МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Г.С. Ветрова, Л.А. Яковлева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Кемерово 2004

УДК: 33 : 51 (075)

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Кемеровского технологического института пищевой промышленности.

Рецензенты:

- канд. эконом. наук, профессор кафедры экономики и управления на предприятии торговли Кемеровского института (филиала) Российского государственного торгово-экономического университета Н.И. Усенко.
- канд. тех. наук, доцент кафедры вычислительной техники и информационных технологий ГУ Кузбасского государственного технического университета В.В. Крюкова;

Ветрова Г.С., Яковлева Л.А. Исследование операций в экономике: Учебное пособие. – Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2004.– 76 с.

ISBN 5-89289-245-X

В учебное пособие включены: краткий конспект лекций, темы лабораторных и контрольных работ и задания для их выполнения, вопросы к зачёту. Теоретическая часть включает элементы теории регрессионного анализа, теории игр, теории графов, сетевого планирования, динамического программирования. Рассмотрены вопросы применения ЭВМ для решения задач рассмотренных разделов. Изложение материала ориентировано на практическую работу студентов. Теоретическая часть снабжена иллюстрациями и примерами.

Ил. – 8. Табл – 49. Библ. назв. – 13.

$$И\,\frac{1402020000}{У50(03)-04}$$

ISBN 5-89289-245-X

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций – научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает определить условия, необходимые и достаточные для осуществления такого процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены, измерены. Следовательно, цель исследования операций – *количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.*

При решении конкретной задачи управления применение методов исследования операций предполагает:

• построение экономико-математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;

• изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ»

Цель изучения дисциплины

Целью данного курса является изучение современного математического аппарата для количественного обоснования принимаемых решений при управлении различными организационными системами. При изучении студент должен овладеть:

- теоретическими и практическими знаниями системного моделирования;
- методологией и методикой построения алгоритмов решения экономико-математических моделей;
- навыками и умением самостоятельного использования методов в практической деятельности.

Изучив дисциплину, студент должен уметь:

- формализовать экономическую задачу;
- определять тип полученной модели;

- решать задачи, сформулированные как экономико-математические модели принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределённости;
- делать выводы и принимать решения по результатам, полученным в результате анализа модели.
- применять типовые методы решения задач управления;
- анализировать существенные связи, влияющие на принятие решений;
- устанавливать критерии эффективности, оценивающие варианты действий.

Для освоения курса студенту необходимы знания по таким разделам математики как линейная алгебра, математический анализ, математическая статистика. Необходимы знания по информатике: алгоритмизация и программирование вычислительных процессов, выполнение расчётов в Excel.

Для того чтобы осознанно относиться к примерам, лучше понимать их смысл, давать экономическую трактовку, необходимо знание основных экономических показателей.

Содержание дисциплины

ТЕМА 1. Регрессионный анализ

Постановка задач для применения регрессионного анализа. Парная регрессия. Линейная и нелинейная регрессия. Выбор типа зависимости. Нахождение параметров модели и их оценка. Метод наименьших квадратов. Оценка качества полученной модели. Множественная регрессия. Использование стандартных средств Excel для решения задач регрессионного анализа.

ТЕМА 2. Теория игр

Теория игр как раздел исследования операций. Матричные игры. Основные определения: понятие стратегии, чистой, смешанной, оптимальной, максиминной и минимаксной. Цена игры. Методы решения игр с нулевой суммой. Графический метод. Сведение игры к паре двойственных задач. Принятие решений в условиях неопределённости. Правила принятия решений без использования численных значений вероятностей исходов. Правила принятия решений с использованием численных значений вероятностей исходов (критерий Гурвица, Сэвиджа, Вальда и др.). Выбор критерия.

ТЕМА 3. Сетевое планирование

Определение сетевого графика. Понятие события, работы. Определение продолжительности работы. Правила построения сетевых графиков. Фиктивные работы и события. Нумерация событий. Параметры сетевых графиков. Наиболее раннее и наиболее позднее время наступления события. Резерв времени события. Критическое время выполнения проекта. Критический путь. Раннее и позднее время начала и окончания работы. Резервы времени работ (полный, свободный, независимый). Коэффициент напряжённости работы. Линейная диаграмма проекта.

ТЕМА 4. Динамическое программирование

Многошаговые процессы принятия решений. Принцип оптимальности. Рекуррентные соотношения. Методы решения систем рекуррентных соотношений. Применение классической теории оптимизации. Вычислительный алгоритм динамического программирования. Структура решения. Классические задачи: деление ресурса на две части; загрузка корабля.

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Рыночная экономика требует улучшения использования статистической информации, характеризующей результат экономической деятельности. Эффективная хозяйственная деятельность предполагает оценку связей между различными экономическими факторами, выявление их тенденций и разработку экономических нормативов и прогнозов. Необходимо выделить факторы, которые положительно или отрицательно влияют на результаты хозяйственной деятельности на всех уровнях (микро-, мезо-, макро-).

В любом процессе присутствует объясняющий фактор (аргумент, независимая переменная) и объясняемый фактор (результативный показатель, зависимая переменная).

Например, формирующийся на рынке спрос на некоторый товар (зависимая переменная) рассматривается как функция его цены (независимая переменная). Затраты, связанные с изготовлением какого-либо продукта зависят от объема производства. Потребительские расходы могут быть функциями дохода. Можно приводить очень много подобных примеров.

Всё многообразие задач, решаемых с помощью регрессионного анализа можно классифицировать по трем параметрам:

1. По конечным прикладным целям:

а) прогноз экономических и социально-экономических показателей, характеризующих состояние и развитие системы;

б) имитация различных возможных сценариев социального развития анализируемой системы.

2. По уровню иерархии экономической системы:

а) макроуровень (страна в целом);

б) мезоуровень (регионы, отрасли, корпорации);

в) микроуровень (фирмы, предприятия, семьи).

3. По профилю экономического исследования:

проблема рынка, инвестиции, финансы, социальная сфера, ценообразование, распределительные отношения, спрос и потребление.

Этапы исследования

1. Постановка проблемы.
2. Получение данных и их качественный анализ, выделение зависимых и независимых переменных.
3. Спецификация (выбор вида) модели.
4. Оценка параметров модели (проверка ряда гипотез).
5. Интерпретация результатов.

Парная регрессия

Парная регрессия - уравнение связи двух переменных y и x: $y = f(x)$, где y – зависимая переменная (результативный признак);

x – независимая, объясняющая переменная (признак-фактор).

Различают линейные и нелинейные регрессии.

Линейная регрессия: $y = a + bx + \varepsilon$.

где a, $в$ – параметры модели;

ε – случайная величина, характеризующая отклонение фактического значения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

Случайная величина ε называется возмущением. Она включает также не учтенные факторы модели, случайные ошибки, влияние особенностей измерения.

Нелинейные регрессии делятся на два класса: нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам. Приведём некоторые из них.

Регрессии, нелинейные по объясняющим переменным:

- полиномы разных степеней $y = a + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \varepsilon$;
- равносторонняя гипербола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$.

Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам:

- степенная $y = ax^b\varepsilon$,
- показательная $y = ab^x\varepsilon$,
- экспоненциальная $y = e^{a+bx}\varepsilon$.

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используют метод наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от теоретических y^t минимальна, то есть

$$\sum (y - y^t)^2 \to min$$

Для линейных и нелинейных уравнений регрессии, приводимых к линейным, решается следующая система относительно a и b (её называют системой нормальных уравнений МНК):

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum yx \end{cases}$$

После алгебраических преобразований получаем следующие формулы для нахождения параметров модели:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad b = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Здесь $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – принятое обозначение средних арифметических.

σ_x^2 – дисперсия величины x.

$cov(x, y)$ – коэффициент ковариации (мера связи между двумя диапазонами данных).

Параметр b – коэффициент регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата y с изменением фактора на единицу.

Например, функция издержек при производстве некоторой продукции имеет вид $y^t = 3000 + 2x$,

где y – издержки (тыс. руб.),

x – количество единиц продукции

Параметр $b = 2$. Таким образом, с увеличением объёма продукции на одну единицу, издержки производства возрастают в среднем на 2 тысячи. Отсюда следует, что дополнительный прирост выпуска продукции на одну единицу потребует увеличения затрат в среднем на 2 тысячи рублей.

Тесноту связи изучаемых явлений оценивает линейный коэффициент парной корреляции r_{xy}. Для линейной регрессии его значение находится в пределах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Его вычисляют по формуле:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \bar{y}\bar{x}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

σ_x и σ_y – среднее квадратическое отклонение в ряду x и в ряду y.

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \qquad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}$$

Для нелинейной зависимости находят корреляционное отношение η_{xy} из диапазона: $0 \le \eta_{xy} \le 1$. Формула для его нахождения:

$$\eta_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - y^t)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}$$

Если $\eta > r$, то кривая точнее аппроксимирует зависимость, чем прямая. Для прямой $\eta = r$.

Оценку качества построенной модели характеризует коэффициент детерминации, а также средняя ошибка аппроксимации.

Коэффициент детерминации R^2 – квадрат коэффициента корреляции. Он показывает долю дисперсии, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака y.

$$R^2 = \frac{\sum (y^t_x - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$$

$\sum (y^t_x - \bar{y})^2$ – сумма квадратов отклонений, объясняемая регрессией, то есть сумма квадратов разностей между теоретическим y^t (найденным по уравнению регрессии) и средним значением;

$\sum (y - \bar{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений от фактических:

$$\overline{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - y^t}{y} \right| \cdot 100\%$$

Допустимый предел значений $\overline{A}$ – не более 8÷10.

Для интерпретации параметра b в модели находят средний коэффициент эластичности Э, который показывает на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат y от своей средней величины при изменении фактора x на 1% от своего среднего значения:

$$Э = b\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Множественная регрессия

Множественная регрессия – уравнение связи с несколькими независимыми переменными: $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$,

где y – зависимая переменная (результативный признак);

$x_1, x_2, ..., x_m$ – независимые переменные (факторы).

Для построения уравнения множественной регрессии чаще используются следующие функции:

- линейная $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m + \varepsilon$
- степенная $y = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_p^{b_p} \cdot \varepsilon$
- экспонента $y = exp(a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m + \varepsilon)$
- гипербола $y = \dfrac{1}{a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_mx_m + \varepsilon}$

Можно использовать и другие функции (если того требует поставленная задача), приводимые к линейному виду.

Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют метод наименьших квадратов (МНК). Для линейных уравнений и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, строится система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии:

$$\begin{cases} \sum y = na + b_1\sum x_1 + b_2\sum x_2 + ... + b_m\sum x_m \\ \sum yx_1 = a\sum x_1 + b_1\sum x_1^2 + b_2\sum x_1x_2 + ... + b_m\sum x_mx_1 \\ ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \\ \sum yx_m = a\sum x_m + b_1\sum x_1x_m + b_2\sum x_2x_m + ... + b_m\sum x_m^2 \end{cases}$$

Другой вид уравнения множественной регрессии – *уравнение регрессии в стандартизованном масштабе*:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + ... + \beta_m t_{x_m}$$

где $t_y = \dfrac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$, $t_{x_i} = \dfrac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$ – стандартизованные переменные

β_i – стандартизованные коэффициенты регрессии.

К уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе применим МНК. Стандартизованные коэффициенты регрессии (β-коэффициенты) определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_2x_1} + \beta_3 r_{x_3x_1} + \ldots + \beta_m r_{x_mx_1}, \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_2x_1} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_3x_2} + \ldots + \beta_m r_{x_mx_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{yx_m} = \beta_1 r_{x_mx_1} + \beta_2 r_{x_mx_2} + \beta_3 r_{x_3x_m} + \ldots + \beta_m \end{cases}$$

Связь коэффициентов множественной регрессии b_i, со стандартизованными коэффициентами β_i, описывается соотношением

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}$$

Параметр a определяется как $a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - \ldots - b_m\bar{x}_m$

Средние коэффициенты эластичности для линейной регрессии рассчитываются по формуле

$$\bar{Э}_{yx_j} = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$$

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает коэффициент множественной корреляции:

$$R_{yx_1x_2,\ldots,x_m} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{y_{ост}}}{\sigma^2_y}}$$

Значение коэффициента множественной корреляции лежит в пределах от 0 до 1 и должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции:

$$R_{yx_1x_2,\ldots,x_m} \geq r_{yx_i} \qquad (i = \overline{1,m})$$

Коэффициент множественной корреляции для уравнения в стандартизованном масштабе имеет вид

$$R_{yx_1x_2,\ldots,x_m} = \sqrt{\sum \beta_i r_{yx_i}}$$

Использование Excel в регрессионном анализе

1. Для нахождения коэффициента корреляции можно воспользоваться стандартной функцией КОРРЕЛ().

2. Статистическая функция ЛИНЕЙН() определяет параметры линейной регрессии $y = a + bx$.

Порядок вычисления:

1) введите исходные данные или откройте существующий файл, содержащий анализируемые данные;

2) выделите область пустых ячеек 5×2 (5 строк, 2 столбца) для вывода результатов регрессионной статистики или область 1×2 – для получения только значений коэффициентов регрессии;

3) активизируйте **Мастер функций** любым способом: на панели инструментов **Стандартная** щелкните по кнопке **Вставка функции** или в главном меню выберите **Вставка / Функция;**

4) в секции Категория выберите **Статистические,** в секции Функция – ЛИНЕЙН. Щелкните по кнопке **ОК;**

5) заполните поля ввода окна функции (укажите аргументы):

Известные_значения_y – диапазон, содержащий данные результативного признака;

Известные_значения_x – диапазон, содержащий данные независимого признака;

Константа – логическое значение, которое указывает на наличие или отсутствие свободного члена в уравнении. Если *Константа* = 1, то свободный член рассчитывается обычным образом, если *Константа* = 0, то свободный член равен 0;

Статистика – логическое значение, которое указывает, выводить дополнительную информацию по регрессионному анализу или нет. Если *Статистика* = 1, то дополнительная информация выводится, если *Статистика* = 0, то выводятся только значения параметров уравнения.

Так как функция ЛИНЕЙН() является функцией массива, то диалог следует заканчивать нажатием комбинации клавиш CTRL + SHIFT + ENTER.

Дополнительная регрессионная статистика будет выводиться в порядке, указанном в следующей схеме:

Значение коэффициента *b*	Значение коэффициента *a*
Среднее квадратическое отклонение *b*	Среднее квадратическое отклонение *a*
Коэффициент детерминации R^2	Среднее квадратическое отклонение *y*
F-статистика	Число степеней свободы
Регрессионная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов

3. Можно воспользоваться функциями ОТРЕЗОК() для нахождения параметра *a* и НАКЛОН() для нахождения параметра *b* линейной регрессии.

4. Для вычисления параметров экспоненциальной кривой $y=a{\cdot}e^{bx}$ в Excel есть встроенная статистическая функция ЛГРФПРИБЛ()

Порядок вычисления аналогичен функции ЛИНЕЙН().

5. С помощью инструмента **Регрессия** встроенного пакета Анализ данных, помимо результатов регрессионной статистики, дисперсионного анализа и доверительных интервалов, можно получить остатки и графики подбора линии регрессии и нормальной вероятности. Порядок действий следующий:

1) проверьте доступ к пакету анализа. В главном меню последовательно выберите **Сервис / Надстройки**. Установите флажок **Пакет анализа**;

2) в главном меню выберите **Сервис / Анализ данных / Регрессия**. Щелкните по кнопке **ОК**;

3) Заполните диалоговое окно ввода данных и параметров вывода:

Входной интервал Y – диапазон, содержащий данные результативного признака;

Входной интервал X – диапазон, содержащий данные факторов независимого признака;

Метки – флажок, который указывает, содержит ли первая строка названия столбцов или нет;

Константа - ноль – флажок, указывающий, на наличие или отсутствие свободного члена в уравнении;

Выходной интервал – достаточно указать левую верхнюю ячейку будущего диапазона;

Новый рабочий лист – можно задать произвольное имя нового листа.

