

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

И. А. Печерских, А. Г. Семенов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Для студентов вузов

Кемерово 2011

УДК 33:51.001.57 (075.8)

ББК 65:22.1в6я7

П 31

Рецензенты

Черкасов В.С., кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Чуешев А.В., кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Печерских, И.А.

П 31 Математические модели в экономике: учебное пособие / И.А. Печерских, А.Г. Семенов; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2011. – 191 с.

ISBN

Рассмотрено математическое моделирование экономических систем и процессов. Дано описание макроэкономических моделей накопления капитала, потребительского поведения, производственной деятельности предприятия, рыночного равновесия. Рассмотрена линейная балансовая модель многоотраслевой экономической системы.

Дано описание задач оптимизации экономических систем (задач линейного программирования) и методов их решения.

Предназначено для студентов вузов.

УДК 33:51.001.57 (075.8)

ББК 65:22.1в6я7

ISBN

© КемТИПП, 2011

© И.А.Печерских, А.Г.Семенов, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
1. Математическое моделирование экономических процессов ...	8
1.1. Общее понятие о моделировании. Виды моделей.....	8
1.2. Особенности экономико-математического моделирования	12
1.3. Этапы построения экономико-математических моделей	15
1.4. Предварительные сведения об оптимизационных моделях	19
Контрольные вопросы.....	20
2. Прикладные модели оптимизации экономических процессов	22
2.1. Линейное программирование	22
2.1.1. Основные определения и задачи линейного программирования	22
2.1.2. Геометрическая интерпретация и графический метод решения задачи линейного программирования	28
2.1.3. Симплексный метод решения задачи линейного программирования	37
2.2. Теория двойственности в линейном программировании	48
2.2.1. Постановка и правила построения двойственной задачи	48
2.2.2. Основные теоремы двойственности	55
2.3. Информационные технологии EXCEL решения задач линейного программирования.....	59
2.3.1. Решение задач линейного программирования с использованием табличного процессора Excel	59
2.3.2. Анализ оптимального решения на устойчивость в Excel	67
2.4. Транспортная задача	72
2.4.1. Постановка и математическая модель транспортной задачи.....	72
2.4.2. Решение транспортной задачи методом потенциалов.....	75
2.4.3. Транспортная задача с нарушенным балансом.....	85
2.4.4. Решение транспортной задачи средствами табличного процессора Excel.....	89

Контрольные вопросы	92
3. Теоретические модели экономических систем.....	94
3.1. Производственные функции.....	94
3.2. Модель Солоу	100
3.2.1. Основные сведения.....	100
3.2.2. Уравнение накопления капитала.....	101
3.2.3. «Золотое правило» накопления капитала.....	104
3.3. Балансовая модель Леонтьева	111
3.4. Математическое моделирование потребительского поведения	119
3.4.1. Потребительские наборы и их сравнение.....	119
3.4.2. Определение оптимального выбора потребителя в случае набора из двух благ	123
3.4.3. Определение оптимального выбора потребителя в случае произвольного количества благ.....	128
3.4.4. Математическое описание потребительского спроса. Функции спроса	129
3.4.5. Эластичность спроса	131
3.4.6. Компенсация роста цен для одного товара	136
3.4.7. Компенсация роста цен для многооварного потребительского набора	137
3.5. Математическое моделирование производственной деятельности	148
3.5.1. Технологические способы и производственные функции	148
3.5.2. Оптимизация структуры закупок ресурсов.....	153
3.5.3. Математическое описание рынка. Функции предложения.....	157
3.5.4. Оптимизация структуры выпуска продукции в случае совершенной конкуренции	159
3.5.5. Несовершенная конкуренция	164
3.5.6. Оптимизация структуры выпуска продукции в условиях ограниченности ресурсов	165
3.6. Математическое моделирование экономического равновесия.....	170
3.6.1. Равновесие в экономических системах.....	170

3.6.2. Влияние спроса и предложения на рыночное равновесие	172
3.6.3. Виды рыночного равновесия	176
3.6.4. Стихийное достижение равновесия на рынке одного товара. Паутинообразная модель.....	178
3.6.5. Достижение равновесия на рынке одного товара в условиях регулирования цен. Модели «нащупывания»	182
3.6.6. Достижение равновесия на многотоварном рынке	184
3.6.7. Равновесие в системе с ограниченными ресурсами. Задача выпуклого программирования	185
Контрольные вопросы	189
Литература	192

ВВЕДЕНИЕ

В современной экономике широко используются различные математические методы, как для решения практических задач, так и для теоретического моделирования социально-экономических процессов. Математические методы являются составной частью методов любого раздела экономической науки. Использование математического описания экономических систем открывает новые возможности для экономической теории и практики.

Истоки применения математических методов в экономике уходят в XVIII век, когда лейб-медик короля Франции Людовика XV Ф. Кенэ предложил первую количественную модель национальной экономики, которую он назвал "Экономической таблицей". В 1838 г. также во Франции появилась книга А. Курно "Исследование о математических принципах теории богатств". Многие выдвинутые в ней идеи не утратили актуальности до сих пор. Другим выдающимся математиком-экономистом XIX века был Л. Вальрас, предложивший теорию общего конкурентного равновесия.

Бурный подъем пережила математическая экономика в XX веке. Ее развитие шло в двух основных направлениях. С одной стороны, практически все стороны экономической деятельности были подвергнуты теоретическому анализу с помощью математических моделей. Некоторые из этих моделей описываются в данном пособии. С другой – были разработаны надежные и эффективные модели, предназначенные для принятия решений в конкретных экономических ситуациях. Важнейшее место среди таких моделей занимают так называемые задачи математического программирования, предназначенные для определения оптимальных (наиболее выгодных) стратегий экономического поведения. Эти задачи также рассматриваются в пособии.

Применение математических методов в экономическом моделировании невозможно без использования вычислительной техники. В особенности это касается моделирования конкретных систем при выработке оптимальных решений. Причина заключается, прежде всего, в чрезвычайной сложности таких си-

стем, модели которых должны оперировать с десятками, сотнями и даже тысячами отдельных характеристик.

Современный экономист должен хорошо разбираться в экономико-математических методах. Знание общих теоретических моделей экономических систем позволяет лучше понимать причины возникновения тех или иных ситуаций в экономике, осознавать закономерности их развития и правильно прогнозировать отдаленные последствия предпринимаемых шагов. Умение ставить и решать задачи моделирования реальных экономических ситуаций в микроэкономическом масштабе дает ключ к оптимальному планированию деятельности предприятия (фирмы).

В данном учебном пособии дается описание ряда общих теоретических моделей экономических систем, а также линейных моделей математического программирования для решения конкретных проблем в ходе принятия решений на уровне отдельного предприятия.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О МОДЕЛИРОВАНИИ. ВИДЫ МОДЕЛЕЙ

Моделированием называется замена прямого исследования какой-то системы (для краткости будем именовать ее **оригиналом**) исследованием другой системы, называемой **моделью** этого оригинала. При этом поведение модели должно, так или иначе, отражать особенности поведения оригинала. Смысл моделирования чаще всего заключается в том, что модель системы проще оригинала и ее исследование провести легче, а обходится оно дешевле. Иногда (особенно в природе и технике) прямое изучение оригинала по тем или иным причинам просто невозможно и моделирование является единственным способом получить хоть какие-то сведения о нем.

Основные цели моделирования в разных ситуациях:

1. Понимание и объяснение причин определенного поведения оригинала.
2. Предсказание поведения оригинала.
3. Разработка и проектирование технических систем или экономических планов.
4. Автоматизация управления техническими системами и устройствами.
5. Улучшение (**оптимизация**) характеристик той или иной искусственной системы (технической или экономической). Модели, которые строятся с этой целью, называются **оптимизационными**.
6. Обучение (студентов, персонала и т.п.).

