблицу значений функции $y= \varphi(x)$ для аргумента x, изменяющегося произвольно или равномерно с шагом h на некотором интервале $[a, b]$.

Среди численных методов решения задачи Коши рассмотрим только два: метод Эйлера и метод Рунге-Кутта. Метод Эйлера имеет первый порядок точности относительно h, а метод Рунге-Кутта – четвёртый. Оба метода применимы для дифференциального уравнения или системы уравнений первого порядка, разрешённых относительно первой производной.

Формулы (6) и (7) являются расчётными для метода Эйлера и Рунге-Кутта соответственно:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \qquad i = 0,1,\ldots,n \qquad (6)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k1 + k2 + k3 + k4}{6}, \qquad i = 0,1,\ldots,n \qquad (7)$$

где

$$k1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$
$$k2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}),$$
$$k3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2}),$$
$$k4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k3).$$

Средства Mathcad

Функция *rkfixed* позволяет находить решение для дифференциального уравнения n-го порядка, а также систем дифференциальных уравнений 1-го порядка. Она возвращает матрицу, имеющую $n+1$ столбец: первый столбец содержит точки, в которых ищется решение дифференциального уравнения, второй столбец содержит значения найденного решения в соответствующих точках, с третьего по $n+1$-ый – значения производных $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Вызов функции имеет вид:

*rkfixed(y, x1, x2, k, **D**),*

y – вектор начальных условий размерности n, где n – порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе (если решается система уравнений). Для дифференциального уравнения 1-го порядка вектор начальных условий вырождается в одну точку $y_0=y(x1)$;

x1, x2 – граничные точки интервала, на котором ищется решение;

k – число точек (не считая начальной точки), в которой ищется приближенное решение. При помощи этого аргумента определяется число строк $(1+ k)$ в матрице, возвращаемой этой функцией;

***D** (x, y)* – это функция, возвращающая значение в виде вектора из n элементов, содержащих первые производные неизвестных функций.

На рисунках 9.1, 9.2 приведены примеры решения уравнения первого порядка и системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Найти решение уравнения **$y'=-y^2+x$**, с начальным условием **y(0)=1**, в 8 точках на отрезке **[0,1]**

$y_0 := 1$ - начальное условие

$D(x,y) := -(y_0)^2 + x$ - определение функции, задающей производную: **$y'=-y^2+x$** при начальном условии **y_0**.

Решение: $Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 1, 8, D)$

x y

$Z =$

	0	1
0	0	1
1	0.125	0.896
2	0.25	0.827
3	0.375	0.785
4	0.5	0.765
5	0.625	0.763
6	0.75	0.775
7	0.875	0.799
8	1	0.833

$Z^{<0>}$ $Z^{<1>}$

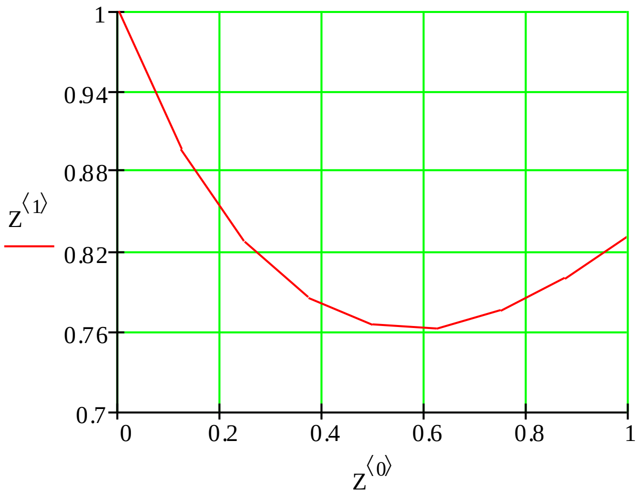


Рис. 9.1 Решение дифференциального уравнения первого порядка

Найти решение уравнения **y'' + sin(x)y' - 3.5y=1** с начальными условиями **y(1)=0, y'(1)=0.5** в 8 точках отрезка **[1,2]**.

Приведем уравнение к системе уравнений 1-го порядка: **y'=t**

t'+sin(x)t - 3.5y=1

с начальными условиями **y(1)=0, t(1)=0.5**

Начальные условия задаём по вектору **y**, поэтому **y_0=y(1)**, **y_1=t(1)**:

Вектор начальных условий: $y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Система уравнений: $D(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 1 - \sin(x)\cdot y_1 - 3.5y_0 \end{pmatrix}$

Решение: $Z := \mathrm{rkfixed}(y, 1, 2, 8, D)$

x y y'

$Z =$

	0	1	2
0	1	0	0.5
1	1.125	0.066	0.553
2	1.25	0.137	0.568
3	1.375	0.207	0.55
4	1.5	0.273	0.505
5	1.625	0.332	0.438
6	1.75	0.382	0.357
7	1.875	0.421	0.268
8	2	0.449	0.176