Если необходимо получить информацию и графики остатков, установите соответствующие флажки в диалоговом окне. Щелкните по кнопке **ОК.**

Аппроксимация данных с помощью линии тренда

Средства деловой графики позволяют найти уравнение регрессии не прибегая к вычислениям. Достаточно построить кривую функции *Y(x)* (для этого отсортировать данные по *x* по возрастанию, выбрать тип диаграммы **Точечная**). Затем щелкнуть на кривой правой кнопкой мыши, в появившемся контекстном меню выбрать пункт **Добавить линию тренда**, который предъявляет окно **Линия тренда**. Под трендом понимается изменение, определяющее общее направление развития, основную тенденцию. На вкладке Тип выбрать вид уравнения аппроксимации, перейти на вкладку **Параметры** и установить флажок **Показывать уравнение на диаграмме**. В результате в области построения диаграммы мы увидим не только линию тренда, но и её уравнение. Если на вкладке **Параметры** установить флажок **Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации $\mathbf{R^2}$**, то можно увидеть значение коэффициента детерминации. Здесь можно визуально оценить поведение анализируемого процесса в будущем/прошлом, если установить **Прогноз вперед/назад** на заданное число единиц независимого аргумента *x*.

Пример

По 10 территориям Уральского района известны значения двух признаков: среднедушевой прожиточный минимум *x* и среднедневная заработная плата *y*.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	78	82	87	79	89	106	67	88	73	87
y	133	148	134	154	162	195	139	158	152	162

Требуется определить, влияет ли размер среднедушевого прожиточного минимума на размер заработной платы, и если влияет, то определить вид зависимости.

1. Для ответа на вопрос влияет ли, найдём коэффициент корреляции.

2. Для характеристики зависимости *y* от *x* найдём параметры нескольких функций, например таких:

а) линейной;

б) степенной;

в) равносторонней гиперболы.

Оценим каждую модель через среднюю ошибку аппроксимации $\overline{A}$.

3. Выполнить прогноз заработной платы *y* при прогнозируемом значении среднедушевого прожиточного минимума *x*, составляющем 107% от среднего уровня.

4. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза.

Решение.

Мы не будем приводить подробные расчёты, которые удобно проводить в среде Excel, а покажем только конечные результаты, полученные по приведённым формулам.

1) Коэффициент корреляции $r_{xy} = 0,77$. Его значение говорит о том, что связь есть, тесная (0÷0,25 – нет связи; 0,25÷0,5 – слабая; 0,5÷0,75 – средняя; 0,75÷1 – тесная). Причём связь прямая, то есть с увеличением зарплаты будет увеличиваться доля на покупку.

2а). Для расчета параметров *a* и *b* линейной регрессии $y = a + bx$ решаем систему нормальных уравнений относительно *a* и *b*:

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum yx \end{cases}$$

По исходным данным рассчитываем все необходимые суммы, находим средние значения, которые подставляем в формулы:

$$b = \frac{\overline{y\,x} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{y\,x} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}.$$

Уравнение регрессии: $y^t = 43,83 + 1,31x$.

Это же уравнение можно получить средствами Excel.

С увеличением среднедушевого прожиточного минимума на один рубль среднедневная зарплата увеличивается в среднем на 1,31.

Определим коэффициент детерминации:

$$R^2 = 0,599$$

Вариация результата на 59,9% объясняется вариацией фактора *x*. 40,1% – влияние неучтённых факторов (то есть работодатели все-таки учитывают уровень прожиточного минимума при определении зарплаты). Подставляя в уравнение регрессии фактические значения *x*, определим теоретические (расчетные) значения y^t. Найдем величину средней ошибки аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum A_j = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y - y^t}{y}\right| \cdot 100\% = 5{,}79\%$$

В среднем расчетные значения отклоняются от фактических на 5,79%.

2б). Построению степенной модели $y = ax^b$ предшествует процедура линеаризации. То есть перехода от нелинейной модели к линейной. В примере линеаризация производится путем логарифмирования обеих частей уравнения: $Ln\ y = Ln\ a + b\ Ln\ x$. Делаем замену и получаем: $Y = A + bX$. Где $Y = Ln\ y$, $A = Ln\ a$, $X = Ln\ x$.

Воспользуемся выведенными ранее формулами для нахождения параметров линейной модели и найдём A и b.

$$b = \frac{\overline{Y\,X} - \bar{Y} \cdot \bar{X}}{\sigma_X^2} = \frac{\overline{Y\,X} - \bar{Y} \cdot \bar{X}}{\overline{X^2} - \bar{X}^2}.$$

$$A = \bar{Y} - b\bar{X}$$

Получаем $b = 0{,}65$; $A = 2{,}158$. Находим коэффициент $a = exp(A) = 8{,}66$. Вид модели: $y^t = 8{,}66x^{0{,}65}$

Подставляя в полученное уравнение фактические значения *x*, получаем теоретические значения результата y^t. По ним рассчитаем показатель тесноты связи – корреляционное отношение η_{xy} и среднюю ошибку аппроксимации $\bar{A}_j$.

$$\eta_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum(y - y^t)^2}{\sum(y - \bar{y})^2}} = 0{,}76$$

$$\bar{A} = 5{,}88\%$$

Характеристики степенной модели указывают, что она несколько хуже линейной функции описывает взаимосвязь.

2в). Уравнение равносторонней гиперболы $y = a + b\frac{1}{x}$ линеаризуется при замене: $z = \frac{1}{x}$. Тогда $y = a + bz$.

Воспользуемся выведенными ранее формулами для нахождения параметров линейной модели и найдём *a* и *b*. Получили *a = 256,14; b = -8443,6*. Вид модели: $y = 256{,}14 - 8443{,}6\frac{1}{x}$

Подставляя в полученное уравнение фактические значения *x*, получаем теоретические значения результата y^t. По ним рассчитаем показатель тесноты связи – корреляционное отношение η_{xy} и среднюю ошибку аппроксимации $\overline{A}_j$.

$$\eta_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum(y - y^t)^2}{\sum(y - \bar{y})^2}} = 0{,}71$$

$$\overline{A} = 6{,}36\%$$

$\overline{A}$ = 6,36% говорит о повышенной ошибке аппроксимации, но в допустимых пределах. Характеристики равносторонней гиперболы указывают, что она хуже линейной функции описывает взаимосвязь, а также хуже степенной.

Качество построенных моделей оценивается как хорошее, так как $\overline{A}$ не превышает 8 - 10%.

3. Полученные оценки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза. Если прогнозируемое значение прожиточного минимума составит: $x_{np} = \bar{x} \cdot 1{,}07 = 83{,}60 \cdot 1{,}07 = 89{,}45$, тогда прогнозируемое значение зарплаты составит: $y_{np}{}^t = 43{,}83 + 1{,}31 \cdot 89{,}45 = 161{,}39$

4. Ошибка прогноза составит:

$$\Delta_{y^t} = \sigma_{ocm}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{np} - \bar{x})^2}{\sum(x - \bar{x})^2}}$$

где $\sigma_{ост} = \sqrt{\dfrac{\sum (y - y^t)^2}{n - m - 1}}$, остаточная дисперсия. В нашем примере $n = 10$ (количество наблюдений), $m = 1$ (количество оцениваемых параметров, то есть коэффициентов перед фактором x).

Получили $\Delta_{y^t} = 12{,}90$.

Фактическое значение заработной платы при $x_{пр} = 89{,}45$ может колебаться от $y_{пр}^t = 161{,}39 - 12{,}9 = 148{,}49$ до $y_{пр}^t = 161{,}39 + 12{,}9 = 174{,}29$.

ТЕОРИЯ ИГР

Теория игр рассматривает задачи выбора оптимального поведения с учетом возможных действий других участников и случайных событий. Теория игр представляет собой теорию конфликтных ситуаций, ее цель – выработать рекомендации по разумному поведению участников конфликта. Чтобы сделать возможным анализ конфликтной ситуации, строится математическая модель, называемая игрой, которая от реального конфликта отличается тем, что ведется по вполне определенным правилам.

Под *правилами игры* понимается система условий, регламентирующая возможные варианты действий обеих сторон, объем информации каждой стороны о поведении другой, последовательность чередования ходов (или отдельных решений), принятых в процессе игры, а также результат игры.

Определение: *Игра* – совокупность правил, в условиях которых субъект принимает некоторые решения.

Игра – это упрощенная формализованная модель конфликтной ситуации.

Определение: *Стратегией игрока* называется совокупность правил, определяющих однозначно выбор при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Существуют различные классы игр. Наиболее изучены игры с нулевой суммой, а так же игры с природой.

Остановимся на игре с нулевой суммой. Это такая игра, в которой выигрыш одного игрока соответствует проигрышу другого.

Под *игроком* понимается как отдельный индивидуум, так и группа (коллектив).

Пусть игрок *A* имеет *m* возможных выборов и придерживается их с частотой $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_m$. Его противник *B* имеет *n* возможных выборов используемых с частотами $y_1, y_2, \dots.\ y_n$.

Если игрок *A* использует *i*-ый выбор, а игрок *B* – *j*-ый, то выигрыш игрока *A* (соответственно проигрыш игрока *B*) можно обозначить как a_{ij}. В итоге совокупность таких элементов представляет собой таблицу, которая называется *платежной матрицей* или просто *матрицей игры*.

Во всех таких ситуациях ставится задача: определить оптимальную стратегию и соответствующий ей выигрыш.

Определение: *Оптимальной стратегией* игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (или минимально возможный средний проигрыш).

Определение: Выигрыш игрока при оптимальном поведение обеих сторон называется *ценой игры*.

При выборе оптимальной стратегии все рассуждения ведутся с учетом того, что противник такой же разумный, как и мы сами, и, естественно, делает все, чтобы помешать нам добиться своей цели.

Таблица 1

Частота (вероятность выбора стратегии A_i)	B_j / A_i	B_1	B_2	…	B_n	α_i
x_1	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
x_2	A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…	…
x_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
	β_j	β_1	β_2	…	β_n	

Строки соответствуют возможной политике игрока *A*, столбцы – соответствуют игроку *B*.

Рассуждаем: Выбирая стратегию A_i, мы всегда должны рассчитывать на то, что противник ответит на нее той стратегией B_j, для которой наш выигрыш будет минимальным. Определим его и обозначим как α_i

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

Заполним этими значениями последний столбец таблицы.

В результате разумных действий противника (он стремится уменьшить наш выигрыш), при выборе нами стратегии A_i мы не выиграем меньше чем α_i.

Действуя наиболее осторожно, то есть, избегая всякого риска, мы должны остановиться на той стратегии A_i, которая обеспечит нам максимальный выигрыш.

Обозначим его α

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

или

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

<u>Определение:</u> Величина α называется *нижней ценой игры* или *максиминным выигрышем*, или *максимином*.

<u>Определение:</u> Та стратегия, которой соответствует число α, называется *максиминной*.

С учетом частот (для многоходовых игр) выигрыш игрока A можно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Если будем придерживаться максиминной стратегии, то, при любом поведении противника будет гарантирован выигрыш, во всяком случае, не меньший, чем величина

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Это есть гарантированный выигрыш, то есть мы получим не меньше этого, поэтому величина α называется *нижней ценой игры*.

Противник старается получить максимальный выигрыш или минимальный проигрыш, то есть, рассуждая аналогично за противника, можем утверждать, что он заинтересован в том, чтобы обратить наш выигрыш в минимум, для этого он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша. Обозначим его

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

Заполним этими значениями последнюю строку таблицы.

Сам выигрыш β находим по формуле:

$$\beta = \min_j \beta_j$$

или

$$\beta = \min_{j} \max_{i} a_{ij}$$

С учетом частот можем записать

$$\min_{j} \max_{i} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Величина β называется *верхней ценой игры* или *минимаксом*.

Соответствующая минимаксному выигрышу стратегия противника, называется *минимаксной*.

Придерживаясь этой, наиболее осторожной стратегии, противник гарантирует себе следующее: чтобы мы не предприняли против него, он, во всяком случае, проиграет сумму, не большую чем β.

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной, минимаксной), называется *принципом минимакса*. Цена игры V (выигрыш по оптимальной стратегии) находится в пределах от α до β. Возможен частный случай, когда $\alpha = \beta = V$.

Методы решения игр с нулевой суммой

1. Составляется платежная матрица (матрица игры).
2. Определяют значения α и β.

Если $\alpha = \beta$, то у игры есть чистая стратегия, то есть существует оптимальная стратегия X с элементами $x_1, x_2, \dots, x_m$, для которой одно из значений $x_i = x_i^* = 1$, все остальные $x_i = 0$, где $i \neq i^*$.

<u>Пример:</u> Матрица игры имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	5	1	3	1
A_2	-3	0	1	-3
A_3	3	2	4	2
β_i	5	2	4	

Здесь $\alpha = \alpha_3 = 2$, для игрока A третья стратегия является его максиминной стратегией. $\beta = \beta_2 = 2$, для игрока B – вторая стратегия минимаксной.

Если $\alpha = \beta = V$, то игра называется *игрой с седловой точкой* (*Седловой точкой* является точка, которая одновременно является точкой минимума по одной оси и точкой максимума по другой оси).

Если $\alpha \neq \beta$, то игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Так как $\alpha = \beta$, то игра имеет седловую точку (в нашем примере элемент a_{23} является *седловой точкой*), а игроки обладают чистыми стратегиями.

<u>Ответ</u>: $V = 2$ при $X_{опт} = (0, 0, 1)$ и $Y_{опт} = (0, 1, 0)$.

3. <u>Пример.</u> Пусть матрица игры имеет вид:

A =

A_i \ B_j	y	1-y	α_i
x	6	3	3
1-x	-2	4	-2
β_i	6	4	

Так как $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет чистых стратегий и следует выбрать метод определения смешанных стратегий.

3.1. Так как матрица игры 2×2, то можно воспользоваться классической теорией оптимизации, для этого запишем формулу нахождения значения цены игры V.

Если игрок A придерживается 1-го хода с частотой x (вероятность), то второго хода – с частотой $(1 - x)$. Для игрока B имеем y и $(1 - y)$.

Цена игры или математическое ожидание дохода:

$$V = \max_x \min_y \{6xy + 3x(1-y) - 2(1-x)y + 4(1-x)(1-y)\}$$

$$\begin{cases} V_x = 6y + 3(1 - y) + 2y - 4(1 - y) = 0 \\ V_y = 6x - 3x - 2(1 - x) - 4(1 - x) = 0 \end{cases}$$

Раскроем скобки и приведём подобные:

$$\begin{cases} V_x = 9y - 1 = 0 \\ V_y = 9x - 6 = 0 \end{cases}$$

Решаем полученную систему и находим: $y = 1/9;\ x = 2/3.$

Подставляем найденные значения в формулу для вычисления V и получаем $V = 10/3 = 3\ 1/3$.

В вычислениях не ошиблись, так как получили $\alpha < V < \beta$.

<u>Ответ</u>: $V = 3\ 1/3$ при $X_{опт} = (2/3;\ 1/3)$ и $У_{опт} = (1/9;\ 8/9)$.

Поясним ответ: если игрок *А* будет придерживаться своей максиминной стратегии, то он обеспечит себе минимальный выигрыш 3 единицы ($\alpha = 3$), но, если игрок *А* будет придерживаться оптимальной стратегии, то обеспечит выигрыш 3 1/3, то есть, например, из 5 возможных решений ему следует 2 раза применять первый ход и 3 раза второй. Для игрока *В*: если игрок *В* будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то проиграет 4 единицы, но, если будет применять оптимальную стратегию, то его проигрыш будет меньше – 3 1/3. При использовании оптимальной стратегии он должен применять 1 раз первый ход и 4 раза второй.