С точки зрения характера получаемой модели различают следующие основные виды моделирования:

1. **Вербальное** производится на основе обычного человеческого языка. Вербальная модель – это просто словесное описание оригинала.
2. **Графическое** – модель представляется в виде некоего изображения. Так, географическая карта является графической

моделью земной поверхности; чертеж детали является ее графической моделью; структурная схема административного устройства организации (учреждения, фирмы и др.) является графической моделью этой организации, на основе которой можно, например, изучать и совершенствовать процедуры документооборота или принятия решений.

Вербальные и графические модели широко используются при обучении.

3. **Натурное** моделирование, при котором оригинал заменяется своим физическим подобием (**макетом**). Такие модели также используются в обучении (примером могут служить наглядные пособия в учебных лабораториях; натурными моделями являются также всевозможные тренажеры для обучения шоферов, пилотов, операторов сложных производственных систем и др.). Макетами пользуются и при разработке некоторых технических систем (например, при разработке новых самолетов или автомобилей их макеты сначала обдувают воздухом в аэродинамических трубах для выбора обтекаемой формы корпуса).

4. **Математическое** моделирование, основанное на использовании того или иного математического аппарата. Существует большое количество разновидностей математических моделей, которые в последнее время объединяют общим наименованием – **информационные модели**.

По характеру зависимости от времени математические модели делятся на **статические** модели, характеристики которых не изменяются во времени и **динамические** – с переменными во времени характеристиками.

Экономические процессы всегда развиваются во времени. Статической экономической модель получается, если все ее характеристики отнести к одному и тому же моменту времени.

Динамические модели в экономике, в свою очередь, делятся на **дискретные** и **непрерывные**. В дискретных моделях изменение параметров связано только с отдельными моментами времени. В непрерывных моделях параметры изменяются во времени плавно.

Математическое описание системы-оригинала может быть получено разными способами. При *теоретическом моделирова-*

нии система описывается набором уравнений, которые получаются на базе основных законов природы (при моделировании природных и технических систем), а также здравого смысла, человеческого опыта или более или менее обоснованных логически предположений (гипотез) о процессах, происходящих в системе. Именно такие умозрительные предположения часто используются при теоретическом моделировании экономических и социальных систем.

При *эмпирическом моделировании* формулы и функции, описывающие те или иные стороны поведения системы, получаются путем прямого измерения характеристик системы и обработки полученных экспериментальных данных. В экономических и социальных системах аналогами экспериментальных исследований являются различные статистические обследования.

Важнейшими свойствами моделей являются их **полнота, адекватность и точность**.

Полнота характеризуется тем, какое количество характеристик оригинала отображает модель. Любая модель неполна по сравнению с оригиналом и какие-то характеристики при моделировании "теряются". Однако эти потерянные характеристики могут быть несущественными с точки зрения целей моделирования, а попытка их учесть путем дополнения модели только усложнит ее и затруднит исследование. Уровень полноты модели влияет на ее адекватность.

Для понятия "адекватность" сложно подобрать подходящее определение. В наиболее общем случае модель называют адекватной оригиналу, если она удовлетворяет поставленным целям моделирования, т.е., способна дать ответ на поставленные разработчиком вопросы. Такое определение, однако, является слишком расплывчатым. Более приемлемо говорить об адекватности, как о качественном и количественном подобии модели и оригинала. Прежде всего, поведение адекватной модели должно приблизительно отображать основные качественные особенности поведения оригинала. Степень количественной близости характеристик модели и оригинала называется количественной адекватностью, или точностью модели и характеризуется величиной

абсолютной или относительной погрешности – разницы между значениями реальных и модельных характеристик.

В зависимости от целей моделирования точность моделей, признаваемых адекватными, может быть различной. Так, для объяснения причин того или иного поведения оригинала высокая точность не обязательна, главную роль здесь играет сама возможность качественно верного отображения моделью особенностей поведения оригинала. При построении системы управления техническим устройством, наоборот, необходима максимально высокая точность модели этого устройства, так как на ее основе приходится точно рассчитывать величины управляющих воздействий, которые могут оказаться весьма малыми. Объяснение причин поведения оригинала в задачи такого моделирования не входит.

Это определяет выбор подходов к построению математических моделей. *Для объяснения причин поведения системы* строится ее теоретическая модель. Она учитывает структуру системы, взаимосвязь ее элементов и их влияние друг на друга. Точность теоретических моделей чаще всего невелика.

При построении систем управления в технике используются эмпирические модели, в которых внешние характеристики поведения оригинала, наоборот, измеряются достаточно точно, зато его внутренняя структура вообще не принимается во внимание (в таких случаях говорят, что система рассматривается, как "черный ящик").

Эмпирические модели отдельных элементов системы или отдельных элементарных процессов, происходящих в ней, могут также использоваться в составе теоретических моделей в виде отдельных коэффициентов или членов в уравнениях. Такие модели называются **смешанными** или **полуэмпирическими**. Применение эмпирических вставок в смешанных моделях повышает их точность по сравнению с чисто теоретическими. Такие модели используют при проектировании технических систем или принятии экономических решений.

1.2. ОСОБЕННОСТИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математические модели экономических систем строятся для достижения одной из двух целей:

1. **Теоретические** модели предназначаются для изучения общих закономерностей и свойств экономических систем.

2. **Прикладные** модели строятся для выработки конкретных рекомендаций при принятии практических хозяйственных решений и носят, как правило, оптимизационный характер. По своей структуре они являются смешанными. Эмпирические вставки в таких моделях (уровни цен на товары и сырье, взаимосвязи экономических характеристик и показателей и т.п.) определяются путем статистических, маркетинговых и других обследований.

По масштабу моделируемой системы модели делятся на:

1. **Макроэкономические** модели. Они описывают экономику государства или экономико-географического региона в целом, связывая между собой укрупненные показатели: валовой национальный продукт, национальный доход, инфляцию, уровень занятости и т.п. Обычно такие модели являются теоретическими.

2. **Микроэкономические** модели. В них моделируемой системой является небольшая часть макроэкономической системы, чаще всего отдельное предприятие или его подразделение. Эти модели обычно носят оптимизационный характер и являются смешанными (полуэмпирическими).

Общая схема развития экономической системы и роль моделирования в этом процессе отображена на рис. 1.1.

При построении математических моделей в экономике надо учитывать, что большинство характеристик таких моделей нельзя определить точно. На их значения влияет "человеческий фактор", т.к. они являются результатом действий и решений множества отдельных людей, которые в одинаковой ситуации ведут себя по-разному. В результате характеристики экономических моделей оказываются случайными величинами, сгруппированными вокруг каких-то средних значений или осредненных

зависимостей. Такие модели называются **стохастическими** (в отличие от **детерминированных** моделей, характеристики которых жестко заданы).

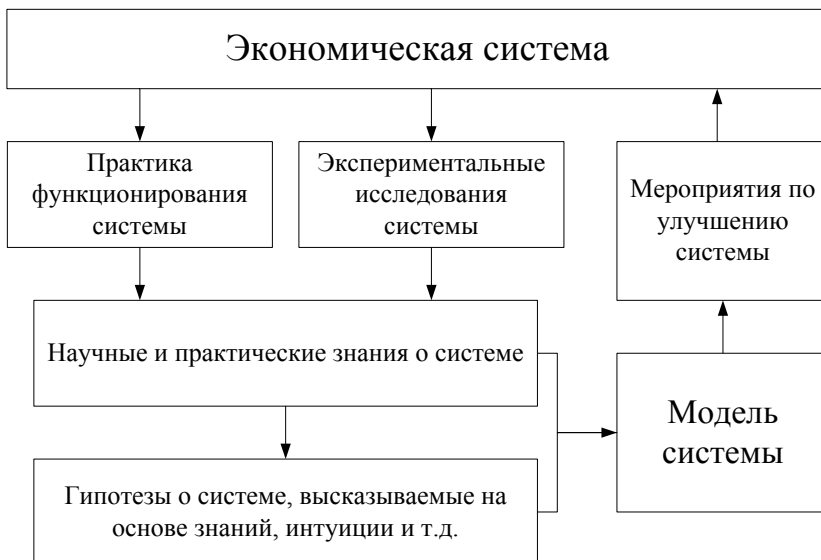


Рис. 1.1. Роль моделирования в развитии экономической системы

Методы определения средних значений и степени разброса характеристик экономических систем при их статистических обследованиях изучаются специальной экономико-математической дисциплиной – эконометрикой, в основе которой лежит аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Таким образом, экономико-математические модели по своей природе являются в той или иной степени неопределенными. При теоретическом моделировании эта неопределенность остается за рамками исследования, т.к. целью моделирования является выявление как раз наиболее общих, осредненных закономерностей. При построении прикладных моделей неопределенность характеристик либо изначально закладывается в мо-

дель, либо ее необходимо держать "в уме" и понимать, что результат моделирования – это лишь наиболее вероятный вариант. Всегда есть вероятность того, что реальная ситуация будет развиваться не так, как предсказывает разработанная модель и надо принимать меры противодействия или страховки на этот случай.