$Z^{<0>}$ $Z^{<1>}$ $Z^{<2>}$

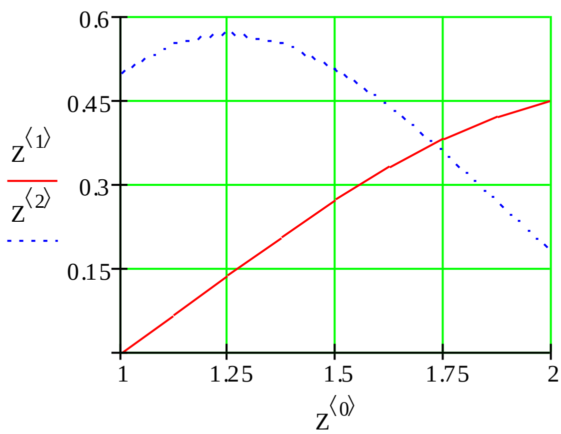


Рис. 9.2 Решение дифференциального уравнения второго порядка

Задание

1. Согласно Вашего варианта (Таблица 1) найти решение дифференциального уравнения на интервале [0, 1] с шагом 0,1.
   Для чего:
   - Разработать блок-схемы и программы методов Эйлера и Рунге-Кутта.
   - Найти решение по разработанным программам и с использованием функции *rkfixed*. В результатах оставлять четыре цифры после запятой.
   - Построить графики. По результатам сделать вывод о полученных расхождениях.
2. Согласно Вашего варианта (Таблица 2) найти решение дифференциального уравнения второго порядка на интервале [1, 2] с шагом 0,1.
   Для чего:
   - Привести уравнение к системе уравнений первого порядка.
   - Найти решение с использованием функции *rkfixed*.
   - Построить графики.

Таблица 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

№ варианта	Уравнение	Начальное условие	№ варианта	Уравнение	Начальное условие
1	$y' = x + y^2$	$y(0) = 0{,}5$	**16**	$y' = x^2 + 0{,}2xy$	$y(0) = 0{,}6$
2	$y' = 2x + 0{,}1y^2$	$y(0) = 0{,}2$	**17**	$y' = 3x^2 + 0{,}1xy$	$y(0) = 0{,}2$
3	$y' = 2x + y^2$	$y(0) = 0{,}3$	**18**	$y' = x^2 + 3xy$	$y(0) = 0{,}3$
4	$y' = x^2 + xy$	$y(0) = 0{,}2$	**19**	$y' = x^2 + 0{,}1y^2$	$y(0) = 0{,}7$
5	$y' = 0{,}2x + y^2$	$y(0) = 0{,}1$	**20**	$y' = 2x^2 + 3y^2$	$y(0) = 0{,}2$
6	$y' = x^2 + y$	$y(0) = 0{,}4$	**21**	$y' = 0{,}2x^2 + y^2$	$y(0) = 0{,}8$
7	$y' = x^2 + 2y$	$y(0) = 0{,}1$	**22**	$y' = 0{,}3x^2 + y^2$	$y(0) = 0{,}3$
8	$y' = xy + y^2$	$y(0) = 0{,}6$	**23**	$y' = xy + 0{,}1y^2$	$y(0) = 0{,}5$
9	$y' = x^2 + y^2$	$y(0) = 0{,}7$	**24**	$y' = 0{,}2xy + y^2$	$y(0) = 0{,}4$
10	$y' = x^2 + 0{,}2y^2$	$y(0) = 0{,}2$	**25**	$y' = 0{,}1xy + 3y^2$	$y(0) = 0{,}2$
11	$y' = 0{,}3x + y^2$	$y(0) = 0{,}4$	**26**	$y' = 0{,}3xy + y^2$	$y(0) = 0{,}6$
12	$y' = 0{,}1x + 0{,}2y^2$	$y(0) = 0{,}3$	**27**	$y' = xy + 0{,}2y^2$	$y(0) = 0{,}7$
13	$y' = x + 0{,}3y^2$	$y(0) = 0{,}3$	**28**	$y' = 0{,}1x^2 + 2y^2$	$y(0) = 0{,}2$
14	$y' = 2x^2 + xy$	$y(0) = 0{,}5$	**29**	$y' = 3x + 0{,}1y^2$	$y(0) = 0{,}4$
15	$y' = 0{,}1x^2 + 2xy$	$y(0) = 0{,}8$	**30**	$y' = 0{,}2x + 3y^2$	$y(0) = 0{,}2$