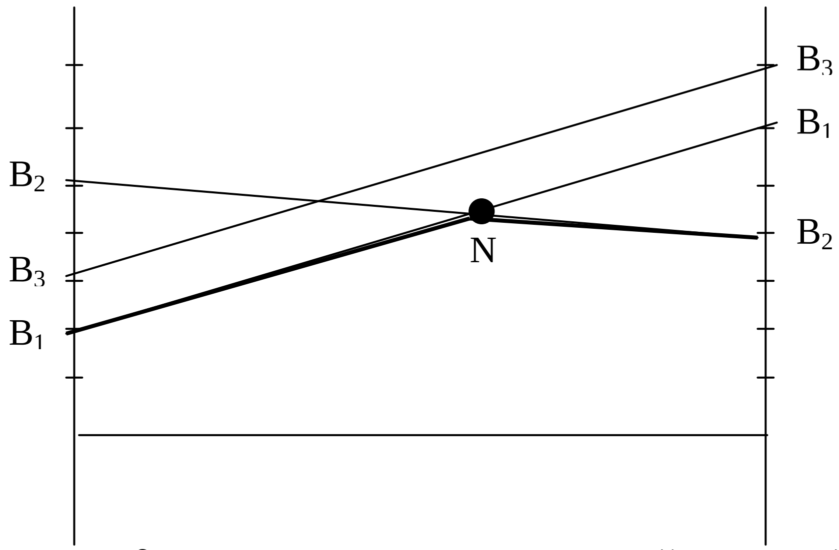
3.2. Если игра имеет размерность 2×n или m×2, то к ней можно применить графический метод решения.

<u>Пример:</u> Пусть матрица *А* имеет вид

	B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A =	A_1	2	5	3	2
	A_2	6	4	7	4
	β_i	6	5	7	

Определяем α и β (есть ли чистые стратегии; и если их нет, находим решение в смешанных стратегиях).

При использовании графического метода откладываем отрезок длины единица, на концах которого проводим вертикальные линии.



Если матрица 2×n, то откладываем на левой и правой вертикальных шкалах значения, получаемые игроком В при использовании его *j*-й стратегии, то есть B_j и соединяем их линией.

Если игрок будет придерживаться только первой стратегии, то будет иметь выигрыш от 2 до 6 рублей. Откладываем на левой вертикальной линии 2 единицы, на правой – 6. Соединяем их, получаем отрезок B_1B_1. Аналогично строим остальные.

После этого выделяем нижнюю ломаную и ее точку максимума. Эта точка получена пересечением первой и второй прямой, то есть в итоге мы должны рассмотреть матрицу 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

Третью не рассматриваем, она оказалась лишней. Действительно, выигрыш по 3-й стратегии превышает соответствующие значения 1-й, и она не выгодна для 2-го игрока (B). Далее указываем частоты выбора:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & 1-y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Эту задачу можно решать без использования классической теории оптимизации, то есть можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y + 5(1-y) = V \\ 6y + 4(1-y) = V \end{cases}$$

Аналогично:

$$\begin{cases} 2x + 6(1-x) = V \\ 5x + 4(1-x) = V \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем: $y = 1/5;\ x = 2/5;\ V = 22/5.$

Ответ: $V = 22/5$ при $X_{опт} = (2/5;\ 3/5)$ и $Y_{опт} = (1/5;\ 4/5,\ 0)$.

Если имеем матрицу m×2, то строим линии, соответствующие стратегиям A_i выделяем верхнюю ломаную и ее минимальную точку.

3.3. Если матрица игры имеет большую размерность, то иногда выполняют доминирование (в случае смешанных стратегий), то есть сокращают размерность, а затем применяют п. 3.1. или п. 3.2.

Пример: пусть матрица А имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Выполним доминирование: i-я стратегия первого игрока доминирует его k-ю стратегию, если $a_{ij} \geq a_{kj}$ для всех j от 1 до n $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Рассмотрим первую и вторую строки, первую и третью и делаем вывод: вторая и третья стратегии для первого игрока не выгодны. То есть все элементы первой строки превышают соответствующие элементы второй и третьей, поэтому вторую и третью стратегии можно исключить и не рассматривать. Размерность матрицы А уменьшилась и стала 2x5.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

j-я стратегия второго игрока доминирует его q-ю стратегию, если $a_{ij} \leq a_{iq} \cdot (i = 1, 2, \dots, m)$.

Первая стратегия более проигрышна по сравнению, например, со 2-й, так как 8>6, 7>2. Первую стратегию не рассматриваем. Четвертая и пятая стратегии доминируют вторую, их не рассматриваем.

В итоге получили матрицу 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Ответ</u>: $V = 14/3$ при $X_{опт} = (2/3;0, 0, 1/3)$ и $У_{опт} = (0, 1/3; 2/3, 0, 0)$.

3.4. Любой платежной матрице $\|a_{ij}\|_{mxn}$ (размерности m×n) можно сопоставить пару двойственных задач. Тогда оптимальными стратегиями игры будут вектора X и $У$ с элементами: $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

Они могут быть определены путем решения следующих задач:

$$L_{min} = \sum_{i=1}^{m} x_i'$$

$$\text{при ограничениях} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \geq 1, \; j = \overline{1,n} \\ x_i' \geq 0, \; i = \overline{1,m} \end{cases}$$

2-я задача:

Цена игры и значения частот будут найдены по формулам:

$$V = \frac{1}{L_{min}} = \frac{1}{L_{max}}, \;\; x_i = Vx_i', \; i = \overline{1,m}; \;\; y_j = Vy_j', \; j = \overline{1,n}$$

Замечание: если в матрице A есть $a_{ij}<0$, то есть отрицательное значение, то подбираем такую константу c, чтобы получить новые значения, $a_{ij}' = a_{ij} + c$ такими, чтобы для них выполнялось условие $a_{ij}' \geq 0$.

Работаем с новой матрицей A', находим V', а значение V получаем как $V = V' - c$.

$$L_{max} = \sum_{j=1}^{n} y_j'$$

$$\text{при ограничениях} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j' \leq 1, i = \overline{1,m} \\ y_j' \geq 0, \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

<u>Пример</u>: пусть матрица игры имеет вид:

A =

	y_1	y_3	y_3	α_i	
x_1	6	2	5	2	$\alpha = 5$
x_2	4	3	7	3	
x_3	5	5	6	5	$\beta = 5$
β_j	6	5	7		

Так как $\alpha = \beta = 5$, то игра имеет решение в чистых стратегиях и цена игры будет равна 5 $(V = 5)$ при $X_{опт} = (0, 0, 1)$, $У_{опт} = (0, 1, 0)$. Игра имеет седловую точку $a_{32} = 5$.

Так как $\alpha = a_{32}$, то для игрока A 3-я стратегия максиминная; для противника 2-я – минимаксная.

Матрица имеет размерность 3×3. Можно ли применить классическую теорию оптимизации, то есть, можем ли записать функцию цели как многочлен и взять частные произвольные; либо следует применить графический метод, выполнив доминирование; либо будем решать симплекс-методом, записав пару двойных задач?

Так как матрица 3×3 графический метод не применим.

Запишем пару двойственных задач, решив которые, подтвердим правильность наших выводов о чистой стратегии или опровергнем.

Чтобы записать пару двойственных задач, нужно определиться с размерностью векторов X' и $У'$. Так как 1-й игрок имеет 3 возможных хода (3 строки в матрице A или $m = 3$ – количество решений, принимаемых игроком A), то получаем $X' = (x_1', x_2', x_3')$. $У$ показывает частоту выбора вторым игроком, следовательно, $У' = (y_1', y_2', y_3')$.

Запишем пару двойственных задач:

$L_{min} = x_1' + x_2' + x_3'$

при ограничениях

$$\begin{cases} 6x_1' + 4x_2' + 5x_3' \geq 1 \\ 2x_1' + 3x_2' + 5x_3' \geq 1 \\ 5x_1' + 7x_2' + 6x_3' \geq 1 \\ x_i' \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Вторая задача:

$L_{max} = y_1' + y_2' + y_3'$

при ограничениях

$$\begin{cases} 6x_1' + 2x_2' + 5x_3' \leq 1 \\ 4x_1' + 3x_2' + 7x_3' \leq 1 \\ 5x_1' + 5x_2' + 6x_3' \leq 1 \\ y_j' \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Выбираем метод решения записанных задач.

I. Если симплекс-метод, то какую задачу проще решить? В 1-й задаче имеем $A_{3\times 3}$, необходимо перейти к равенствам, матрица станет размерностью 3×6, единичных векторов нет, следовательно, нужно вводить М-задачу, матрица становится 3×9. Во 2-й задаче также $A_{3\times 3}$, вводим ослабляющие переменные, размерность станет 3×6 и можно решать, так как есть единичные вектора условий.

II. Если использовать Поиск решения, то, всё равно какую решать, а ответ для 2-й задачи будет в отчете по устойчивости.

В результате решения получаем:

$L_{min} = L_{max} = 1/5$ при $X'_{опт} = (0, 0, 1/5)$ и $У'_{опт} = (0, 1/5; 0)$.

Нужно сделать переход к искомым неизвестным:

Цена игры $V = 1/L_{min} = 1/(1/5) = 5$. Оптимальные стратегии: $X_{опт} = V \cdot X' = (0, 0, 1)$ и $У_{опт} = V \cdot Y' = (0, 1, 0)$. Подтвердили правильность наших выводов о чистой стратегии.

<u>Ответ</u>: $V = 5$ при $X_{опт} = (0, 0, 1)$ и $У_{опт} = (0, 1, 0)$.

Каждую пару двойственных задач можно связать с игрой, то есть для пары двойственных задач вида:

1. $max\ L = CX$ 2. $min\ L = B^T Y$

при ограничениях:

$$\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A^T У \geq C^T \\ У \geq 0 \end{cases}$$

можно составить эквивалентную игру с платежной матрицей П, где

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix}$$

Принятие решений в условиях неопределенности

Когда рассматриваются ситуации с наличием неопределенности, то такие игры называют играми с природой.

Под природой понимается не только объективная действительность, но и комплекс неопределенностей связанных с состоянием техники, со здоровьем людей, с другими факторами, не зависящими от лица, принимающего решение.

Чтобы принять благоприятное решение следует определить:

1. цель решения;
2. возможные варианты решения проблемы (от этого зависит количество строк матрицы игры);
3. возможные исходы каждого решения (то есть количество ситуаций, преподносимых природой);
4. оценить каждый исход (найти элементы матрицы игры);
5. выбрать оптимальное решение на основе поставленной цели. Здесь выбор зависит от обстоятельств и точки зрения того, кто принимает решение. Для принятия решений можно воспользоваться различными правилами, критериями.

Рассмотрим наиболее часто применяемые критерии на примере.

Пример:

Владелец кондитерской решает, сколько пирожных иметь в запасе, чтобы удовлетворить спрос. Пирожное обходится ему в 0,7 ден. ед., продается по 1,3 ден. ед.

Продать невостребованные пирожные на следующий день невозможно, поэтому остаток распродается по 0,3 ден. ед.

Сколько пирожных следует закупить в начале дня, чтобы максимизировать доход?

Решение: Цель решения ясна из вопроса задачи. Возможные варианты решения зависят от возможности закупать пирожные. В нашей учебной задаче будем считать, что владелец кондитерской может закупить от 1 до 5 пирожных. Отсюда, можно рассмотреть 5 возможных решений: закупать: 1, 2, 3, 4 или 5пирожных Соответственно возможные исходы – спрос от 1 до 5 пирожных. Обозначим через x_i возможные решения, а через S_j – возможное состояние спроса.

Оценим каждый исход, то есть найдём значения d_{ij}. Здесь $i,j = 1, 2, ..., 5$. Запишем их в матрицу игры, размерность которой будет 5x5. Поясним, например, d_{11} – значение дохода, если закупили 1 пирожное и продали 1 пирожное, $d_{11} = -0,7 + 1,3 = 0,6;$ d_{21} – значение дохода, если закупили 2 пирожных, продали одно, $d_{21} = -2 \cdot 0,7 + 1,3 + 0,3 = 0;$ d_{22} – 2 купили и 2 продали, $d_{22} = -2 \cdot 0,7 + 2 \cdot 1,3 = 1,2$ и т.д.

Таблица 1

D =

x_i \ S_j	1	2	3	4	5
1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
2	0,2	1,2	1,2	1,2	1,2
3	-0,2	0,8	1,8	1,8	1,8
4	-0,6	0,4	1,4	2,4	2,4
5	-1,0	0,0	1,0	2,0	3,0

На какой стратегии остановиться?

Рассмотрим правила принятия решений без использования численных значений вероятностей исходов (исход – возможный спрос, то есть без учёта вероятности наступления того или иного варианта спроса).

Правила принятия решений без использования численных значений вероятностей исходов

1. Правило максимакса состоит в максимизации максимума доходов (это правило – подход карточного игрока).

В соответствии с этим правилом находим значения величин

$D_i = \max_j d_{ij}$, затем находим цену игры

$$V = \max_i D_i \quad или \quad V = \max_i \max_j d_{ij}$$

Сведём найденные значения в таблицу:

x_i	D_i
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0

Максимальное значение равно 3, то есть $V = 3$

<u>Вывод:</u> если придерживаться правила максимакса, то следует закупать 5 пирожных, рассчитывая получить максимально возмож-

ный доход равный 3, игнорируя при этом возможные потери.

2. Правило максимина состоит в максимизации минимального дохода.

В соответствии с этим правилом находим значения величин $D_i = \min_j d_{ij}$, затем находим цену игры

$$V = \max_i D_i \quad или \quad V = \max_i \min_j d_{ij}$$

Это правило называют критерием Вальда или критерием, олицетворяющим позицию крайнего пессимизма. Если им руководствоваться, то надо всегда ориентироваться на худшие условия, зная наверняка, что хуже этого не будет. Сведём найденные значения в таблицу:

x_i	D_i
1	0,6
2	0,2
3	-0,2
4	-0,6
5	-1,0

Максимальное значение равно 0,6; то есть $V = 0,6$

Вывод: Если принимать решение по критерию максимина, то следует закупать только 1 пирожное, при этом будет гарантирован доход 0,6 ден. ед. Приняли очень осторожный подход.

3. Правило минимакса. Суть его состоит в минимизации максимально возможных потерь. Это правило называют критерием Сэвиджа, говорят, что при использовании этого критерия определяем минимальный риск, поэтому должны составить таблицу возможных потерь или матрицу сожалений. Сожаление между действительным выбором и наиболее благоприятным (фактически потери определим потом, когда всё произойдёт по факту).

Элементы матрицы сожалений определяются по правилу: определяется максимальный доход для каждого исхода, затем из полученного значения вычитают значения дохода этого же исхода соответствующие всем решениям. Обозначим упущенный доход как ud_{ij}. Расчётные формулы:

$$ud_{ij} = \max_i d_{ij} - d_{ij} \quad j = 1,2,...,5$$

$$UD_i = \max_j ud_{ij}, \quad V = \min_i UD_i = \min_i \max_j ud_{ij}$$

Заполним для рассматриваемого примера матрицу сожалений. Так, например, для первого исхода максимальное значение дохода равно 0,6. Найдём $ud_{11} = 0{,}6 – 0{,}6 = 0$. $ud_{21} = 0{,}6 – 0{,}2 = 0{,}4$. $ud_{31} = 0{,}6 – (-0{,}2) = 0{,}8$ и т.д.

Для второго исхода или для спроса равного двум пирожным максимальный доход равен 1,2. Найдём $ud_{12} = 1{,}2 – 0{,}6 = 0{,}6$. $ud_{22} = 1{,}2 – 1{,}2 = 0$. $ud_{32} = 1{,}2 – 0{,}8 = 0{,}4$ и т.д.

Таблица 2

UD =

x_i \ S_j	1	2	3	4	5
1	0	0,6	1,2	1,8	2,4
2	0,4	0	0,6	1,2	1,8
3	0,8	0,4	0	0,6	1,2
4	1,2	0,8	0,8	0	0,6
5	1,6	1,2	0,8	0,4	0

Найдём для каждого возможного решения максимальные потери (упущенный доход) и сведём полученные значения в таблицу:

x_i	UD_i
1	2,4
2	1,8
3	1,2
4	1,2
5	1,6

Минимальное значение равно 1,2; то есть $V = 1{,}2$

Вывод: Следует закупать 3 или 4 пирожных, в этих случаях потери будут минимальные и составят 1,2.