При построении различных эмпирических (и смешанных) моделей надо учитывать еще одно обстоятельство, хорошо известное специалистам технических наук, но нередко забываемое экономистами. Оно заключается в том, что эмпирические закономерности, вообще говоря, нельзя экстраполировать (продолжать за пределы диапазона, охваченного экспериментальным исследованием), так как в неизученной области могут проявить себя принципиально иные эффекты, не характерные для уже исследованной области изменения факторов процесса.

В экономических исследованиях и практической деятельности широко используется понятие **тренда** (тенденции). Это эмпирическая закономерность изменения во времени того или иного экономического показателя, полученная путем обработки данных о его значениях в предыдущие моменты времени. Достаточно часто экономические решения принимаются на основе предположений о том, что эта же закономерность будет иметь место и в будущем (хотя бы на какой-то срок). Совсем обойтись без таких предположений нельзя – иначе стало бы невозможным никакое перспективное планирование. Однако при составлении планов следует критически анализировать имеющиеся тренды и учитывать возможность их нарушения. Анализ большинства экономических кризисов и катастроф показывает, что они связаны с некритическим продолжением на значительный срок в будущее каких-то трендов, имевших место в предшествующий период (роста цен на нефть, объемов ипотечного кредитования, числа вкладчиков финансовой "пирамиды" и т.п.).

Для изучения возможности возникновения, предсказания и объяснения причин таких кризисных ситуаций необходимо использовать теоретическое моделирование.

1.3. ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Общая схема процесса создания математической модели показана на рис. 1.2.

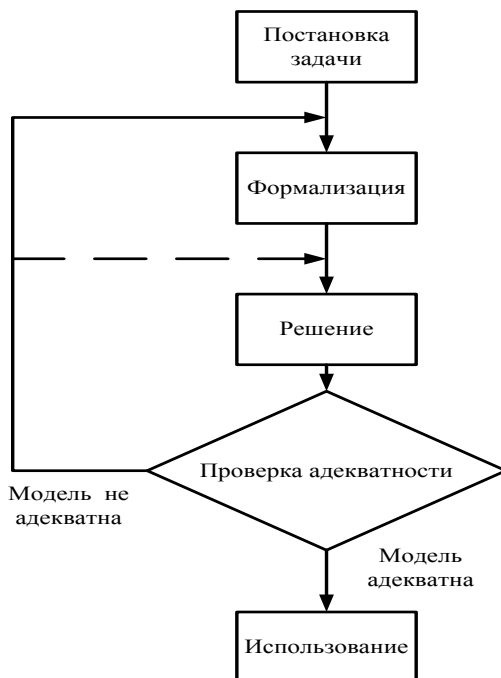


Рис. 1.2. Схема процесса математического моделирования

На этапе постановки задачи:

1. Определяется объект исследования.
2. Формулируется цель исследования, определяются характеристики системы, которые должна отображать построенная модель.

На этапе формализации:

1. Проводится анализ объекта исследования, определяются его основные структурные и функциональные элементы. Вы-

являются наиболее существенные характеристики этих элементов, влияющие на достижение поставленной цели моделирования (определяется степень полноты модели). Характеристики системы разделяются на **параметры модели** (характеристики, которые должны быть известны для построения модели) и **переменные модели**, которые должны быть определены в результате моделирования.

2. Вводятся символические обозначения используемых величин.

3. Производится математическое описание взаимосвязей между элементами и характеристиками системы – строится собственно экономико-математическая модель.

На этапе решения в зависимости от цели моделирования и структуры получившейся математической модели выбирается способ проведения расчетов и осуществляется решение задачи.

Различают три вида решения математических моделей:

1. **Точное**, или **аналитическое**. При таком решении результат получается в виде готовых формул для вычисления функций или отдельных величин по значениям параметров процесса. Точность полученного решения определяется только точностью вычисления по этим формулам и может, в принципе, быть сколь угодно высокой.

2. **Приближенное** решение получается с некоторой погрешностью, которая не может быть до конца устранена. Примером приближенного метода решения является графическое решение. Другие приближенные методы могут основываться на упрощении уравнений модели за счет отбрасывания малых слагаемых или разложения функций в ряды по степеням малого параметра с сохранением ограниченного числа членов ряда (особенно часто сохраняется только первый член разложения, так, чтобы задача стала линейной).

3. **Численное** решение обычно проводится на компьютере. Результат имеет вид не формулы, а числа или таблицы чисел, получаемых в результате выполнения компьютерной программы, реализующей некий алгоритм. Такое решение вычисляется с погрешностью, которая может быть сделана сколь угодно малой.

Не следует путать точность решения с точностью модели в целом. Точность модели определяется в основном ее полнотой. Даже при наличии точного решения самих уравнений точность модели может оказаться недостаточной.

Аналитическое решение уравнений модели является предпочтительным, так как явно записанные формулы решения позволяют легко анализировать степень и характер влияния отдельных параметров на поведение системы, выявлять возможность кризисных ситуаций (в таких критических точках функция, выражающая решение, может иметь разрыв, излом или перегиб). Однако аналитическое решение возможно в редких случаях.

Гораздо чаще можно получить численное решение. Однако его анализ более сложен. Для определения поведения системы в разных ситуациях приходится каждый раз проводить решение заново, осуществляя так называемый машинный эксперимент. Это увеличивает объем работы.

Приближенное решение часто является результатом компромисса между желанием описать систему явными формулами для облегчения их анализа и невозможностью найти для уравнений модели точное аналитическое решение. В некоторых случаях приближенные решения служат исходными точками для осуществления тех или иных численных алгоритмов (например, процессов последовательных приближений).

Проверка адекватности математических моделей обычно осуществляется путем сравнения результатов моделирования с характеристиками реальной системы. Лучше всего для этого попытаться применить модель к какой-то уже существующей системе с известными характеристиками.

Для экономико-математических моделей такой способ проверки редко удается применить на практике (в основном для макроэкономических моделей). Часто модель предполагается адекватной просто на основе того, что в ее основе лежат более или менее достоверные гипотезы (выдвинутые на основе изучения систем и ситуаций, имевших место в прошлом) и более или менее точно определенные параметры. Проверка адекватности такой модели осуществляется постфактум (дословно это латин-

ское слово переводится, как "после события") – по результатам последующего функционирования моделируемой системы. Если оказывается, что модель была неадекватна сложившейся ситуации, а на ее основе были приняты конкретные хозяйственные решения – это может быть чревато для системы более или менее значительным кризисом.

Поэтому в экономико-математическом моделировании особенно важен этап постановки задачи. Если на этом этапе выдвинуты неверные предположения о характере системы и процессов, происходящих в ней – результат может оказаться необратимым и даже катастрофическим.

Таким образом, моделирование в экономике является сложной деятельностью, сопряженной с определенными рисками. Тем не менее, в ходе анализа различных экономических систем накоплен значительный опыт построения экономико-математических моделей, доказавших свою адекватность во многих ситуациях.