Таблица 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

№ варианта	Уравнение	Начальные условия	№ варианта	Уравнение	Начальные условия
1	$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}5, \\ y'(1) = 1{,}2 \end{cases}$	**16**	$y'' - xy' + 2y = x + 1$	$\begin{cases} y(1) = 2, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$
	$y'' + xy' + y = x + 1$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 1{,}2 \end{cases}$	**17**	$y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$	$\begin{cases} y(1) = 2, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$
2	$y'' + 2y' - xy = x^2$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}7, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$	**18**	$y'' - y' + \frac{2y}{x} = x + 0{,}4$	$\begin{cases} y(1) = 2, \\ y'(1) = 4 \end{cases}$
3	$y'' - 3y' + \frac{y}{x} = 1$	$\begin{cases} y(1) = 2, \\ y'(1) = 0{,}7 \end{cases}$	**19**	$y'' + 3y' - \frac{y}{x} = x + 1$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 0{,}5 \end{cases}$
4	$y'' - \frac{y}{2} + 3y = 2x^2$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}6, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$	**20**	$y'' + 1{,}5y' - xy = 0{,}5$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 3 \end{cases}$
5	$y'' + 2xy' - y = 0{,}4$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 2 \end{cases}$	**21**	$y'' - 0{,}5xy' + y = 2$	$\begin{cases} y(1) = 1{,}2, \\ y'(1) = 1{,}4 \end{cases}$
6	$y'' + 2\frac{y'}{x} - 3y = 2$	$\begin{cases} y(1) = 1{,}5, \\ y'(1) = 3 \end{cases}$	**22**	$y'' + 2x^2y' + y = x$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 3 \end{cases}$
7	$y'' - 3xy' + 2y = 1{,}5$	$\begin{cases} y(1) = 1{,}3, \\ y'(1) = 2 \end{cases}$	**23**	$y'' + 2xy' - 2y = 0{,}6$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$
	$y'' + \frac{y'}{x} - 0{,}4y = 2x$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}6, \\ y'(1) = 1{,}7 \end{cases}$	**24**	$y'' - \frac{y'}{2x} + 0{,}8y = x$	$\begin{cases} y(1) = 2, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$
8	$y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2$	$\begin{cases} y(1) = 1{,}6, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$	**25**	$y'' + 0{,}8y' - xy = 1{,}4$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}5, \\ y'(1) = 1{,}7 \end{cases}$
9	$y'' - 2y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 0{,}8 \end{cases}$	**26**	$y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}6, \\ y'(1) = 0{,}3 \end{cases}$
10	$y'' - 0{,}5y' + 0{,}5xy = 2x$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}5, \\ y'(1) = 2 \end{cases}$	**27**	$y'' + 2y' - 1{,}5xy = \frac{2}{x}$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$
11	$y'' + 2xy' - 1{,}5 = x$	$\begin{cases} y(1) = 2, \\ y'(1) = 2{,}5 \end{cases}$	**28**	$y'' - \frac{xy'}{2} + 0{,}5y = 2x$	$\begin{cases} y(1) = 1{,}5, \\ y'(1) = 0{,}4 \end{cases}$
12	$y'' + 0{,}6y' - 2y = 1$	$\begin{cases} y(1) = 0{,}6, \\ y'(1) = 3 \end{cases}$	**29**	$y'' + \frac{y'}{2x} - y = \frac{2}{x}$	$\begin{cases} y(1) = 1{,}3, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$
13	$y'' - 0{,}5x^2y' + 2y = x^2$	$\begin{cases} y(1) = 2, \\ y'(1) = 0{,}8 \end{cases}$	**30**	$y'' + 2y' - 1{,}5xy = \frac{2}{x}$	$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дьяконов В.П.* Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж. 1997г.: «Нолидж», 2001. – 1296 с., ил.
2. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчёты в среде Windows 95. Издание 2-е, стереотипное – М.: Информационно издательский дом «Филинъ», 1997. – 712 с.
3. *Поршнев С. В.* Вычислительная математика. Курс лекций. – Курс лекций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.: ил.
4. *Поршнев С.В., Беленкова И.В.* Численные методы на базе MATHCAD. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.: ил.
5. *Дьяконов В.П., Абраменкова И. В.* MathCad 7 в математике, физике и в Internet. - М.: Нолидж. 1998.
6. *Плисс А. И., Сливина Н. А.* MathCad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. Пособие. – М.:Финансы и статистика, 2002.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Станевко Галина Ивановна
Колесникова Татьяна Геннадьевна
Асташенко Елена Борисовна

Математика. Численные методы. Лабораторный практикум в среде MathCad

Учебное пособие

Для студентов вузов

Зав. редакцией *И.Н. Журина*
Редактор *Е.В. Макаренко*
Технический редактор *Т.В. Васильева*
Художественный редактор *Л.П. Токарева*

ЛР №020524 от 02.06.97.
Подписано к печати . Формат
Бумага типографская. Гарнитура Times.
Уч.-изд.л. . Тираж экз.
Заказ №

Оригинал-макет изготовлен в редакционно-издательском отделе
Кемеровского технологического института пищевой промышленности
650056, г. Кемерово, б-р Строителей, 47

ПЛД №44-09 от 10.10.99.
Отпечатано в лаборатории множительной техники
Кемеровского технологического института пищевой промышленности
650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52