Ответ: если придерживаться 1-го правила, то следует закупать 5 пирожных, но если придерживаться самого осторожного подхода – 2-го правила, то следует закупать 1 пирожное, а по 3-му правилу – закупать 3 или 4.

Правила принятия решений с использованием численных значений вероятностей исходов

1. Правило максимальной вероятности. Суть его: максимизация наиболее вероятных доходов.

Пусть известны вероятности спроса p_j, причём их сумма равна 1.

S_j	1	2	3	4	5
p_j	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Максимальная вероятность равна 0,3 – что соответствует спросу на 3 или 4 пирожных в день. В таблице доходов (таблица 1) видим, что максимальный доход при спросе 3 единицы равен 1,8 – что соответствует решению закупать 3 пирожных.

Для спроса 4 пирожных с той же вероятностью 0,3 максимальный доход равен 2,4 (из таблицы 1), что соответствует решению закупать 4 пирожных. Но 2,4 больше 1,8.

Вывод: закупать 4 пирожных в день и тогда возможен доход 2,4.

Следующая группа правил состоит в оптимизации математического ожидания функции цели (прибыль, доход, убытки и др.).

2. Максимизация ожидаемого дохода для возможных решений. Для этого используют критерий принятия решений в условиях риска. Его рекомендуют применять тогда, когда известна вероятность возникновения той или иной ситуации. В принципе такая оценка может быть уточнена с помощью экспертов. Допустим p_j – вероятность возникновения спроса в объёме S_j. Тогда можно найти математическое ожидание дохода (MD) по формуле:

$$MD_i = \sum_{j=1}^{n} p_j d_{ij},\ i = 1,2,...,m \qquad MD = \max_i MD_i$$

Определим математическое ожидание для каждого из 5-и возможных решений. Найденные значения сведём в таблицу:

x_i	MD_i
1	0,6
2	1,1
3	1,4
4	1,4
5	1,1

Максимальное значение равно 1,4; то есть $V = 1,4$

Расчёт ведём по значениям d_{ij} из первой таблицы. Так, например, для $x_1 = 1$ получаем: $MD_1 = 0,1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,6 \cdot (0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,3 + 0,1) = 0,6 \cdot 1 = 0,6$.

Для $x_2 = 2$ получаем: $MD_2 = 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 1,2 + 0,3 \cdot 1,2 + 0,3 \cdot 1,2 + 0,1 \cdot 1,2 = 0,1 \cdot 0,2 + 1,2 \cdot (0,2 + 0,3 + 0,3 + 0,1) = 0,02 + 1,2 \cdot 0,9 = 0,02 + 1,08 = 1,1$. Аналогично находим остальные значения.

Вывод: максимальное математическое ожидание дохода составит 1,4, если закупать 3 или 4 пирожных.

4. Значения вероятностей могут быть иными, поэтому полезно знать насколько велика зависимость выбора решения от изменения величины вероятности. Воспользуемся критерием Лапласа, при ис-

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}}{n},\ i = 1,2,...,m \qquad V = \max_i D_i$$

пользовании которого предполагается, что вероятности возможного спроса неизвестны и тогда можно принять $p_j = 1/n$. В нашем примере $p_j = 1/5 = 0{,}2$. В этих условиях должно быть принято то решение, которое даёт максимальный эффект. То есть

x_i	D_i
1	0,6
2	1,0
3	1,2
4	1,2
5	1,0

Максимальное значение равно 1,2; то есть $V = 1{,}2$

Вывод: в условиях равновероятности возникновения спроса максимальное математическое ожидание дохода составит 1,2, если закупать 3 или 4 пирожных.

В данном случае выбор решения не чувствителен к незначительным изменениям вероятности, то есть осталось тоже решение – 3 или 4 пирожных.

4. Минимизация ожидаемых возможных потерь находится по матрице сожалений (таблица 2). Ожидаемые возможные потери при каждом решении x можно найти как сумму произведений вероятности возникновения спроса на упущенную выгоду при соответствующем спросе. Расчётные формулы:

$$UD_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot ud_{ij},\ i = 1,2,...,m \qquad V = \min_i UD_i$$

Например, для $x_1 = 1$ получаем: $UD_1 = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 1{,}2 + 0{,}3 \cdot 1{,}8 + 0{,}1 \cdot 2{,}4 = 0 + 0{,}12 + 0{,}36 + 0{,}54 + 0{,}24 = 1{,}26$. Аналогично находим остальные значения.

x_i	UD_i
1	1,26
2	0,76
3	0,46
4	0,46
5	0,76

Минимальные возможные потери равны 0,46; то есть $V = 0{,}46$

Вывод: минимальные возможные потери составят 0,46 при условии, что будут закупать 3 или 4 пирожных в день.

5. Критерий Гурвица (называют критерием пессимизма – оптимизма Гурвица). Этот критерий является компромиссом между осторожным правилом максимина и оптимистичным правилом максимакса. Этот критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайнем пессимизмом (всегда рассчитывает на худшее), ни крайним легкомысленным оптимизмом (авось кривая вывезет). Согласно этому критерию, благоприятная стратегия выбирается из условия:

$$D_i = \alpha \cdot \max_j d_{ij} + (1-\alpha) \cdot \min_j d_{ij},\ i = 1,2,...,m \qquad V = \max_i D_i$$

Здесь α – коэффициент оптимизма, который может принимать значения от 0 до 1 $(0 \le \alpha \le 1)$.

При $\alpha = 0$ (полный пессимизм) рассматриваемый критерий превращается в критерий максимина (критерий Вальда). При $\alpha = 1$ получаем критерий крайнего оптимизма или критерий максимакса.

Коэффициент α выбирается из субъективных соображений, а именно: чем опаснее ситуация, тем больше мы хотим в ней подстраховаться. Чем меньше наша склонность к риску, тем ближе к 0 выбирается значение α.

Рассмотрим несколько разных значений α. Возьмём, например значения от 1 до 1 с шагом 0,1. Найдём соответствующие значения D_i и сведём их в таблицу 3.

Таблица 3

x_i \ α_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
3	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
4	-0,6	-0,3	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
5	-1	-0,6	-0,2	0,2	0,6	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3

Покажем, как находили значения в таблице. Например, при $\alpha = 0{,}1$ и $x = 2$. Сначала находим в таблице 1 максимальное и минимальное значения во второй строке – это 1,2 и 0,2. Затем вычисляем $D_2 = 0{,}1 \cdot 1{,}2 + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}2 = 0{,}12 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}3$. Аналогично находили все остальные значения.

Поясним значения чисел в таблице. Например, для $\alpha = 0{,}8$ и $x =$

3 получили число 1,4. Это число говорит: если мы себя оценили себя коэффициентом 0,8 (мы оптимисты) и принимаем решение покупать 3 пирожных, то гарантируем себе прибыль равную 1,4.

Находим в каждом столбце таблицы максимальное значение (выделены цветом).

Вывод: если лицо, принимающее решение склонно к пессимизму (оценивает себя коэффициентом $\alpha = 0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3)$, то ему следует придерживаться первой стратегии, то есть закупать 1 пирожное. Тогда гарантирован доход 0,6 ден. ед. Если склонно к оптимизму (оценивает себя коэффициентом α = 0,5; 0,6 и т.д. до 1), то следует придерживаться 5-ой стратегии, то есть закупать 5 пирожных.

Выбор критерия

Выбор критерия для принятия решения – это наиболее простой и наиболее ответственный вопрос. Это уже не из области исследователя операций, который занимается анализом проблемы в соответствии с теми критериями, которые ему даны. И всё же – что мы имеем?

На практике используют несколько критериев, а затем анализируют выводы, сделанные по ним.

Первая группа критериев (не учитывает вероятности).

1. Правило максимакса – закупать 5 пирожных, при этом максимальный ожидаемый доход 3 ден. ед.

2. Правило максимина (критерий Вальда) – закупать 1 пирожное, минимальный ожидаемый доход 0,6 ден. ед.

3. Правило минимакса (критерий Сэвиджа) – закупать 3 или 4 пирожных, при этом минимальные потери могут быть 1,2 ден. ед.

Вторая группа критериев.

1. Правило максимальной вероятности – закупать 4 пирожных в день. Ожидаемый доход 2,4 ден. ед.

2. Критерий принятия решений в условиях риска – закупать 3 или 4 пирожных. Максимальный ожидаемый доход 1,4 ден. ед.

3. Критерий Лапласа – закупать 3 или 4 пирожных. Максимальный ожидаемый доход 1,2 ден. ед.

4. Правило минимизации ожидаемых возможных потерь – закупать 3 или 4 пирожных, при этом минимальные возможные потери составят 0,46 ден. ед.

5. Критерий Гурвица. При $\alpha < 0{,}4$ закупать 1 пирожное, при $\alpha > 0{,}5$ закупать 5 пирожных.

Если рекомендации, вытекающие из различных критериев совпадают, то можно смело выбирать рекомендуемое решение: оно скорее всего «не подведёт». В приведённом примере чаще встречается политика закупать 3 или 4 пирожных.

Резюме: Выбор критерия в условиях неопределенности всегда условен, субъективен, зависит от характера, намерений лица, принимающего решения.

СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Первые системы, использующие сетевые графики, были созданы в США в конце 50-х годов прошлого столетия. Это CPM – метод критического пути, использовалась при управлении строительными работами. Вторая PERT – метод оценки и обзора программ, впервые применялась при разработке системы «Полярис» (ракета). В СССР первое применение в начале 60-х годов в строительстве, научных разработках и других областях.

Сетевое планирование и управление (СПУ) основано на моделировании процесса с помощью сетевого графика и представляет совокупность расчётных методов, организационных и контрольных мероприятий по планированию и управлении комплексом работ.

Система СПУ позволяет:

- формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;
- выявлять и мобилизовать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;
- осуществлять управление с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;
- повышать эффективность управления в целом.

Понятие о сетевом графике

Определение 1. Сетевым графиком называют графическое представление технологической последовательности ведения работ.

Определение 2. Сетевым графиком называют ориентированную транспортную сеть с одним входом (вершина, которая не имеет входящих дуг) и одним выходом (вершина, которая не имеет выходящих дуг).

Дуги сетевого графика интерпретируют работы. Вершины графика, соединённые дугами, называют событиями. Одна и та же вершина-событие может служить началом одних и концом других работ. Событие выражает факт окончания всех работ, входящих в него.

Если речь идёт о планировании во времени, то основным параметром является продолжительность выполнения операций, если планирование по ресурсам, то основной характеристикой является интенсивность потребления ресурса в единицу времени.

Работы сетевого графика могут быть действительными, имеющими продолжительность, они изображаются сплошной линией со стрелкой на конце, а также фиктивными. Фиктивные работы имеют нулевую продолжительность и служат для указания порядка следования работ. Изображаются такие работы пунктирной линией со стрелкой на конце.

В большинстве реальных проектов точное значение продолжительности работ t_{ij} неизвестно, но на основании опыта (экспертных оценок) могут быть предложены нижняя (оптимистическая) оценка a_{ij}, определяющая продолжительность работы в идеальных условиях и верхняя (пессимистическая) оценка b_{ij}, определяющая максимальную оценку продолжительности с учетом всех возможных срывов. При наличии некоторого опыта может быть определено наиболее вероятное время выполнения работы m_{ij}. Планируемую продолжительность работы определяют по одной из формул:

$$t_{ij} = \frac{3a_{ij} + 2b_{ij}}{5} \quad или \quad t_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

Информация о некотором проекте может быть задана следующей таблицей (здесь в колонке Работа обычно идёт текст – название работы):

Таблица 1

Работа	Последующие работы	Продолжительность, t_{ij}
1	2, 3	2
2	8	3
3	6, 7	4
4	6, 7	5
5	9	8
6	8	6
7	-	4
8	-	2
9	-	7

Данные таблицы можно представить графически.

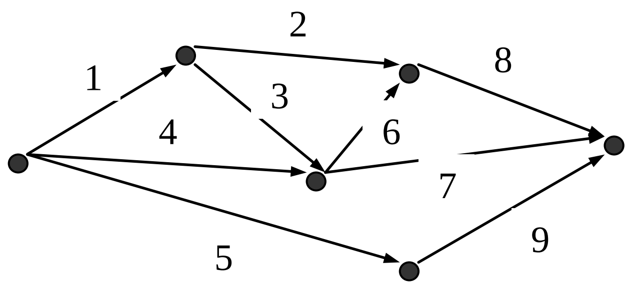


Рис. 1

Возле работ-стрелок проставлены номера работ. Событие, не имеющее предшествующих работ (но является фактом начала работ 1, 4, 5), является началом проекта или входом сети. Событие, состоящее в окончании работ 7, 8, 9 – является концом проекта или выходом сети.

Для обработки сетевого графика нумеруют события, то есть каждому событию сопоставляют свой порядковый номер.

Определение. Сетевой график называется пронумерованным, если для любой работы (*ij*) номер последующего события больше предыдущего ($i < j$).

При составлении сетевого графика соблюдаются следующие правила:

1) Если из некоторого события *i* выходят несколько работ (*k*), заканчивающихся одним и тем же событием *j*, то, для того, чтобы их различать, вводят дополнительные события (*k-1*), которые соединяют фиктивными работами нулевой продолжительности с *j*-м событием.

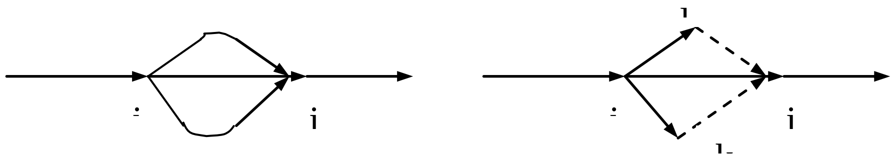


Рис. 2

2) Если при построении получилось несколько событий, не имеющих входящих (выходящих) работ, то для получения одного входа (выхода) необходимо добавить фиктивные работы.

Рис. 3

Мы привели только два правила, остальные подробно и доступно описаны в книгах, где есть раздел, посвящённый сетевому планированию.

После построения сетевого графика приступают к нумерации событий. Правило оптимальной нумерации связано с определением ранга событий.

Начальному событию (входу) сопоставляется ранг 0. Ранг 1 получают события, в которые приводят работы, начинающиеся только в событиях ранга 0. Ранг 2 получают события, в которые приводят работы, начинающиеся только в событиях ранга 0 и 1 и т.д. Последующая нумерация ведется в соответствии с рангами по возрастанию номеров (при одинаковом ранге порядок нумерации произволен). Для небольших сетевых графиков сопоставление рангов и нумерацию можно выполнять методом вычёркивания.

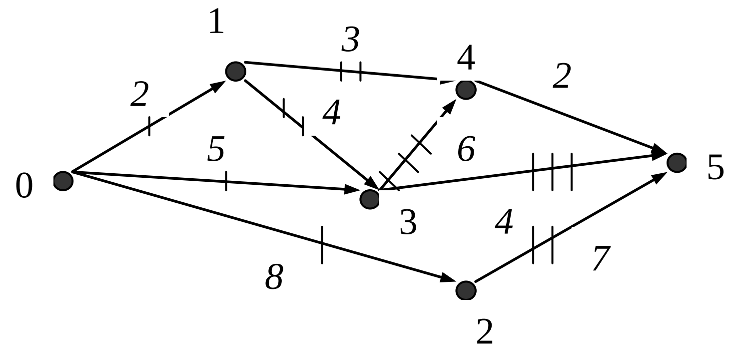


Рис. 4

Для приведённого примера сопоставляем ранг 0 входу сети. Вычёркиваем дуги (одной чёрточкой), выходящие из входа. Находим события, не имеющие входящих дуг. Им соответствует ранг 1, в нашем примере таких событий получилось два, нумеруем их (события с номерами 1 и 2). Вычёркиваем дуги (двумя чёрточками), выходящие из событий ранга 1 (из 1-го и 2-го событий). Вновь находим события, не имеющие входящих дуг. Им сопоставляем ранг 2. У нас только одно такое событие, ему сопоставляем следующий по порядку номер – 3. Вновь вычёркиваем дуги (тремя чёрточками), выходящие из события ранга 2 (из 3-го события). Находим события, не имеющие входящих дуг. Им сопоставляем ранг 3. У нас только одно такое событие, ему сопоставляем следующий по порядку номер – 4. Осталась одна не вычеркнутая дуга, одно событие без номера, оно будет иметь ранг 4 и порядковый номер 5. Возле работ-стрелок проставлены продолжительности выполнения работ.