1.4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ

Оптимизационные модели направлены на поиск наилучшего варианта решения из некоторого множества возможных решений. Критерием оптимальности в таких моделях служит достижение экстремального (максимального или минимального) значения некоторой величины, зависящей от переменных модели. Такая величина называется **целевой функцией** (ЦФ) задачи. Смысл целевой функции зависит от вида и смысла решаемой задачи. В экономических моделях в качестве целевой функции часто выступает прибыль, выручка от реализации выпущенной продукции и т.п. (они в итоге должны оказаться максимальными), или, например, величина производственных издержек (соответственно, в оптимальном случае она должна быть минимальной).

Таким образом, решение задачи оптимизационного моделирования (коротко – "задачи оптимизации") сводится к поиску экстремума некоторой функции.

Различают **условные** и **безусловные** задачи оптимизации. В условных задачах на переменные модели накладываются какие-то ограничения, сужающие область определения целевой функции. Простейшим ограничением является естественное для многих практических задач требование неотрицательности переменных, носящих материальный характер (например, объемов выпуска какой-либо продукции, и т.п.). Возможны и другие ограничения, связанные, например, с ограниченностью материальных или финансовых ресурсов. Такие ограничения всегда имеют вид каких-то равенств или неравенств. В безусловных задачах оптимизации ограничения отсутствуют.

Из этого ясно, что экономические задачи оптимизации, как правило, являются условными.

Задачи оптимизации различаются также:

1. По числу переменных:

а) одномерные – целевая функция зависит от одной переменной;

б) многомерные (двумерные, трехмерные и т.д.) – целевая функция зависит от нескольких переменных.

2. По математической структуре:

а) линейные (все математические выражения в задаче имеют вид линейных форм);

б) нелинейные.

Многомерные условные линейные задачи оптимизации называются задачами линейного программирования (ЗЛП). Эти задачи будут подробно рассмотрены впоследствии.

Контрольные вопросы

1. Что такое модель системы?
2. Каковы основные цели, преследуемые при моделировании различных систем?
3. Какие модели называются оптимизационными?
4. Что такое вербальная модель системы?
5. К какому виду моделей относится структурная схема административного устройства организации?
6. В чем состоит разница между теоретическими и эмпирическими моделями?
7. В чем состоит разница между статическими и динамическими моделями?
8. Чем характеризуется полнота модели?
9. Как соотносятся между собой адекватность и точность модели? В каком случае модель с невысокой точностью может считаться адекватной?
10. Что понимается под смешанной (полуэмпирической) моделью системы?
11. Какое действие называется экстраполированием модели? Почему опасно экстраполировать эмпирические модели?
12. Какие действия входят в состав этапа постановки задачи при создании модели системы?
13. Какие действия входят в состав этапа формализации при создании модели системы?
14. Охарактеризуйте понятия точного, приближенного и численного решения математической задачи.

15. Что называется целевой функцией оптимизационной задачи?

16. Что понимается под условной задачей оптимизации?

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Функцию F называют **целевой функцией**, критерием оптимальности или линейной формой.

Систему ограничений (2.2) называют **функциональными ограничениями** задачи линейного программирования, а ограничения (2.3) - **прямыми**.

Если в математической модели задачи линейного программирования (2.1) - (2.3) ограничения (2.2) заданы только в виде равенств, то полученная задача будет называться **канонической задачей линейного программирования**.

Если в задаче линейного программирования (2.1) - (2.3) ограничения (2.2) заданы только в виде неравенств, то полученная задача будет называться **симметричной** (или **стандартной**) **задачей линейного программирования**.

Совокупность значений неизвестных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе ограничений (2.2), (2.3), называется **допустимым решением**, или **планом задачи линейного программирования**, то есть ограничения (2.2), (2.3) определяют **область допустимых решений**.

Допустимое решение задачи линейного программирования называется **оптимальным**, если оно обеспечивает максимальное (минимальное) значение целевой функции (2.1).

Любую задачу линейного программирования (ЗЛП) можно свести к задаче линейного программирования в канонической форме.

Любое ограничение – неравенство задачи линейного программирования вида «меньше или равно» преобразуется в равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а неравенство вида «больше или равно»

– вычитаем из его левой части дополнительной неотрицательной переменной.

Если на какую-то неизвестную x_s не наложено условие неотрицательности, то ее можно заменить двумя неотрицательными неизвестными u_s и v_s , приняв $x_s = u_s - v_s$.

Переход к задаче на максимум достигается изменением в случае необходимости знака у целевой функции.

Пример 2.1. Привести к канонической форме следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 2x_2 - x_3 \leq 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq -1, \\ 2x_1 - x_2 \leq -3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение

Введем в каждое уравнение системы ограничений дополнительные неотрицательные переменные x_4, x_5, x_6 . Система запишется в виде равенств, причем в первое и третье уравнения системы ограничений переменные x_4, x_6 вводятся в левую часть со знаком «+», а во второе уравнение x_5 вводится со знаком «-».

Получим

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_6 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

В канонической форме записи задач линейного программирования все переменные, входящие в систему ограничений, должны быть неотрицательными. Допустим, что

$$x_1 = u_1 - v_1, \quad \text{где } u_1 \geq 0, v_1 \geq 0.$$

Подставляя данное выражение в систему ограничений и целевую функцию и, записывая переменные в порядке возрастания индекса, получим задачу линейного программирования, представленную в канонической форме:

$$\begin{aligned}
 F &= 2u_1 - 2v_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\
 \begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ u_1 - v_1 + x_2 - x_3 - x_5 = -1, \\ 2u_1 - 2v_1 - x_2 + x_6 = -3, \end{cases} \\
 u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, x_j \geq 0, \quad j = \overline{2,6}.
 \end{aligned}$$

В линейной алгебре доказывается, что систему из r независимых уравнений с n переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ всегда можно разрешить относительно каких-то r переменных (называемых **базисными, основными**) и выразить их через остальные $k = n - r$ переменных (называемых **свободными, неосновными**). Свободным переменным можно придавать какие угодно значения, не нарушая условий системы равенств.

Решение системы линейных уравнений называется **допустимым**, если оно содержит, лишь неотрицательные компоненты. В противном случае решение называется **недопустимым**.

Среди бесконечного множества решений системы уравнений выделяют так называемые базисные решения.

Базисным решением системы r линейных уравнений с n переменными называется решение, в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю.

Базисное решение, в котором хотя бы одна из основных переменных равна нулю, называется **вырожденным**.

Рассмотрим пример построения экономико-математической модели задачи линейного программирования. Для составления математической модели необходимо:

- 1) обозначить переменные;
- 2) составить целевую функцию исходя из цели задачи;
- 3) записать систему ограничений, учитывая имеющиеся в условии задачи показатели и их количественные закономерности.

В процессе записи математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений.

Пример 2.2. Молочный комбинат освоил выпуск новых сортов сыра: «Нежный» и «Петровский». Ожидаемый спрос на них может составить, соответственно, не более 15 и 12 т в ме-

сяц. Поскольку комбинат выпускает также традиционные виды продукции, каждый из 4 цехов может выделить на производство сыров ограниченный месячный ресурс времени. Выделяемые лимиты времени, а также затраты времени работы каждого цеха на осуществление технологического процесса при выработке 1 т сыра каждого сорта, приведены в таблице 2.1, где также представлены оптовые цены сыров. Определить оптимальный объем выпуска сыра каждого сорта, обеспечивающий максимальную выручку от продажи.

Таблица 2.1

Исходные данные задачи

№ цеха	Затраты времени на выработку 1 т сыра, час		Месячные лимиты времени, час
	Нежный	Петровский	
1	2	7	66
2	3	5	45
3	2	4	58
4	1	6	72
Оптовая цена, тыс. руб. / т	156	168	

Построение модели

1) В данной задаче требуется установить, сколько сыра каждого сорта надо производить в текущем месяце. Поэтому искомыми неизвестными величинами, а значит, и переменными задачи являются объемы выпуска каждого сорта сыра:

x_1 – объем выпуска сыра «Нежный» (т сыра / месяц);

x_2 – объем выпуска сыра «Петровский» (т сыра / месяц).