Обратите внимание на то, что при выполнении нумерации всегда можно определить есть ли в построенном графике контуры. Их не должно быть, так как наличие таковых даёт возможность возврата к повторению ранее выполненных работ.

Параметры сетевого графика

Определение. Путь – любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Определение. Полный путь – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

Определение. Наиболее продолжительный полный путь называется критическим.

Определение. Под длиной пути в сетевом графике понимают суммарную продолжительность составляющих его работ.

При этом счёт времени ведут от наступления начального события, время его наступления полагают равным нулю. Временем наступления любого события j будем считать время окончания всех работ, завершающихся событием j.

Определение. Наиболее раннее время (минимальное) возможного наступления события j ($T^p{}_j$) равно максимальной длине пути из входа в j-е событие.

Оно же, следовательно, является наиболее ранним временем начала всех работ, выходящих из j-го события.

Определение. Критическим временем ($T_{кр}$) выполнения проекта называется время наступления последнего события.

То есть это минимальное время, в пределах которого коллектив исполнителей в состоянии выполнить весь комплекс работ сетевого графика.

Определение. Путь максимальной длины от входа до выхода, равный критическому времени, называется критическим путём ($P_{кр}$).

Пусть для определенности начальное событие имеет номер 0 и конечное номер N . Обозначим через L_j длину максимального пути от события 0 до события j.

По известному принципу оптимальности Р. Беллмана

$$L_j = \max_{(i\,j)}\{\, t_{ij} + L_i \,\},\ \ j > 0;\ \ L_0 = 0$$

Величина L_j соответствует наиболее раннему времени T_j^p наступления j-го события, то есть самому раннему сроку завершения всех работ, предшествующих этому событию. Значение L_N соответствует критическому времени выполнения проекта $T_{кр}$.

Обозначим через M_j длину пути наибольшей протяженности от события j до события N . Тогда по тому же принципу

$$M_j = \max_{(jk)}\{ t_{jk} + M_k \},\ j < N;\ \ M_N = 0$$

Величина $T_j^п = T_{кр} - M_j$ соответствует наиболее позднему допустимому времени наступления j-го события, то есть самому позднему сроку начала всех работ, последующих за этим событием. Совершенно очевидно, что для событий, лежащих на критическом пути, самое раннее и самое позднее времена их наступления будут совпадать.

Теорема. Для того, чтобы событие j принадлежало критическому пути, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $T_j^р = T_j^п$.

Рассмотрим сетевой график (рис. 2). Определим для него основные параметры событий. Все найденные значения удобно свести в таблицу.

Таблица 2

j	$T_j^р$	i	M_j	k	$T_j^п$	r_j
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
0	0	-	15	2	0	0
1	2	0	12	3	3	1
2	8	0	7	5	8	0
3	6	1	8	4	7	1
4	12	3	2	5	13	1
5	15	2	0	-	15	0

Здесь рассчитываем значения $T_j^р$ в порядке роста номеров, то есть $T_0^р = 0$; $T_1^р = 2\ (i = 0)$; $T_2^р = 8\ (i = 0)$; $T_3^р = \max [5 + T_0^р, 4 + T_1^р] = \max [5 + 0, 4 + 2] = 6\ (i = 1)$ и т. д.

Затем рассчитываем значения M_j в порядке убывания номеров, то есть начинаем с M_5. $M_5 = 0$; $M_4 = 2\ (k = 5)$; $M_3 = \max [6 + M_4, 4 + M_5] = \max [6 + 2, 4 + 0] = 8\ (k = 4)$; $M_2 = 7\ (k = 5)$; $M_1 = \max [4 + M_3, 3 + M_4] = \max [4 + 8, 3 + 2] = 12\ (k = 3)$; $M_0 = \max [2 + M_1, 8 + M_2, 5 + M_3] = \max [2 + 12, 8 + 7, 5 + 8] = \max [14, 15, 13] = 15\ (k = 2)$.

Резерв времени событий находим по формуле: $r_j = T_j^п - T_j^р$.

В итоге имеем информацию о наиболее ранних и наиболее поздних моментах наступления событий и индексы предшествующих и последующих событий в самых длинных путях, проходящих через данное событие.

По информации из колонок 3 и 5 можно выявить критический путь с длиной 15: $P = \{0, 2, 5\}$. Причём запись пути по индексу i ведём от события 0 до события 5, по индексу k – от события 5 до события 0. Найденный критический путь выделяют на сетевом графике.

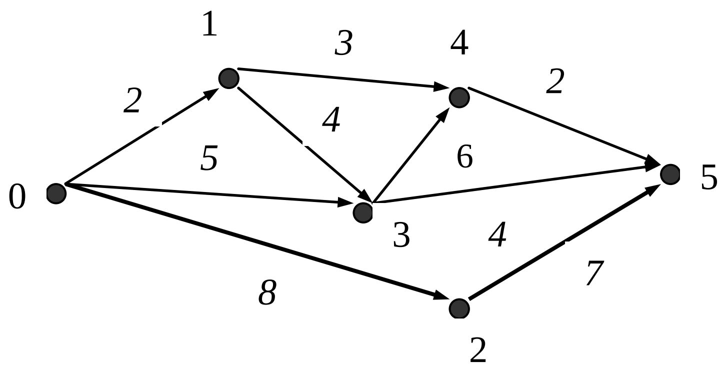


Рис. 5

Очевидно, что работы, не лежащие на критических путях, обладают резервами времени – их выполнение при некоторых условиях может быть задержано на какое-то время. На практике чаще используют следующие резервы времени:

1. Полный резерв $r_{ij} = T_j^n - T_i^p - t_{ij}$
2. Свободный резерв $r_{ij} = T_j^p - T_i^p - t_{ij}$,
3. Независимый резерв $r_{ij} = max\ [T_j^p - T_i^n - t_{ij}, 0]$.

Так полный резерв работы можно понимать как время, на которое можно замедлить выполнение работы, если предшествующие работы завершатся к самому раннему сроку, но комплекс последующих работ будет выполняться в кратчайший возможный срок. Независимый резерв предполагает завершение предшествующих работ к самому позднему, но начало последующих в самый ранний срок.

Результаты обработки приведенного сетевого графика можно представить следующей таблицей:

Таблица 3

Работа	Продолжительность	Раннее время		Позднее время		Резервы времени		
		начала	конца	начала	конца	полн.	своб.	незав.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0-1	2	0	2	1	3	1	0	0
0-2	8	0	8	0	8	0	0	0
0-3	5	0	5	2	7	2	1	1
1-3	4	2	6	3	7	1	0	0

1-4	3	2	5	10	13	8	7	6
2-5	7	8	15	8	15	0	0	0
3-4	6	6	12	7	13	1	0	0
3-5	4	6	10	11	15	5	5	4
4-5	2	12	14	13	15	1	1	0

Полученные данные позволяют выделить так называемые подкритические работы, то есть работы, лежащие на путях, отличающихся по длине от критического не более чем на заданную величину. Так как полный резерв времени работы равен разности между критическим временем проекта и максимальной длиной пути, проходящего через данную работу, то его можно считать основной характеристикой критичности работы.

Для нашего графика на уровне критичности 1 подкритическими будут работы *0-1, 1-3, 3-4, 4-5*. Чтобы убедиться в этом, возьмем работу *3-4* и найдем путь максимальной длины, проходящий через нее, по индексам предшествующих и последующих событий. Так событию *3* в пути максимальной длины предшествует событие *1*, а ему событие *0*. Событию *4* в таком пути последует событие *5*. Длина пути *{0, 1, 3, 4, 5}* равна 14 и задержка на 1 при выполнении работ 3-4 или 4-5 сделает его критическим.

Однако полный резерв не полностью характеризует уровень критичности работ. Возьмем для примера два графика (рис. 6).

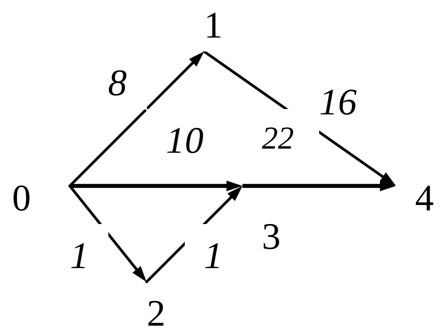


Рис. 6

В первом графике все некритические работы имеют одинаковый полный резерв, равный 8. Однако, напряженность работ пути *{0, 1, 4}* составляет 24 единицы времени на интервале 32, тогда как напряженность работ пути *{0, 2, 3}* составляет 2 единицы на 10.Работы второго пути можно выполнять более спокойно, чем первого (отдыхаем 8 дней из 10 и 8 дней из 32 соответственно).

Во втором графике работы 0-2 и 2-3 имеют резерв 3, а работы 0-1 и 1-4 – резерв 8, но напряженность у них одинакова.

Поэтому одним из параметров сетевого графика, характеризующим напряжённость выполнения работы является коэффициент напряжённости (k_{ij}). Для нахождения этого коэффициента отыскивается путь максимальной длины, проходящий через данную работу, при этом используются индексы предшествующих и последующих событий, которые мы находили при поиске T_j^p и T_j^n. На этом пути ищутся ближайшие слева и справа события, принадлежащие критическому пути, и определяется отношение длины пути между этими событиям, проходящего через данную работу, к длине соответствующего отрезка критического пути.

Определение. Коэффициентом напряжённости называют максимальное среди отношений длин несовпадающих отрезков пути максимальной длины и критического, заключённых между одними и теми же событиями, принадлежащими обоим путям.

Так для рассмотренного выше сетевого графика (рис.5) выберем некритическую работу 3-4. Мы определили, что через неё проходит путь максимальной длины *{0, 1, 3, 4, 5}*. Ближайшими соседями на критическом пути *{0, 2, 5}* будут события 0 и 5. Отсюда находим коэффициент напряженности

$$k_{34} = \frac{t_{01} + t_{13} + t_{34} + t_{45}}{t_{02} + t_{25}} = \frac{2+4+6+2}{8+7} = \frac{14}{15}$$

Аналогично получаем, например

$$k_{35} = \frac{t_{01} + t_{13} + t_{35}}{t_{02} + t_{25}} = \frac{2+4+4}{8+7} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$k_{03} = \frac{t_{03} + t_{34} + t_{45}}{t_{02} + t_{25}} = \frac{5+6+2}{8+7} = \frac{13}{15}$$

Для критических работ $k_{ij} = 1$. Для подкритических близок к единице. Более напряжённой из двух работ будет та, у которой коэффициент напряжённости больше.

Линейная диаграмма проекта

Для небольших проектов с целью большей наглядности выполнения работ во времени (иногда для обработки) после составления пронумерованного сетевого графика строят линейную диаграмму (рис. 7).

При её построении отрезок *i-j* откладываем так, чтобы его начало лежало на одной вертикали с самым правым концом отрезков-работ, заканчивающихся в вершине *i*, что соответствует T_i^p. Самый правый конец всех отрезков соответствует $T_{кр}$.

Если сдвинуть отрезки-работы вправо так, чтобы отрезки *i-j* заканчивались самым левым концом отрезков с начальным индексом *j*, то эти самые левые концы будут соответствовать T_j^n. Величина этого сдвига определяет полный резерв времени работы *i-j*.

Если сдвигать отрезок *i-j* вправо без сдвига отрезков с начальным индексом *j*, то величина такого сдвига определяет свободный резерв времени работы *i-j*.

Существенным достоинством линейной диаграммы является возможность оценить загрузку исполнителей во времени. Так для *t* в интервале от 2 до 5 выполняется наибольшее количество работ (четыре). Если воспользоваться резервами времени и работу 3-5 начать выполнять не в ранний срок, а отодвинуть на 5, то можно обойтись тремя исполнителями (непосредственно из сетевого графика это трудно увидеть).

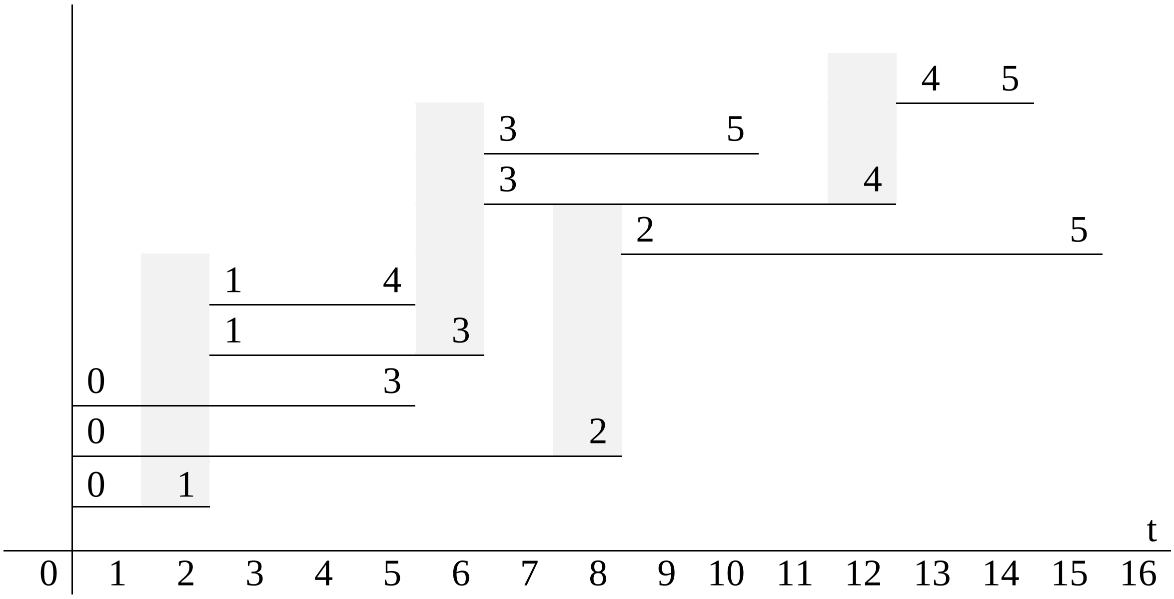


Рис. 7

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В самых различных областях деятельности приходится иметь дело с необходимостью поэтапного принятия решений для достижения некоторой конечной цели. Элементарными примерами такого рода процессов могут служить не только любые игры с целью достижения максимального выигрыша, но и управление сложными системами. Например, управление космическим кораблем путем поэтапной корректуры режимов с целью поддержания заданного удаления от Земли, а также все виды хозяйственной деятельности и т. п. В экономических задачах, задачах организации и управления производством приходится рассматривать распределение производственных заданий, ресурсов, финансов на каждом этапе деятельности. При этом этапом планирования является временной отрезок: год, день и т. п.

Если для одношаговых процессов принимаемые решения, как правило, относительно просты, то в многошаговых процессах структура решения несравнимо сложнее. Это означает, что отыскание оптимальной программы расчленяется на последовательность поисков оптимальных решений на отдельных этапах.

Многоэтапным управляемым процессам присущи общие черты:

1. процесс может быть разбит на составляющие элементы, которые в динамическом программировании называются шагами или этапами. Производственные процессы расчленяются по стадиям в соответствии с их технологическими особенностями, ресурсы могут быть распределены по потребителям и т. д.;
2. каждый этап или шаг характеризуется состоянием, оно определяется значениями факторов или переменных;
3. на каждом этапе существует зависимость между переменными и функцией цели. Эта зависимость может выражаться уравнением, системой уравнений, или может быть задана табличным способом;
4. для каждого этапа определяются такие значения переменных, которые обеспечивают экстремум заданной функции цели всего процесса в целом;
5. значение функции цели всего управляемого процесса должно складываться из элементарных значений этой функции, то есть функция должна быть аддитивной.