2) В условии задачи сформулирована цель – добиться максимального дохода от реализации продукции. Чтобы рассчитать величину выручки от продажи сыров обоих сортов, необходимо знать объемы производства сыров, т.е. x_1 и x_2 т сыра, а также оптовые цены на сыры «Нежный» и «Петровский» – согласно условию, соответственно 156 и 168 тыс. руб. за 1 т сыра. Таким образом, доход от продажи сыра «Нежный» равен $156x_1$ тыс. руб. в месяц, а от продажи сыра «Петровский» – $168x_2$ тыс.

руб. в месяц. Запишем целевую функцию в виде суммы дохода от продажи сыров «Нежный» и «Петровский»

$$F = 156x_1 + 168x_2 \rightarrow \max \text{ (тыс. руб./ месяц)}.$$

3) Возможные объемы производства сыров x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- затраты времени работы каждого цеха на производство сыров обоих сортов, не могут превышать месячного лимита времени по цехам;
- согласно результатам изучения рыночного спроса объемом производства сыра «Нежный» не должен превышать 15 т в месяц, а сыра «Петровский» - 12 т в месяц;
- объемы производства сыров не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи можно разделить на три вида, обусловленные:

- а) временными затратами;
- б) рыночным спросом на сыры;
- в) неотрицательностью объемов производства.

Запишем эти ограничения в математической форме.

Левая часть ограничений по фонду времени представляет собой время, затрачиваемое каждым цехом на выработку сыров в течение месяца в количестве x_1 , x_2 тонн. Правая часть ограничения – это месячные лимиты рабочего времени каждого цеха. Таким образом, ограничение по расходу времени на выработку сыров в течение месяца первым цехом имеет вид:

$$2x_1 + 7x_2 \leq 66 \text{ (час / месяц)}.$$

Аналогична математическая запись ограничений по второму, третьему и четвертому цехам:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 45,$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 58,$$

$$1x_1 + 6x_2 \leq 72.$$

Замечание 2.1. Важным моментом проверки правильности составления ограничений является проверка совпадения единиц измерения левой и правой частей ограничений.

В составленных выше ограничениях левая и правая части измеряются в часах, потраченных на производство сыров в течение месяца.

Ограничения по объему производства сыров согласно рыночному спросу имеют вид:

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 15 \text{ (т / месяц)}, \\x_2 &\leq 12 \text{ (т / месяц)}.\end{aligned}$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Таким образом, математическая модель этой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}F &= 156x_1 + 168x_2 \rightarrow \max, \\&\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \leq 66, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 58, \\ 1x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_1 \leq 15, \\ x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

2.1.2. Геометрическая интерпретация и графический метод решения задачи линейного программирования

Наиболее простым и наглядным методом решения задач линейного программирования является **графический метод**. Он применяется для задач линейного программирования с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами, и задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

Графический метод основан на геометрическом представлении допустимых решений и целевой функции задачи.

Каждое из неравенств задачи линейного программирования (2.2) определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость (рис. 2.1). Пересечение этих полуплоскостей

задает **область допустимых решений** (ОДР), то есть любая точка из этой области является решением системы ограничений (2.2). Область допустимых решений всегда представляет собой выпуклую фигуру¹.

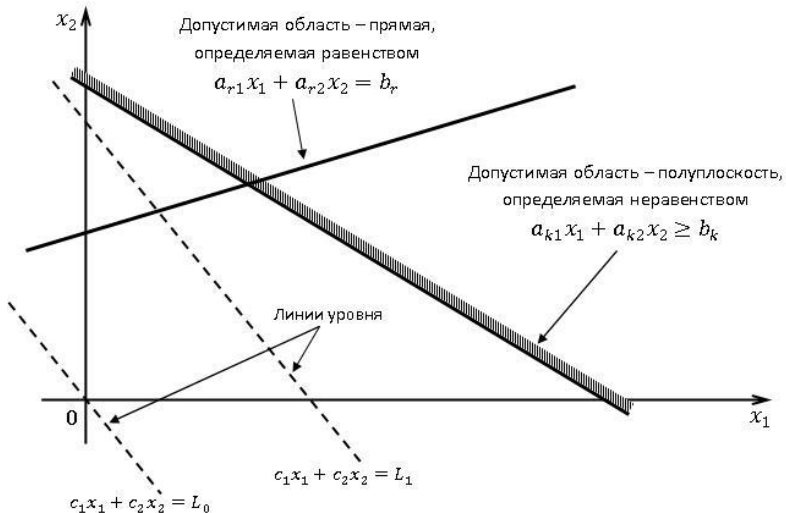


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация ограничений и целевой функции задачи линейного программирования

Замечание 2.2. Если система ограничений (2.2) включает равенства, то они определяют на координатной плоскости (x_1 , x_2) прямую линию (рис. 2.1).

В общем случае область допустимых решений может быть представлена одной из следующих фигур: выпуклым многоугольником, неограниченной многоугольной областью, лучом, отрезком, точкой или пустой областью. В последнем случае говорят, что ограничения не совместны.

¹ Если множеству с любыми двумя его произвольными точками полностью принадлежит и отрезок, соединяющий эти точки, то оно будет выпуклым.

Целевая функция задачи линейного программирования (2.1) при фиксированном значении L определяет на плоскости прямую $c_1 x_1 + c_2 x_2 = L$. Изменяя значения L , получим семейство параллельных прямых, называемых **линиями уровня** (рис. 2.1).

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из области допустимых решений, на которых достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня целевой функции, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Рассмотрим методику решения задачи линейного программирования графическим методом:

Шаг 1. Построение области допустимых решений

Для этого каждое из неравенств системы заменяем равенством и строим соответствующие этим равенствам граничные прямые. Прямую строят по двум точкам, которые легко получить в результате последовательного обнуления одной из переменных.

Каждая из построенных прямых делит плоскость (x_1, x_2) на две полуплоскости.

Чтобы графически определить, по какую сторону от граничной прямой располагается полуплоскость, содержащая решения, удовлетворяющие рассматриваемому неравенству, достаточно проверить одну какую-либо точку, не лежащую на прямой (например $(0,0)$). Если при подстановке ее координат в левую часть неравенства оно выполняется, то надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку (рис. 2.2).

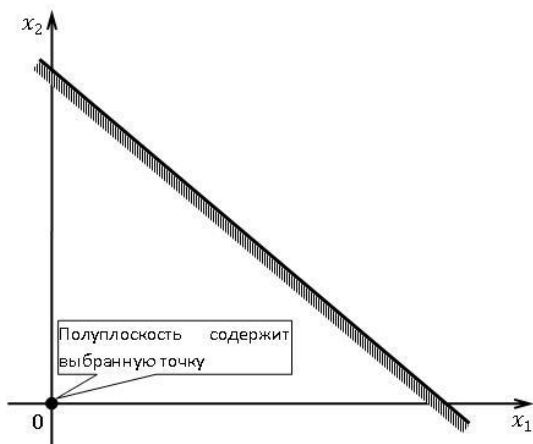


Рис. 2.2. Определение допустимой полуплоскости

Если же неравенство не выполняется, надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку (рис. 2.3).

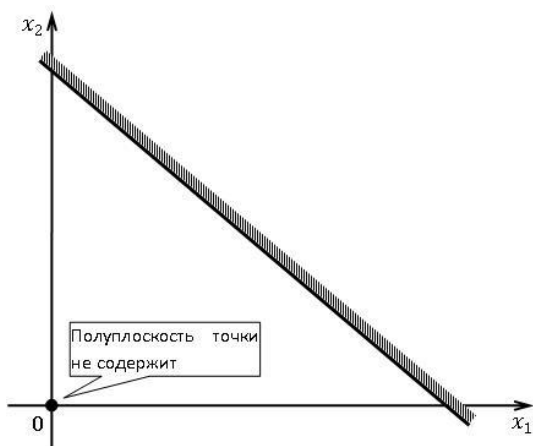


Рис. 2.3. Определение допустимой полуплоскости

Прямые ограничения означают, что область решений будет лежать в первой четверти системы координат. Отметим штриховкой эту область.

Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому выделим такие прямые.

Отметим общую область для всех неравенств (рис. 2.4). Таким образом, получим область допустимых решений рассматриваемой задачи ЛП.

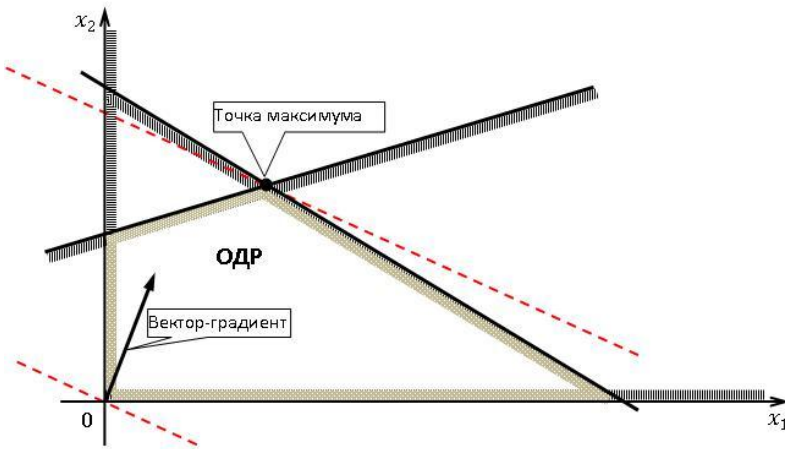


Рис. 2.4. Нахождение области допустимых решений и оптимального решения задачи линейного программирования

Шаг 2. Формирование графического изображения целевой функции

Приравняем целевую функцию постоянной величине L : $c_1 x_1 + c_2 x_2 = L$. Это уравнение при фиксированном значении L определяет прямую, а при изменении L семейство параллельных прямых, каждая из которых называется линией уровня.

Шаг 3. Определение направления возрастания целевой функции

Для определения направления максимального возрастания значения целевой функции строим вектор-градиент целевой

функции, который начинается в точке $(0,0)$, заканчивается в точке (c_1, c_2) . Если линия уровня и вектор-градиент построены верно, то они будут перпендикулярны (рис. 2.4).

Шаг 4. Нахождение оптимального решения задачи линейного программирования

Если решается задача поиска максимума, то линии уровня перемещаются в направлении возрастания градиента до поиска самой удаленной точки области допустимых решений (рис. 2.4). Эта точка будет точкой экстремума целевой функции в области допустимых решений, то есть будет оптимальным решением задачи линейного программирования. В случае поиска минимума - линии уровня перемещаются в направлении, противоположном возрастанию градиента до самой удаленной точки.

Для вычисления координат оптимальной точки решим систему уравнений прямых, на пересечении которых находится эта точка. Подставляя найденный результат в целевую функцию, получим искомое оптимальное значение целевой функции.

В зависимости от вида области допустимых решений и положения линий уровня возможны следующие случаи:

1. Задача линейного программирования имеет единственное решение.

2. Задача линейного программирования имеет альтернативный оптимум, то есть множество оптимальных решений. Это случай, когда линия уровня параллельна одной из сторон области допустимых решений, причем эта сторона расположена в направлении смещения линии уровня при стремлении целевой функции к своему оптимуму. Оптимальное значение целевой функции достигается не в одной, а в двух угловых точках (вершинах) области допустимых решений и, следовательно, во всех точках отрезка, соединяющего эти вершины.

3. Задача линейного программирования не имеет конечного решения. Если область допустимых решений является незамкнутым выпуклым многоугольником в направлении оптимизации целевой функции, то целевая функция будет неограниченной. В этом случае условно можно записать, что $F_{max} = +\infty$ ($F_{min} = -\infty$).

4. Задача линейного программирования не имеет решения, когда область допустимых решений есть пустое множество, т.е. система ограничений ЗЛП содержит противоречивые неравенства, и на координатной плоскости нет ни одной точки, удовлетворяющей этим ограничениям.

Пример 2.3. Рассмотрим графический метод решения на примере задачи о производстве сыров (пример 2.2). Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$F = 156x_1 + 168x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \leq 66, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 58, \\ 1x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_1 \leq 15, \\ x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Шаг 1. Построим область допустимых решений, для чего систему ограничений-неравенств запишем в виде уравнений и пронумеруем их:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 66, & (1) \\ 3x_1 + 5x_2 = 45, & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 = 58, & (3) \\ 1x_1 + 6x_2 = 72, & (4) \\ x_1 = 15, & (5) \\ x_2 = 12, & (6) \\ x_1 = 0, & (7) \\ x_2 = 0. & (8) \end{cases}$$

Каждое из записанных уравнений представляет собой прямую на плоскости, причем 7-я и 8-я прямые являются координатными осями.

Построим первую прямую по двум точкам, координаты которых получены путем последовательного обнуления одной из переменных: при $x_1 = 0$, $x_2 = 9.43$, а при $x_2 = 0$, $x_1 = 33$. На рис. 2.5 обозначим ее цифрой 1.

Теперь определим, по какую сторону от прямой будет находиться полуплоскость, соответствующая первому неравенству. Для этого возьмем точку с координатами $(0,0)$ и подставим ее в первое неравенство: $2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 \leq 66$ - оно выполняется. Следовательно, областью решения первого неравенства служит нижняя полуплоскость, заштрихуем ее (рис. 2.5).

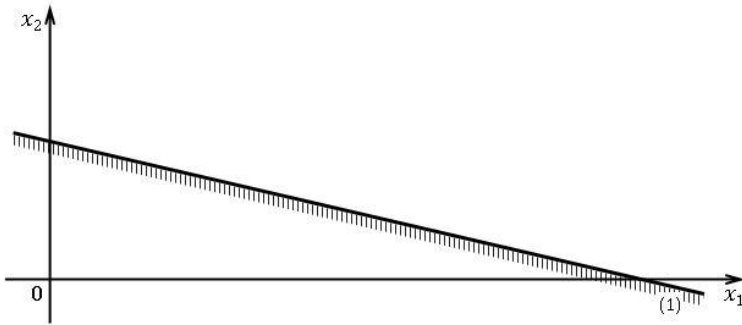


Рис. 2.5. Область решения первого неравенства

Аналогично построим прямые со 2-й по 6-ю и найдем полуплоскости, соответствующие этим неравенствам, заштрихуем их (рис. 2.6). Точки, удовлетворяющие ограничениям $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, находятся в первом квадранте координатной плоскости.

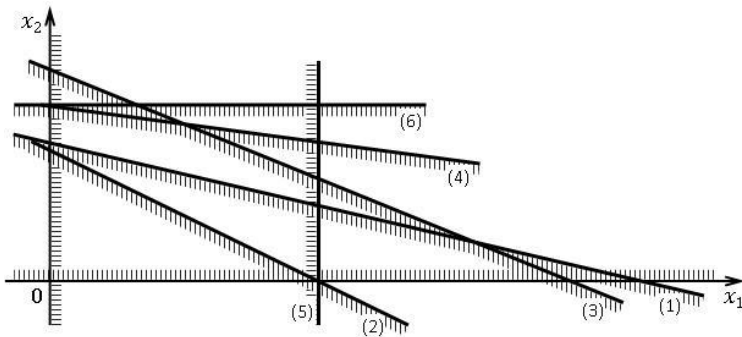


Рис. 2.6. Области решений неравенств системы ограничений

Выделим общую область для всех неравенств. На графике (рис. 2.7) это треугольник ABC.