Для иллюстрации математических проблем, возникающих при исследовании многошаговых процессов принятия решений, рассмотрим следующую идеализированную задачу.

Многошаговый процесс распределения однородного ресурса

Пусть имеется X денежных единиц, часть которых Y используется для закупки оборудования типа A, а оставшаяся часть $(X - Y)$ для закупки оборудования B. В течение периода эксплуатации закупленное оборудование дает доход, определяемый значениями некоторых функций $g(Y)$ и $h(X - Y)$ соответственно, который используется для удовлетворения каких-либо потребностей. По истечении периода оборудование может быть реализовано за $\alpha Y + \beta(X - Y)$ денежных единиц, которые в очередном периоде используются для закупки оборудования указанных типов. Требуется найти политику распределения денежных ресурсов, которая обеспечивала бы получение максимального дохода за N периодов.

При $N = 1$ доход зависит от начального ресурса X, выбора Y и равен

$$R_1(X, Y) = g(Y) + h(X - Y),$$

где Y выбирается в интервале от 0 до X.

Очевидно, что максимальный доход в одношаговом процессе при начальном денежном ресурсе X равен

$$F_1(X) = \max_{0 \le Y \le X} [g(Y) + h(X - Y)]$$

При $N = 2$ суммарный доход зависит от начального ресурса X, выборов в первом и втором периодах Y и Y_1:

$$R_2(X, Y, Y_1) = [g(Y) + h(X - Y)] + [g(Y_1) + h(X_1 - Y_1)],$$

где $X_1 = \alpha Y + \beta(X - Y); \quad 0 \le Y \le X; \quad 0 \le Y_1 \le X_1.$

Аналогично при любом $N > 1$ доход за N периодов складывается из дохода в первом периоде и суммарного дохода в последующих N-1 периодах

$$R_N(X, Y, Y_1, Y_2, ...) = g(Y) + h(X - Y) + \sum_{k=1}^{N-1} [g(Y_k) + h(X_k - Y_k)],$$

где $X_1 = \alpha Y + \beta(X - Y); \; X_k = \alpha Y_{k-1} + \beta(X_{k-1} - Y_{k-1}), \; k = 2, 3, ..., N\text{-}1$

$0 \le Y \le X, \quad 0 \le Y_1 \le X_1, \quad 0 \le Y_2 \le X_2, \ldots$

Следовательно, задача поиска максимального дохода в N-шаговом процессе при заданном начальном денежном ресурсе X сводится к максимизации функции N неизвестных $Y, Y_1, Y_2, ...$ при указанных ограничениях, то есть, к задаче математического программирования.

Если функции $g(X)$ и $h(X - Y)$ линейны, то возникает задача линейного программирования, которую всегда можно решить. Если же они нелинейные, то при решении могут возникнуть некоторые неприятные осложнения.

При $N = 1$ и конкретном значении X можно найти производную максимизируемой функции по Y, приравнять её нулю и попытаться решить полученное уравнение с целью найти так называемые критические точки. Если это удалось сделать, то достаточно вычислить значения функции в критических точках, принадлежащих диапазону от 0 до X, и в двух граничных точках.

Если же это не удалось по каким-то причинам, то можно пойти по пути непосредственных вычислений, то есть выполнить табулирование на заданном количестве точек интервала, или выбрать какую-нибудь менее затратную по времени численную процедуру.

При $N > 1$ попытка использования аппарата производных приводит к решению системы уравнений, что само по себе не так-то просто. Но и при успешном её решении нужен дополнительный анализ для выяснения не находится ли максимум на границе и, если это так, то в какой именно точке границы.

А как быть в случае, когда величина исходного ресурса заранее точно неизвестна и лишь имеется информация о диапазоне возможных его значений? Ведь здесь даже при линейных функциях придется либо решать очень много линейных программ, либо решать достаточно сложную нестандартную параметрическую линейную программу.

Принцип оптимальности и рекуррентные соотношения

Один из путей изучения многошаговых процессов связан с использованием интуитивного принципа оптимальности, сформулированного в 1957 году выдающимся американским математиком Р. Беллманом в книге "Динамическое программирование" и определяющего фундаментальное свойство оптимальной стратегии (политики, поведения).

> *"Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате начального решения"*.

Это рекурсивное определение можно интерпретировать самым примитивным высказыванием: если Вы намерены добиться наилучшего эффекта Вашей многолетней деятельности, то на любом её этапе, независимо от того, в каких состояниях Вы оказывались и какие действия предпринимали, действуйте оптимально, насколько Вам позволяет то состояние, в которое Вы загнали себя предыдущими действиями. Если Вы на любом этапе своей целенаправленной деятельности будете руководствоваться стремлением к достижению некоторой высшей цели, то вся последовательность Ваших действий будет оптимальна.

Принцип оптимальности определяет особенности политики, направленной не на получение сиюминутной выгоды, а на достижение некоторой удаленной цели.

Обратимся к поставленной выше задаче поэтапного распределения ресурса, где оптимальность политики определяется достижением максимума суммарного дохода.

Обозначим через $F_k(X)$ – суммарный доход в k-шаговом процессе при начальном ресурсе X и при использовании оптимальной политики (максимальный суммарный доход в k-шаговом процессе при начальном ресурсе X).

Как было отмечено ранее, доход в $(k+1)$-шаговом процессе равен сумме дохода на первом шаге и дохода на последующих k шагах. Доход в $(k+1)$-шаговом процессе сложится из дохода на первом шаге $g(Y) + h(X - Y)$ и максимального дохода на последующих k шагах, которые начнутся уже при денежном ресурсе $\alpha Y + \beta(X - Y)$, то есть, $F_k(\alpha Y + \beta(X - Y))$.

Если подобрать величину Y (выбор на первом шаге при ресурсе X) так, чтобы эта сумма была максимальна, то мы получим максимальный доход в $(k+1)$-шаговом процессе с начальным ресурсом X:

$$F_{k+1}(X) = \max_{0 \le Y \le X}[\mathrm{g}(\mathrm{Y}) + \mathrm{h}(\mathrm{X} - \mathrm{Y}) + \mathrm{F_k}(\alpha \mathrm{Y} + \beta(X - Y))], \kappa = 1, \ldots, \mathrm{N} - 1 \quad (1)$$

Если учесть, что максимальный доход в одношаговом процессе при начальном денежном ресурсе X равен

$$F_1(X) = \max_{0 \le Y \le X}[\mathrm{g}(\mathrm{Y}) + \mathrm{h}(\mathrm{X} - \mathrm{Y})], \quad (2)$$

то напрашивается последовательность решения поставленной задачи: найти функцию $F_1(X)$ и затем на основе *рекуррентных* соотношений (1) найти функции $F_2(X), .., F_N(X)$.

В дополнение к введенному ранее обозначению $F_k(X)$ будем обозначать через $Y_k(X)$ оптимальный выбор на первом шаге k-шагового процесса с начальным ресурсом X.

Структура решения

Как уже было сказано, решение задачи для N-шагового процесса разделения ресурса начинаем поиском функции $F_1(X)$ – максимального дохода в одношаговом процессе при начальном денежном ресурсе X и соответствующих значений Y, обеспечивающих максимум, то есть функции $Y_1(X)$ – оптимального выбора для одношагового процесса с начальным ресурсом X.

Следующий этап решения состоит в поиске функций $F_k(X)$ – максимального дохода в k-шаговом процессе и $Y_k(X)$ – оптимального выбора на первом шаге этого процесса при начальном ресурсе X $(k = 2, 3, ..., N)$.

После поиска указанных функций появляется возможность отыскания оптимальной политики при конкретном начальном ресурсе $X = Z$.

Оптимальный выбор на первом шаге N-шагового процесса при этом ресурсе равен $\bar{y}_1 = Y_N(Z)$. В результате чего к началу второго шага начальный ресурс будет равен $Z_1 = \alpha\bar{y}_1 + \beta(Z - \bar{y}_1)$. Следовательно, оптимальный выбор на втором шаге совпадет с оптимальным выбором на первом шаге оставшегося $(N-1)$-шагового процесса, то есть $\bar{y}_2 = Y_{N-1}(Z_1)$. В результате к началу третьего шага ресурс станет равным $Z_2 = \alpha\bar{y}_2 + \beta(Z_1 - \bar{y}_2)$. Оптимальный выбор на третьем шаге совпадёт с оптимальным выбором на первом шаге оставшегося $(N-2)$-шагового процесса, то есть $Y_{N-2}(Z_2)$ и т. д. Оптимальный выбор на последнем шаге будет определяться значением функции $Y_1(Z_{N-1})$, оптимального выбора для одношагового процесса.

<u>Пример</u>. Пусть функции $g(X)$ и $h(X)$ являются выпуклыми (их вторые производные неотрицательны). При поиске

$$F_1(X) = \max_{0 \le Y \le X}[\,g(Y) + h(X - Y)\,],$$

имеем дело с максимумом суммы выпуклых функций, которая также является выпуклой функцией. Очевидно, что максимум выпуклой функции в некотором интервале достигается на одном из концов интервала и, если допустить, что $g(0) = h(0) = 0$, то $F_1(X) = max\{h(X), g(X)\}$ и $Y_1(X)$ равно 0 или X соответственно.

Так как $F_1(X)$ выпукла, то при поиске

$$F_2(X) = \max_{0 \le Y \le X}[\,g(Y) + h(X - Y) + F_1(\alpha Y + \beta(X - Y))\,]$$

мы вновь сталкиваемся с поиском максимума суммы выпуклых функций

$$F_2(X) = max\{h(X) + F_1(\beta X), g(X) + F_1(\alpha X)\}$$

и оптимальный выбор на первом шаге двухшагового процесса с начальным ресурсом X, то есть $Y_2(X)$, равен 0 или X.

Решим данную задачу при $\alpha = 0,7;\ \beta = 0,4;\ a = 0,5;\ b = 0,8$ и $N=5$.

Найдем прибыль одношагового процесса:

$$f_1(x) = \max_{0\le y\le x}\{0{,}7y + 0{,}4(x-y)\} = \max\begin{Bmatrix}0{,}4x\\ 0{,}7x\end{Bmatrix} = 0{,}7x \text{ при } y_1(x) = x$$

Здесь пришлось выбирать максимум из двух значений функций: при $Y = 0$ и $Y = X$, то есть на границах области определения Y, так как функция, определяющая $f(x)$, линейна по Y (то же и для выпуклых функций).

Прибыль двухшагового процесса будет равна:
$f_2(x) = max\{0,7y + 0,4(x\text{-}y) + f_1(0,5y + 0,8(x\text{-}y))\} = max\{0,7y + 0,4(x\text{-}y) + 0,7(0,5y + 0,8(x\text{-}y))\} = max\{(0,4x + 0,7\cdot 0,8x); (0,7x + 0,7\cdot 0,5x)\} = max(0,96x; 1,05x) = 1,05x$, причём максимум находили при $0 \le y \le x$ и получили при $y_2(x) = x$.

Здесь функция $f_2(x)$ выражена через $f_1(ax + b(x\text{-}y))$. Так как функция $f_1(x)$, найденная в общем виде как $f_1(x) = 0,7x$, то $f_1(ax + b(x\text{-}y)) = 0,7(ay + b(x\text{-}y))$.

Для трехшагового процесса:
$f_3(x) = max\{0,7y + 0,4(x\text{-}y) + f_2(0,5y + 0,8(x\text{-}y))\} = max\{0,7y + 0,4(x\text{-}y) + 1,05(0,5y + 0,8(x\text{-}y))\} = 1,24x$ *при* $y_3(x) = 0$.

Максимум также находили по $0 \le y \le x$.

Аналогично:

$f_4(x) = 1,392x$ при $y_4(x) = 0$.

$f_5(x) =1,5136x$ при $y_5(x) = 0$.

Итак, максимальная прибыль пятишагового процесса равна 1,5136x.

Выясним структуру оптимального распределения по шагам процесса.

В первый год пятишагового процесса $y_1 = y_5(x) = 0$, то есть машины типа *A* вообще не закупать, на всю сумму *X* покупать машины типа *B*. Прибыль первого года составит $b(x - y_1) = 0,4x$. После реализации приобретенных машин типа *B* получаем выручку $b(x - y_1) = 0,8x = x_1$. Следовательно, оставшийся четырехшаговый процесс начинаем с распределения суммы $x_1 = 0,8x$.

Оптимальное поведения на втором шаге пятишагового процесса или что то же самое на первом шаге оставшегося четырехшагового процесса есть: $y_2 = y_4(x_1) = y_4(0,8x) = 0$.

Вновь покупаемые машины типа *B* на всю сумму $0,8x$, (так как $y_2 = 0$), которые дают прибыль второго шага $b(x_1 - y_2) = 0,4(0,8x - 0) = 0,32x$ и выручку от реализации $x_2 = b(x_1 - y_2) = 0,8(0,8x - 0) = 0,64x$, с которой начинаем оставшийся трехшаговый процесс.

Оптимальное проведение третьего шага будет: $y_3 = y_3(x_2) = y_3(0,64x) = 0$, то есть вновь покупать машины только типа B. Прибыль третьего шага $b(x_2 - y_3) = 0,4(0,64x - 0) = 0,256x$, выручка от реализации $x_3 = b(x_2 - y_3) = 0,8(0,64x - 0) = 0,512x$.

Рассуждая аналогично, получаем y_4 и y_5.

$y_4 = y_2(x_3) = y_2(0,512x) = 0,516x$. На четвертом шаге на всю имеющуюся сумму $x_3 = 0,512x$ покупать оборудование только типа A, оборудование типа B не покупать. Прибыль четвертого шага составит $\alpha y_4 = 0,7 \cdot 0,512x = 0,3584x$, выручка от реализации $x_4 = \alpha y_4 = 0,5 \cdot 0,512x = 0,256x$.

$y_5 = y_1(x_4) = y_1(0,256x) = 0,256x$, покупать только машины типа A. Прибыль пятого шага составит $\alpha y_5 = 0,7 \cdot 0,256x = 0,1792x$. Так как нас интересовала только прибыль за пять лет, то можно получить найденную сумму $f_5(x) = 1,5136x$, просуммировав величины прибылей каждого года:

$0,4x + 0,32x + 0,256x + 0,3584x + 0,1792x = 1,5136x$.

Обратите внимание на то, что мы нашли не значения функций $F_k(X)$, $Y_k(X)$, а сами функции, что позволит нам выяснить оптимальную политику при любом начальном ресурсе Z.

Вычислительный алгоритм динамического программирования (численное решение рекуррентных соотношений)

Рассматривавшиеся ранее пример допускал аналитическое решение за счет выпуклости или линейности исследуемых функций.

В случае функций более сложной природы решение рекуррентных соотношений приходится производить численно. Обратимся к поставленной ранее задаче разделения ресурса X на 2 части.

$$F_k(X) = \max_{0 \le Y \le X} \{g(Y) + h(X - Y) + F_{k-1}(\alpha Y + \beta(X - Y))\}, k = 2,..,N;$$

$$F_1(X) = \max_{0 \le Y \le X} \{ g(Y) + h(X - Y) \}.$$

Очевидно, что поиск $F_{k-1}(X)$ при одном конкретном значении X не дает возможности поиска $F_k(X)$ при том же аргументе. Поэтому выберем сетку M значений X в интервале от нуля до некоторого предельного значения $X = Z$ с некоторым шагом и отыскиваем $F_1(X)$ и $Y_1(X)$ в узлах этой сетки, решая с этой целью M одномерных задач оптимизации.

Приступив к поиску значений $F_2(X)$ и $Y_2(X)$ в тех же узлах, мы сталкиваемся с тем, что при различных Y значения $\alpha Y + \beta(X - Y)$ не совпадают с узлами сетки и приходится прибегнуть к приближенной оценке значений $F_1(\alpha Y + \beta(X - Y))$ путем интерполяции.

Напомним, что если задана таблица значений $R(T)$ на равномерной сетке с шагом h, то для нахождения $R(t)$ при $T_i \le t \le T_{i+1}$ можно прибегнуть к линейной интерполяции

$$R(t)=R(T_i)+(t-T_i)\cdot\frac{R(T_{i+1})-R(T_i)}{h}$$

(можно прибегнуть и к табличной интерполяции более высоких порядков по формулам Ньютона или др.). Аналогично отыскиваются $F_3(X)$, $F_4(X)$ и т. д. В результате получается таблица:

X	$F_1(X)$	$Y_1(X)$	$F_2(X)$	$Y_2(X)$	$F_3(X)$	$Y_3(X)$	...	$F_N(X)$	$Y_N(X)$
0	$F_1(0)$	$Y_1(0)$	$F_2(0)$	$Y_2(0)$	$F_3 0)$	$Y_3(0)$	...	$F_N(0)$	$Y_N(0)$
h	$F_1(h)$	$Y_1(h)$	$F_2(h)$	$Y_2(h)$	$F_3(h)$	$Y_3(h)$	...	$F_N(h)$	$Y_N(h)$
2h	$F_1(2h)$	$Y_1(2h)$	$F_2(2h)$	$Y_2(2h)$	$F_3(2h)$	$Y_3(2h)$	...	$F_N(2h)$	$Y_N(2h)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Z	$F_1(Z)$	$Y_1(Z)$	$F_2(Z)$	$Y_2(Z)$	$F_3(Z)$	$Y_3(Z)$	...	$F_N(Z)$	$Y_N(Z)$

Для поиска решения при $X = C$ в пределах сетки достаточно выполнить второй этап вычислений:

оптимальный выбор на первом шаге N-шагового процесса $\bar{y}_1 = Y_N(C)$,

оптимальный выбор на втором шаге $\bar{y}_2 = Y_{N-1}(C_1)$, где $C_1 = \alpha\bar{y}_1 + \beta(C - \bar{y}_1)$,

оптимальный выбор на третьем шаге $\bar{y}_3 = Y_{N-2}(C_2)$, где $C_2 = \alpha\bar{y}_2 + \beta(C_1 - \bar{y}_2)$.

Для иллюстрации вычислительного алгоритма динамического программирования рассмотрим классическую задачу о загрузке корабля, которую иногда называют задачей о рюкзаке или задачей линейного раскроя.

Пусть имеется корабль грузоподъемности W, который может быть загружен предметами N типов. Если обозначить через W_k и C_k вес и ценность предмета k-го типа и через X_k количество таких предметов, то можно поставить задачу загрузки корабля грузом максимальной ценности в виде:

$$\text{максимизировать } \sum_{k=1}^{N} C_k\ X_k$$

$$\text{при условиях } \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} W_k\ X_k\ \le W\ , \\ X_k \ge 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ .\ N \end{cases}$$

Если предметы неделимы (X_k - целое), то возникает задача целочисленного линейного программирования, которую можно решать методом ветвей и границ или методом Гомори, получая решение для конкретного значения W. Появление дополнительных условий приведет к усложнению процесса решения.

Рассмотрим эту задачу с позиций динамического программирования. Для этого искусственно создадим многошаговый процесс. Под одношаговым процессом будем понимать период, в течение которого загружаем предметы только одного первого типа. Двухшаговый процесс соответствует загрузке предметов первых двух типов, причём на первом шаге двухшагового процесса будем загружать предметы второго типа, второй шаг двухшагового процесса можно рассматривать как оставшийся одношаговый процесс, в котором рассматриваются варианты загрузки предметов первого типа. Аналогично, если рассматривать k-шаговый процесс, то, на его первом шаге загружаются предметы k -го типа, на втором (k -1)-го, затем (k -2)-го и на последнем – первого типа). Тогда, обозначим через $F_N(W)$ максимальную суммарную стоимость N-шагового процесса при начальном ресурсе W и при использовании оптимальной политики (максимальную суммарную стоимость загруженных предметов N-типов в корабль грузоподъемности W). На основе принципа оптимальности запишем математическую модель в виде системы рекуррентных соотношений

$$F_1(W) = max\ \{C_1X\},$$

$$F_N(W) = max\ \{C_NX + F_{N-1}(W – W_NX)\},\ \text{для } N \ge 2;$$

где область максимизации определяется целыми значениями X в диапазоне от нуля до целой части отношения $W\ /\ W_N$.

При решении системы будем запоминать $X_k(W)$ оптимальное количество предметов, загружаемое на первом шаге k-шагового процесса при начальной грузоподъемности W.

Пример. Пусть $N = 3,\ C_1 = 2,\ C_2 = 4,\ C_3 = 5,$
$W = 12,\ W_1 = 2,\ W_2 = 3,\ W_3 = 4.$

Возьмем сетку значений W от 0 до 12. Очевидно, что $F_1(W)$ равно C_1, умноженному на максимально возможное X, равное целой части отношения W к W_1.

При поиске $F_2(W)$ приходится перебирать значения X в диапазоне от 0 до целой части отношения W к W_2 и выбирать среди соответствующих значений максимизируемой функции максимальное.

Например, при $W = 12$ перебираем X**,** равные 0, 1, 2, 3, 4 и

$$F_2(12) = max\ [0 + F_1(12), 4 + F_1(9), 8 + F_1(6), 12 + F_1(3), 16 + F_1(0)] =$$
$$= max\ [12, 12, 14, 16] = 16; \quad \text{при } X_2(12) = 4.$$

Аналогично отыскиваем значения $F_3(W)$ и $X_3(W)$. Все найденные значения сведём в таблицу.

X	$F_1(W)$	$X_1(W)$	$F_2(W)$	$X_2(W)$	$F_3(W)$	$X_3(W)$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	2	1	2	0	2	0
3	2	1	4	1	4	0
4	4	2	4	0; 1	5	1
5	4	2	6	1	6	0
6	6	3	8	2	8	0
7	6	3	8	1; 2	9	1
8	8	4	10	2	10	0; 2
9	8	4	12	3	12	0
10	10	5	12	2; 3	13	1
11	10	5	14	3	14	0; 2
12	12	6	16	4	16	0

На этом первый этап вычислений закончен. Второй этап вычислений заключается в просмотре сводной таблицы с целью нахождения оптимальных значений неизвестных величин.

Так при $W = 12$ оптимальное количество предметов третьего типа (загружаемых на первом шаге 3-шагового процесса) равно $X_3(12) = 0$. То есть, предметы третьего типа не загружать. Оптимальное количество предметов второго типа (загружаемых на первом шаге оставшегося 2-шагового процесса) равно $X_2(1 - 4\times0) = X_2(12) = 4$. Загружать 4 предмета второго типа, они дают стоимость, равную $4\times4 = 16$. Оптимальное количество предметов первого типа (загружаемых на последнем шаге 3-шагового процесса или в оставшемся одношаговом процессе) равно $X_1(12 - 3\times4) = X_1(0) = 0$.

Полученная таблица позволяет найти оптимальную политику загрузки при любом W, не превышающем 12. Так при $W = 8$ получаем две оптимальных политики. Рассмотрим первую. Оптимальное количество предметов третьего типа (загружаемых на первом шаге 3-шагового процесса) равно $X_3(8) = 0$. Оптимальное количество предметов второго типа (загружаемых на первом шаге оставшегося 2-шагового процесса) равно $X_2(8 - 3\times0) = X_2(8) = 2$. Оптимальное количество предметов первого типа (загружаемых на последнем шаге 3-шагового процесса) равно $X_1(8 - 3\times2) = X_1(2) = 1$. Стоимость загруженных предметов равна $F_3(8) = 10$. Эту же стоимость мы должны получить, если просуммируем стоимость предметов, загруженных в соответствии с оптимальной политикой. Стоимость предметов третьего типа равна 0 (так как не загружаем), стоимость предметов второго типа равна $4\times2 = 8$, первого – $2\times1 = 2$. Их сумма 8 + 2 = 10. Вторая оптимальная политика: $X_3(8) = 2; X_2(8 - 4\times2) = X_2(0) = 0; X_1(0 - 3\times0) = X_1(0) = 0$. Получаем такую же суммарную стоимость: $2\times0 + 4\times0 + 5\times2 = 10$

Приведенный пример еще раз показывает, что решение методом динамического программирования обеспечивает получение политики при любом значении W, тогда как другие подходы к решению дают лишь частное решение.

Обратите внимание и на тот факт, что при появлении дополнительных ограничений (число предметов такого-то типа не менее или не более указанного значения) решение упрощается за счет уменьшения объема перебора (решение методами целочисленного программирования стало бы более трудоёмким).

Аналогично решаются задачи раскроя, распределения некоторой суммы между филиалами, вложения средств в несколько видов деятельности, управления запасами, планирования и др.

Из приведенного выше материала можно сделать вывод об основном достоинстве метода динамического программирования, в основе которого лежит принцип оптимальности, позволяющий строить математическую модель в виде системы рекуррентных соотношений. Метод динамического программирования позволяет свести N-мерную задачу оптимизации к совокупности задач меньшей размерности (очевидно, что легче решить 20 одномерных задач оптимизации, чем одну 20-мерную). Также следует отметить, что метод ориентирован на решение не конкретной задачи, а целого класса подобных задач. Ещё одно достоинство наглядно видно при реализации вычислительного алгоритма динамического программирования – появление дополнительных ограничений облегчает решение задачи за счет уменьшения объема перебора вариантов.

ТЕМЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Построение регрессионной модели. Оценка её качества.
2. Теория игр. Построение матрицы игры.
3. Методы решения игр с нулевой суммой. Решение графическим методом. Решение с помощью постановки задач линейного программирования.
4. Игры с природой. Нахождение оптимальной политики с помощью критериев (правил).
5. Построение и обработка сетевого графика.
6. Решение задач динамического программирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М., Высшая школа, 1986.
2. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. – М:. ИИЛ, 1960.
4. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3 кн. М., 1973.
5. Воронин В.Г., Денискин В.В. Экономико-математические методы планирования на предприятиях пищевой промышленности. М.: Лёгкая и пищевая промышленность, 1981.
6. Дегтярёв Ю.И. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1986.
7. Зуховицкий С.И., Радчик А.И. Математические методы сетевого планирования. М.: Наука, 1965.
8. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций. Минск: Вышэйшая школа, 1982.
9. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования. М.: Прогресс, 1968.
10. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. М.: Радио и связь, 1984.
11. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М., Высшая школа, 1980.
12. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2 кн. М., Мир, 1985.
13. Тихомиров Н.П., Дорохина Е.Ю. Эконометрика. М.: Изд. "Экзамен", 2003.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Методические указания

Номер своего варианта следует выбирать по правилу: № варианта = 1 + остаток от деления двух последних цифр шифра студента на 20. Например: шифр заканчивается цифрами 93. Остаток от деления 93 на 20 равен 13, тогда № вар. = 1 + 13 = 14.

В контрольной работе должен быть представлен № варианта, текст задания, кратко описан порядок выполнения работы (со ссылками на № таблиц, № страниц).

Необходимо представить таблицу с итоговыми расчетами в режиме чисел, в режиме формул с указанием заголовков строк и столбцов.

Решения задач надо излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия.

Задания к контрольной работе

ЗАДАНИЕ № 1

1. Рассчитайте параметры линейной регрессии с помощью стандартной функции Excel ЛИНЕЙН(). Поясните смысл найденных параметров.
2. Рассчитайте параметры нелинейной регрессии с помощью стандартной функции Excel ЛГРФПРИБЛ(). Проанализируйте результат.
3. Выведите параметры линейной, логарифмической, степенной, полиномиальной (2, 4, 6 степень) регрессии используя стандартную возможность Excel построение линии тренда. Выберите из всех наилучшую модель для ваших данных.
4. Рассчитайте по ней прогнозируемое значение функции соответствующее среднему значения параметра x. Найдите ошибку прогноза. Сделайте выводы.

1.

Области	Среднемесячная заработная плата, тыс. руб.	Доля денежных доходов, направленных на покупку валюты, в общей сумме среднедушевого денежного дохода, %
Брянская	289	6,9
Владимирская	334	8,7
Ивановская	300	6,4
Калужская	343	8,4

Костромская	356	6,1
Орловская	289	9,4
Рязанская	341	11,0
Смоленская	327	6,4
Тверская	357	9,3
Тульская	352	8,2

2.

Области	Средний прожиточный минимум на одного пенсионера в месяц, тыс. руб.	Средний размер назначенных ежемесячных пенсий, тыс. руб.
Брянская	178	240
Владимирская	202	226
Ивановская	197	221
Калужская	201	226
Костромская	189	220
Московская	215	237
Орловская	166	232
Рязанская	199	215
Смоленская	180	220
Тульская	302	250

3.

Области	Средний прожиточный минимум на душу населения, тыс. руб.	Средняя заработная плата и выплаты социального характера, тыс. руб.
Брянская	289	615
Владимирская	338	727
Ивановская	287	584
Калужская	324	753
Костромская	307	707
Орловская	304	657
Рязанская	307	654
Смоленская	290	693
Тверская	314	704
Тульская	304	780

4.

Район	Средняя заработная плата и выплаты социального характера, тыс. руб.	Потребительские расходы в расчете на душу населения, тыс. руб.
Респ. Марий Эл	554	302
Респ. Мордовия	560	360
Чувашская Респ.	545	310
Кировская обл.	672	415
Нижегородская обл.	796	452
Белгородская обл.	777	502
Воронежская обл.	632	355
Курская обл.	416	688
Липецкая обл.	501	833
Тамбовская обл.	403	577

5.

Район	Денежные доходы на душу населения, тыс. руб.	Потребительские расходы на душу населения, тыс. руб.
Респ. Карелия	913	596
Респ. Коми	1095	417
Архангельская обл.	606	354
Вологодская обл.	876	526
Мурманская обл.	1314	934
Ленинградская обл.	593	412
Новгородская обл.	754	525
Псковская обл.	528	367
Брянская обл.	520	364
Владимирская обл.	539	336

6.

Район	Денежные доходы на душу населения, тыс. руб.	Потребительские расходы на душу населения, тыс. руб.
Респ. Бурятия	524	408
Респ. Тува	371	249

Респ. Хакасия	453	253
Красноярский край	1006	580
Иркутская обл.	997	651
Бурятский авт. округ	217	139
Читинская обл.	486	322
Респ. Саха (Якутия)	1989	899
Еврейская авт. обл.	595	330
Чукотский авт. округ	1550	446

7.

№ п/п	Время разговора с продавцом, мин	Сумма покупки, у.е.
1	14	40
2	14	60
3	17	80
4	19	100
5	17	120
6	20	130
7	24	250
8	22	160
9	25	150
10	26	200

8.

Район	Средняя заработная плата и выплаты социального характера, тыс. руб.	Потребительские расходы на душу населения, тыс. руб.
Респ. Башкортостан	912	461
Удмуртская Респ.	809	524
Курганская обл.	748	298
Оренбургская обл.	847	351
Пермская обл.	1087	624
Свердловская обл.	1074	584
Респ. Алтай	682	277
Алтайский край	697	321
Кемеровская обл.	1251	573
Новосибирская обл.	967	576

9.

Страна	Индекс человеческой бедности (ИЧБ)	Душевой доход, долл.
Объединенные Арабские Эмираты	14,9	1600
Таиланд	11,7	7100
Уругвай	11,7	6750
Ливия	18,8	6130
Колумбия	10,7	6110
Иордания	10,9	4190
Египет	34,8	3850
Марокко	41,7	3680
Перу	22,8	3650
Шри-Ланка	20,7	3280

10.

№ торгового предприятия	Скорость товарооборота	Уровень рентабельности, %
1	5,49	0,78
2	4,68	0,38
3	4.67	0,21
4	4,54	0,51
5	5,56	0,95
6	6,02	1,05
7	5,72	0,83
8	5,43	0,98
9	6,18	0,66
10	5,11	0,81

11.

№ п/п	Удельный вес продовольственных товаров в товарообороте, %.	Уровень рентабельности торговой деятельности, %
1	74,2	3,62
2	73,5	3,80
3	77,0	2,77
4	84,3	2,12
5	67,3	4,33
6	70,1	4,01

7	83,1	2,01
8	70,5	3,06
9	81,1	2,17
10	76,4	3,99

12.