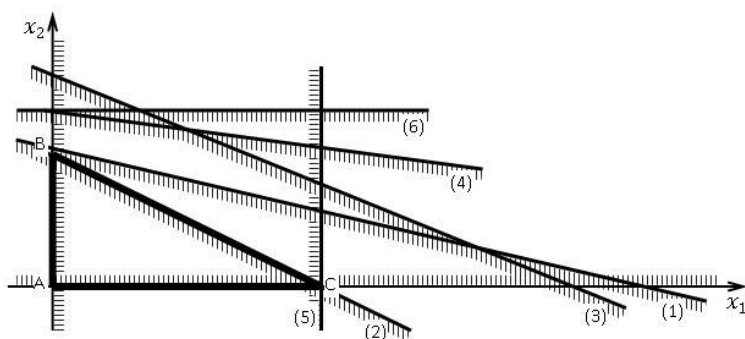


Рис. 2.7. Область допустимых решений задачи о производстве сыров

Шаг 2. Приравняем целевую функцию к нулю: $156x_1 + 168x_2 = 0$. Вычислим координаты двух точек, удовлетворяющих этому уравнению, и построим соответствующую прямую (рис. 2.8) по этим точкам: (0, 0) и (14, -13).

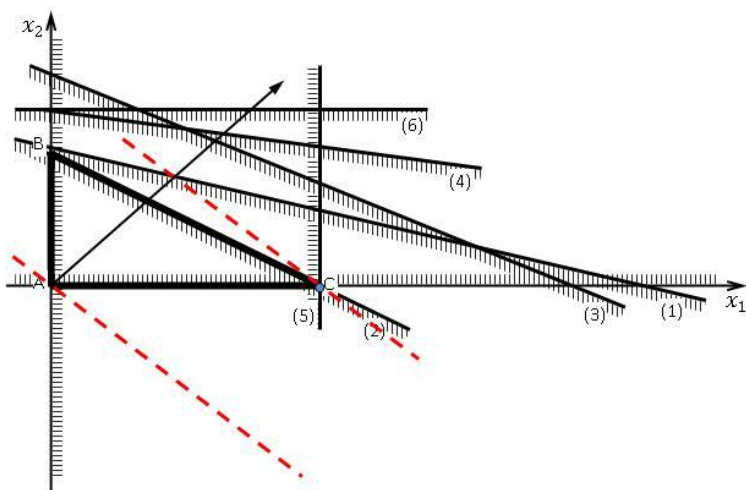


Рис. 2.8. Графическое решение задачи о производстве сыров

Шаг 3. Строим вектор-градиент (рис. 2.8) из точки (0, 0) в точку (156, 168) – коэффициенты целевой функции. Для удобства построения вектора-градиента сократим координаты второй точки на 12, получим точку с координатами (13, 14).

Шаг 4. Перемещая прямую функции параллельно самой себе в направлении вектора-градиента, видим, что последней точкой многоугольника решений, которую пересечет прямая функции, является точка *С*. Следовательно, в этой точке функция достигает максимального значения (рис. 2.8).

Координаты точки *С* найдем, решая систему уравнений, прямые которых пересекаются в данной точке:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 45, & (2) \\ x_1 = 15. & (5) \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $x_1 = 15$; $x_2 = 0$. Следовательно, если молочный комбинат произведет только сыр «Нежный» в объеме 15 т, то получит максимальную прибыль, равную:

$$F_{max} = 156 \cdot 15 + 168 \cdot 0 = 2340 \text{ тыс. руб.}$$

2.1.3. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Реальные задачи линейного программирования содержат, как правило, большое число неизвестных. Графическим методом, несмотря на его простоту и наглядность, решить такие задачи невозможно. Поэтому необходимы аналитические методы, позволяющие решать задачи линейного программирования с любым числом переменных.

Универсальным методом решения задач линейного программирования является **симплексный метод** (**симплекс-метод**), в основе которого лежит идея последовательного улучшения решения (направленного перебора вершин).

Геометрический смысл симплекс-метода состоит в последовательном переходе от одной вершины области допустимых решений (называемой первоначальной) к соседней, в которой линейная функция принимает лучшее (по крайней мере, не худ-

одно уравнение системы с коэффициентом единица. Остальные переменные системы будут **свободными**.

Исходную расширенную систему с выделенными базисными переменными удобно представить в виде симплексной таблицы (табл. 2.2). Базисные переменные запишем в левый заглавный столбец, а свободные переменные – в верхнюю заглавную строку. Числовые значения правой части системы ограничений запишем во втором столбце таблицы (в столбце свободных членов). Коэффициенты при свободных переменных запишем под ними. Функцию запишем в последней строке таблицы (F-строка). Значение функции запишем в последней клетке столбца свободных членов.

Таблица 2.2

Структура симплекс-таблицы

Базисные переменные (БП)	Свободный член, b_i	Свободные переменные (СП)					
		x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+r}	b_r	a_{r1}	a_{r2}	$\dots$	a_{rk}	$\dots$	a_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_k$	$\dots$	$-c_n$

Решение задачи линейного программирования симплексным методом проводится в два этапа. Сначала находится **начальное допустимое базисное решение**, а затем проводится направленный перебор базисных решений для получения **оптимального плана**.

Сформулируем *алгоритм нахождения начального допустимого базисного решения*.

Пусть условия задачи линейного программирования занесены в симплексную таблицу 2.2.

1. Проверка базисного решения на допустимость. Проверяем элементы столбца свободных членов (за исключением значения функции). Если все они положительные, то допу-

стимое решение найдено и далее переходим к алгоритму нахождения оптимального решения.

2. Нахождение разрешающего столбца. Если среди элементов столбца свободных членов имеются отрицательные, то выбираем любой из них и, просматривая элементы строки с выбранным отрицательным свободным членом, фиксируем в ней отрицательные элементы. Любой столбец с отрицательным элементом в рассматриваемой строке берем за **разрешающий столбец** (k).

Замечание 2.3. Если среди элементов столбца свободных членов имеются нулевые элементы, то налицо вырожденная задача линейного программирования. Чтобы избежать вырожденности, а, следовательно, и заикливания³, искусственно припишем нулевому элементу в столбце свободных членов знак плюс, а разрешающим столбцом будем выбирать тот, в котором находятся два отрицательных элемента: один в строке с отрицательным, а другой в строке с нулевым свободным членом.

Замечание 2.4. Если в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательных элементов, то система ограничений несовместна. Задача решения не имеет.

3. Выбор разрешающей строки. Разрешающую строку (r) находим по **наименьшему положительному симплексному отношению**. Симплексные отношения находим как отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца (кроме F-строки):

$$\left(\frac{b_1}{a_{1k}}, \frac{b_2}{a_{2k}}, \dots, \frac{b_r}{a_{rk}}, \dots, \frac{b_m}{a_{mk}} \right).$$

Симплексные отношения удобно рассчитывать в таблице 2.3.

Теорема. Если разрешающий элемент выбирать по наименьшему симплексному отношению, то вместо свободного члена разрешающей строки в новой симплексной таблице будет всегда число положительное, а остальные элементы столбца свободных членов не меняют знака.

³ Заикливание – это возврат к старому базису.

Симплексная таблица

Базисные переменные (БП)	Свободный член, b_i	Свободные переменные (СП)						Оценочные отношения
		x_1	x_2	...	x_k	...	x_n	
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	b_1/a_{1k}
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}	b_2/a_{2k}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+r}	b_r	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rk}	...	a_{rn}	b_r/a_{rk}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	b_m/a_{mk}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_k$	...	$-c_n$	

4. **Выбор разрешающего элемента.** На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится **разрешающий элемент** (a_{rk}).

5. **Преобразования симплекс-таблицы.** С выделенным разрешающим элементом рассчитываем новую симплексную таблицу.

Правила расчета элементов новой таблицы:

- x -переменные разрешающих столбца и строки меняются местами;
- вместо разрешающего элемента в новой таблице ставится обратная ему величина ($1/a_{rk}$);
- остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
- остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и записываются с противоположным знаком;
- все прочие элементы таблицы вычисляются по формуле

$$a'_{ij} = \frac{a_{rk} \cdot a_{ij} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}, \text{ где } r, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; i \neq r; j \neq k,$$

которая носит название **правила прямоугольника**.

В результате выполнения этого шага переменная x_k становится базисной, а переменная x_{n+r} выводится из базиса и становится свободной.

Анализ новой таблицы начинаем с 1-го пункта алгоритма. Так действуем до тех пор, пока не найдем допустимое решение или не убедимся, что его не существует.