№ п/п	Возраст рабочих, лет	**Средняя выработка, шт**
1	20	50
2	25	60
3	30	70
4	35	80
5	40	100
6	45	80
7	50	60
8	55	50
9	60	70
10	65	50

13.

№ п/п	Удельный вес рабочих со специальной подготовкой, %	Удельный вес бракованной продукции, %
1	15	18
2	25	12
3	35	10
4	45	8
5	55	6
6	65	5
7	70	4
8	80	3
9	90	2
10	95	1

14.

№ п/п	Стаж работы, лет	Средняя выработка, шт.
1	4	117
2	4	141
3	10	148

4	13	172
5	14	171
6	18	182
7	18	150
8	23	163
9	24	152
10	33	217

15.

№ п/п	Урожайность зерновых культур с 1 га, ц	Себестоимость 1 ц зерна, тыс. руб.
1	9,1	5,42
2	10,2	4,5
3	12,3	3,6
4	14,4	3,1
5	17,4	2,74
6	19,1	2,64
7	19,4	2,43
8	20,8	2,86
9	21,1	2,57
10	22,4	2,42

16.

№ региона	Объём нвестиций	Валовый продукт
1	95,12	308,60
2	102,29	327,56
3	104,04	344,42
4	102,85	352,99
5	112,39	379,82
6	118,77	401,52
7	120,35	411,21
8	90,25	290,45
9	80,68	295,54
10	86,55	305,15

17.

№ торгового предприятия	Среднее число посетителей в день, тыс. чел.	Годовой товарооборот, млн. руб.
1	8,25	0,24

2	10,24	0,31
3	9,31	0,55
4	11,01	0,48
5	8,54	0,78
6	7,51	0,98
7	12,36	0,94
8	10,81	1,21
9	9,98	1,29
10	13,72	1,12
11	12,27	1,12
12	13,92	1,49

18.

№ региона	Среднегодовая численность занятых, тыс. чел.	Валовый продукт, млн. руб.
1	89,1	337,7
2	90,5	354,0
3	91,9	363,3
4	93,0	385,7
5	94,1	405,6
6	95,3	426,3
7	96,1	438,3
8	96,6	462,2
9	97,5	486,7
10	98,2	523,4

19.

№ торгового предприятия	Торговая площадь, тыс. $м^2$	Годовой товарооборот, млн. руб.
1	0,24	19,76
2	0,31	38,09
3	0,55	40,95
4	0,48	41,08
5	0,78	56,29
6	0,98	68,51
7	0,94	75,01
8	1,21	89,05
9	1,29	91,13
10	1,12	91,26
11	1,29	99,84
12	1,49	108,55

20.

Район	Накопление, млн. руб.	Валовый продукт, млн. руб.
Респ. Башкортостан	912	461
Удмуртская Респ.	809	524
Курганская обл.	748	298
Оренбургская обл.	847	351
Пермская обл.	1087	624
Свердловская обл.	1074	584
Респ. Алтай	682	277
Алтайский край	697	321
Кемеровская обл.	1251	573
Новосибирская обл.	967	576

ЗАДАНИЕ № 2

Решить матричную игру, заданную матрицей.

1. $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

2. $P = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4. $P = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

5. $P = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

6. $P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

7. $P = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 & -1 \\ -3 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

8. $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

9. $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

10. $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -10 \end{pmatrix}$

11. $P = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

12. $P = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -11 & 0 \\ -8 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

13. P = $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{vmatrix}$ **14.** P = $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$

15. P = $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **16.** P = $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

17. P = $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **18.** P = $\begin{vmatrix} 6 & -10 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

19. P = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **20.** P = $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ № 3

Построить матрицу игры и решить

Варианты **1-5**

Компания «Российский сыр» – небольшой производитель различных продуктов из сыра на экспорт. Один из продуктов – сырная паста – поставляется в страны ближнего зарубежья. Руководитель должен решить, сколько ящиков сырной пасты следует производить в течение месяца. Вероятности того, что спрос на сырную пасту в течение месяца будет 6, 7, 8 или 9 ящиков заданы. Затраты на производство одного ящика и цена по которой этот ящик может быть продан известны. Если ящик с сырной пастой не продаётся в течение месяца, то она портится и компания не получает дохода. Сколько ящиков следует производить в течение месяца? Что при этом будет иметь компания?

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Затраты	35	45	50	60	70
Цена	85	90	110	100	130
Спрос	Вероятность				
6	0,1	0,2	0,1	0,3	0,4
7	0,3	0,5	0,3	0,2	0,3
8	0,5	0,2	0,2	0,4	0,2
9	0,1	0,1	0,4	0,1	0,1

Варианты **6-10**

Магазин «Молоко» продаёт в розницу молочные продукты. Директор магазина должен определить, сколько бидонов сметаны следует закупать у производителя в течение недели. Вероятности того, что спрос на сметану в течение недели будет 7, 8, 9 или 10 бидонов заданы. Известна цена, по которой обходится покупка одного бидона сметаны магазину, а также цена, по которой сметана продаётся. Если сметана не продаётся в течение недели, то она портится и магазин несёт убытки. Сколько бидонов сметаны желательно приобретать для продажи? Какова ожидаемая стоимостная ценность этого решения?

№ варианта	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Цена покупки	70	60	80	65	85
Цена продажи	110	95	130	110	150
Спрос	Вероятность				
7	0,2	0,3	0,1	0,4	0,2
8	0,2	0,1	0,3	0,2	0,3
9	0,5	0,4	0,4	0,3	0,3
10	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

Варианты **11-15**

Изменение климата в регионе предполагает возможность развития туризма. Есть проекты строительства нескольких туристических комплексов (от 1 до 4) в живописных местах региона. Ожидается, что возможное количество туристов не превысит 1000. Известны вероятности того, что количество туристов составит 250, 500, 750 или 1000. Известны затраты на строительство комплекса, который может принять 250 туристов, а также затраты на поддержание его в рабочем состоянии. Известна стоимость одной путёвки и затраты на обслуживание одного туриста. Требуется решить, сколько комплексов строить? Какая прибыль при этом ожидается?

№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Затраты на строительство	100	120	80	140	90
Эксплуатационные затраты	25	30	15	50	30
Стоимость путёвки	3	4	2	5	4
Затраты на обслуживание	0,5	2	1	3	2,5
Количество туристов	Вероятность				
250	0,2	0,3	0,2	0,4	0,2
500	0,3	0,2	0,1	0,2	0,4
750	0,4	0,3	0,4	0,1	0,2
1000	0,1	0,2	0,3	0,3	0,2

Варианты **16-20**

Предприятие планирует освоить выпуск новой продукции, для чего необходимо закупить станки. Имеющиеся помещения позволяют установить 20, 30, 40 или 50 станков. Известен ежегодный доход от продукции, снимаемой с одного станка в ден. ед., известна оптовая цена одного станка и его эксплуатационные расходы. А также известны затраты на подготовку производства, которые не зависят от числа станков и объёма выпуска. Известна вероятность спроса на продукцию в объёме 10, 20, 30, 40 или 50 единиц. Требуется решить, сколько станков закупать? Какая прибыль при этом ожидается?

№ варианта	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Затраты на подготовку	25,5	20,2	26,4	14,0	30,7
Цена одного станка	4,75	5,56	3,5	2,5	6,3
Эксплуатационные расходы	3,5	4,2	2,9	5,1	4,4
Доход с одного станка	20	23	19	13	22,5
Спрос на продукцию	Вероятность				
10	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3
20	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3
30	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1
40	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
50	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2

ЗАДАНИЕ № 4

Построить сетевой график по предложенному списку работ и заданной технологической последовательности. При необходимости добавить фиктивные работы. Найти основные параметры: ранние и поздние времена наступления событий, критическое время выполнения проекта и критический путь, раннее и позднее время начала и окончания работы, резервы времени работ (полный, свободный и независимый), коэффициент напряжённости.

Все расчёты можно оформить в виде таблиц.

1-4. Установка мачты на фундамент

№	**Содержание работы**	Предш. работы	t_{ij} для вариантов			
			1	**2**	**3**	**4**
1	Заказ фундаментного блока	---	1	1	1	1
2	Изготовление блока	1	14	13	13	15
3	Доставка блока на место	2	1	1	2	2

4	Земляные работы	---	2	2	3	3
5	Устройство опалубки	4	3	3	2	2
6	Бетонирование	5	1	2	2	2
7	Твердение бетона	6	8	8	8	7
8	Установка блока	3,6	2	2	2	3
9	Изготовление мачты	---	10	11	12	15
10	Доставка мачты на место	9	1	1	1	2
11	Установка мачты	8, 10	2	3	4	5

5-8. Реконструкция цеха

№	Содержание работы	Предш. работы	t_{ij} для вариантов			
			5	**6**	**7**	**8**
1	Подготовительные работы	---	5	5	5	4
2	Демонтаж старого оборудования	---	4	4	3	3
3	Ремонтные строительно-монтажные работы	1	28	25	32	25
4	Подгонка фундамента	1, 2	15	17	21	18
5	Подготовка к монтажу оборудования	1	10	12	15	14
6	Электротехнические работы	1	12	13	15	14
7	Монтаж нового оборудования	4, 5	8	7	6	7
8	Подключение оборудования к электроснабжению	6, 7	2	3	4	4
9	Наладка и испытание оборудования	8	6	5	4	5
10	Отделочные работы	3, 6, 7	8	7	9	10
11	Прием цеха в эксплуатацию	9, 10	1	1	1	1

9-12. **РЕКОНСТРУКЦИЯ ТКАЦКОГО ЦЕХА**

№	Содержание работы	Предш. работы	t_{ij} для вариантов			
			9	**10**	**11**	**12**
1	Демонтаж старых станков	---	8	7	8	9
2	Подготовительные работы	---	6	7	6	7
3	Подготовка новых станков к установке	1, 2	7	8	6	7
4	Подготовка фундамента	1, 2	10	12	13	14

5	Электротехнические работы	1, 2	8	8	8	9
6	Установка новых станков	3, 4	18	19	18	20
7	Косметический ремонт цеха	3, 4	20	21	23	22
8	Прокладка кабеля	3, 4, 5	12	13	12	13
9	Подключение станков	6, 8	5	6	5	6
10	Холостая обкатка ткацких станков	7, 9	3	4	4	3
11	Заправка станков	7, 9	6	7	7	6
12	Физико-механические испытания ткани	10	6	7	7	6
13	Технологические испытания	10, 11	4	3	4	4
14	Приёмка цеха после реконструкции	12, 13	2	1	1	2

13-16. Сборка гидромотора ГМ – 16

№	Содержание работы	Предш. работы	t_{ij} для вариантов			
			13	**14**	**15**	**16**
1	Сборка золотника	---	1	2	2	1
2	Сборка шатуна	---	2	1	1	2
3	Сборка вала	---	2	3	1	3
4	Сборка ролика	---	1	1	3	1
5	Сборка предварительная	1, 2, 3, 4	2	4	2	4
6	Сборка привода тахометра	---	5	7	8	5
7	Сборка верхней крышки с уплотнителем	---	2	3	2	2
8	Сборка нижней крышки с уплотнителем	---	3	4	4	3
9	Общая сборка	5, 6, 7, 8	3	5	3	5

17-20. Установка киоска для предпраздничной торговли

№	Содержание работы	Предш. работы	t_{ij} для вариантов			
			17	**18**	**19**	**20**
1	Заказ эскиза на киоск	---	1	1	2	1
2	Заключение договора на охрану	---	2	3	4	3
3	Подбор работников	---	2	4	2	3
4	Заключение договора о материальной ответственности	3	1	2	3	4

5	Подготовка ассортимента товаров	4	1	2	2	1
6	Изготовление эскиза киоска	1	3	2	3	3
7	Утверждение эскиза отделом главного архитектора	6	2	2	3	2
8	Передача эскиза в стройгруппу для изготовления	7	1	1	1	1
9	Изготовление киоска	8	8	6	8	6
10	Перевоз киоска к месту установки	2, 9	1	1	1	1
11	Установление киоска	10	1	2	2	1
12	Получение и завоз товара	5, 11	1	1	1	1

ЗАДАНИЕ № 5

Задача деления ресурса X на две части

Допустим, что мы имеем сумму *X* денежных единиц, которую разделим на две части *Y* и *(X-Y)*, где $0 \le Y \le X$. Затем на часть *Y* покупаем оборудование типа *A* и на часть *(X-Y)* оборудование типа *B*. Эксплуатация оборудования в течение некоторого периода даёт доход *g(Y)* и *h(X-Y)*. По истечении периода оборудование может быть каким-либо образом реализовано за сумму $aY + b(X\text{-}Y)$, где $0 \le a,b \le 1$. Выручка от продажи вновь используется для закупки оборудования и т.д. Этот процесс продолжается в течение N периодов.

Найти оптимальную политику закупки оборудования, при которой суммарная прибыль будет максимальной.

Решить для N = 4, $g(Y) = \alpha Y$, $h(X\text{-}Y) = \beta(X\text{-}Y)$;

(В колонке с именем № указаны номера вариантов)

№	α	β	a	b		№	α	β	a	b
1	0,7	0,4	0,6	0,9		11	0,3	0,5	0,4	0,2
2	0,6	0,5	0,4	0,9		12	0,8	1,1	0,7	0,6
3	0,8	0,7	0,6	0,7		13	0,7	0,9	0,8	0,7
4	0,3	0,8	0,7	0,6		14	0,6	0,4	0,5	0,6
5	0,5	0,6	0,9	0,4		15	1,1	0,9	0,5	0,8
6	0,4	0,5	0,8	0,5		16	1,1	1,4	0,6	0,4
7	1,1	1,1	0,7	0,6		17	0,9	0,8	0,4	0,7
8	0,9	1,1	0,8	0,6		18	0,4	0,5	0,6	0,6
9	1,3	0,8	0,1	0,7		19	0,4	1,1	0,9	0,7
10	0,7	1,2	0,8	0,6		20	0,7	1,2	0,9	0,5

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

1. Предмет «Исследование операций в экономике» и его роль в решении экономических, управленческих и коммерческих задач.
2. Классы задач, решаемые с помощью регрессионного анализа.
3. Этапы регрессионного исследования.
4. Что такое регрессия? Виды регрессий.
5. Суть метода наименьших квадратов (МНК).
6. Линеаризация для нелинейных зависимостей.
7. Характеристики связи случайных величин: коэффициент корреляции, коэффициент детерминации.
8. Остаточная дисперсия.
9. Коэффициент эластичности. Что он показывает?
10. Теория игр. Основные определения.
11. Методы решения игр с нулевой суммой. Графический метод.
12. Решение игры с нулевой суммой с помощью симплексного метода.
13. Принятие решений в условиях неопределенности. Основные критерии.
14. Основные понятия и определения системы сетевого планирования и управления (СПУ). Элементы СПУ.
15. Правила построения сетевых графиков.
16. Параметры сетевых графиков. Ранние и поздние сроки наступления событий, резервы времени событий. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени работ.
17. Понятие критического времени и критического пути.
18. Принцип оптимальности Беллмана. Формулировка задачи распределения ресурса с помощью последовательности рекуррентных соотношений. Многошаговый процесс распределения ресурсов.
19. Сравнительные характеристики метода динамического программирования и метода классической теории оптимизации.
20. Вычислительный алгоритм динамического программирования.
21. Постановка задачи о загрузке корабля. Преимущества и недостатки динамического подхода в сравнении с целочисленной программой.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Галина Степановна Ветрова
Любовь Анатольевна Яковлева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Редактор Л.Г. Барашкова
Художественный редактор Л.П. Токарева

Подписано в печать 25.11.03
Формат 60x84x16. Уч.-изд. л. 4,75. Тираж 800 экз.
Цена 19 р. Заказ №

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности,
650056, г. Кемерово, б. Строителей, 47

Отпечатано в лаборатории множительной техники КемТИППа,
650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52.