Теперь сформулируем *алгоритм нахождения оптимального решения (максимального) задачи линейного программирования*.

1. Проверка базисного решения на оптимальность.

Если все элементы F-строки неотрицательны (за исключением значения функции), то оптимальное решение задачи достигнуто. В этом решении все свободные переменные равны нулю, а базисные – свободным членам таблицы. Если все элементы F-строки положительны, то полученное оптимальное решение будет единственным, если в F-строке есть нулевые элементы, то существует бесконечно много оптимальных решений.

2. Выбор разрешающего столбца. Если среди элементов F-строки имеются отрицательные (за исключением значения функции), то выбираем среди них наибольший по абсолютной величине, и столбец, в котором находится этот элемент, берем за разрешающий.

Замечание 2.5. Если среди элементов столбца свободных членов имеются нулевые элементы, то налицо вырожденная задача линейного программирования. Чтобы избежать вырожденности, а, следовательно, и заикливания, разрешающим столбцом будем выбирать тот, в котором находится один отрицательный элемент в строке функции, а второй отрицательный элемент - в строке с нулевым свободным членом, которому приписывается знак плюс.

Замечание 2.6. Если в разрешающем столбце симплексной таблицы все элементы неположительные, то целевая функция неограниченна и ЗЛП не имеет конечного решения.

3. Вычисление симплексного отношения и выбор разрешающей строки. Разрешающую строку находим по наименьшему положительному симплексному отношению. Симплексные отношения находим как отношения элементов

столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца (кроме F-строки).

4. Выбор разрешающего элемента. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент.

5. Преобразования симплекс-таблицы. Выполняется точно так же, как и в предыдущем алгоритме. После чего осуществляется переход к 1-му пункту алгоритма.

Замечание 2.7. Для решения задачи на минимум достаточно умножить на (-1) функцию F и найти максимум, а $\min F = -\max(-F)$.

Пример 2.4. Рассмотрим симплекс-метод на примере решения задачи о производстве сыров (пример 2.2). Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$F = 156x_1 + 168x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \leq 66, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 58, \\ 1x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_1 \leq 15, \\ x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Приведем ограничения задачи к каноническому виду, добавив к их левым частям дополнительные неотрицательные переменные $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$, и запишем расширенную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 66, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 45, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_5 = 58, \\ 1x_1 + 6x_2 + x_6 = 72, \\ x_1 + x_7 = 15, \\ x_2 + x_8 = 12, \\ F - 156x_1 - 168x_2 = 0. \end{cases}$$

Дополнительные неотрицательные переменные $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ будут базисными, так как каждая из них вхо-

дит только в одно уравнение системы с коэффициентом единица.

Занесем условия задачи в симплексную таблицу (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Симплексная таблица

Базисные переменные (БП)	Свободный член, b_i	Свободные переменные (СП)		Оценочные отношения
		x_1	x_2	
x_3	66	2	7	66/7
x_4	45	3	5	9
x_5	58	2	4	29/2
x_6	72	1	6	12
x_7	15	1	0	-
x_8	12	0	1	12
F	0	-156	-168	

Выпишем решение из симплексной таблицы 2.4 и проанализируем его: $x_1 = x_2 = 0$ (как небазисные переменные), т.е. комбинат сыр не выпускает. Дополнительные переменные $x_3 = 66, x_4 = 45, x_5 = 58, x_6 = 72, x_7 = 15, x_8 = 12$ означают количество неиспользованных ресурсов. Поскольку сыр не выпускается, то ресурсы не используются, и, следовательно, прибыль при этом равна нулю ($F = 0$).

Решение задачи допустимое, так как базисные переменные принимают положительные значения. Переходим к поиску оптимального решения. В строке функции наибольший по абсолютной величине (среди отрицательных) элемент находится во втором столбце, поэтому этот столбец берем за разрешающий и выделяем его цветом (табл. 2.4). Разрешающую строку находим по наименьшему положительному симплексному отношению:

$$\min\left(\frac{66}{7}, \frac{45}{5}, \frac{58}{4}, \frac{72}{6}, \frac{15}{0}, \frac{12}{1}\right) = \min(9,43; 9; 14,5; 12; -; 12) = 9.$$

Наименьшее симплексное отношение соответствует второй строке, следовательно, она будет разрешающей. Выделим

эту строку в таблице 2.4 цветом. Разрешающий элемент находится на пересечении разрешающих строки и столбца и равен 5.

Рассчитаем элементы новой симплексной таблицы (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Новая симплексная таблица

Базисные переменные (БП)	Свободный член, b_i	Свободные переменные (СП)		Оценочные отношения
		x_1	x_4	
x_3	3	-2,2	-7/5	-
x_2	9	3/5	1/5	15
x_5	22	-0,4	-4/5	-
x_6	18	-2,6	-6/5	-
x_7	15	1	0	15
x_8	3	-0,6	-1/5	-
F	1512	-55,2	168/5	

Выпишем решение из таблицы 2.5:

$$x_1 = 0, x_2 = 9, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 22, x_6 = 18, x_7 = 15, x_8 = 3, \\ F = 1512 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Это решение означает, что комбинат может произвести сыра «Петровский» в объеме 9 тонн, при этом оно получит прибыль в размере 1512 тыс. руб., второй ресурс будет использован полностью ($x_4 = 0$). Решение в таблице 2.5 не является оптимальным, так как в строке функции имеется отрицательный элемент (-55,2). В соответствии с алгоритмом выберем разрешающий элемент (15) и рассчитаем новую симплексную таблицу (табл. 2.6).

В таблице 2.6 получено оптимальное решение:

$$x_1 = 15, x_2 = 0, x_3 = 36, x_4 = 0, x_5 = 28, x_6 = 57, x_7 = 0, \\ x_8 = 12, F = 2340 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Из решения видно, что сыр «Нежный» с меньшей прибылью (156 тыс. руб./т) по сравнению с сыром «Петровский» во-

Таблица 2.6

Базисные переменные (БП)	Свобод- ный член, b_i	Свободные переменные (СП)		Оценочные отношения
		x_7	x_4	
x_3	36	2,2	-1,4	
x_2	0	-0,6	0,2	
x_5	28	0,4	-0,8	
x_6	57	2,6	-1,2	
x_1	15	1	0	
x_8	12	0,6	-0,2	
F	2340	55,2	33,6	

После приведения ограничений к каноническому виду получим расширенную систему вида:

[illegible]

46

Таблица 2.7

Структура симплекс-таблицы

Базисные переменные (БП)	Свобод- ный член, b_i	Свободные переменные (СП)					
		x_1	x_2	$\dots$	x_r	$\dots$	x_n
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1r}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+k}	b_k	a_{k1}	a_{k2}	$\dots$	a_{kr}	$\dots$	a_{kn}
0	b_{k+1}	$a_{k+1\ 1}$	$a_{k+1\ 2}$	$\dots$	$a_{k+1\ r}$	$\dots$	$a_{k+1\ n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mr}	$\dots$	a_{mn}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_r$	$\dots$	$-c_n$

В таблице 2.7 вместо части базисных переменных стоят нули. Переместим нули в верхнюю строку таблицы. Учитывая, что в столбце свободных членов все элементы неотрицательные и их неотрицательность нужно сохранить при переходе к новым симплексным таблицам, разрешающим выберем столбец, в котором находится положительный элемент на пересечении со строкой с нулевым элементом в заглавном столбце.

Разрешающая строка находится по наименьшему симплексному отношению. Если система ограничений задачи совместна, то последовательно все нули можно переместить в верхнюю строку таблицы, а вместо них в заглавный столбец переместится часть иксов с верхней строки, которые будут базисными, т.е. в результате преобразований получим обычную симплексную таблицу, в которой далее находятся допустимое решение и оптимальное.

Если нуль из заглавного столбца перемещается в верхнюю строку таблицы, то элементы данного столбца можно не вычислять, этот столбец просто можно опустить (вычеркнуть).

Замечание 2.8. Если в левом заглавном столбце стоит нулевой элемент, и в строке, где он находится, все коэффициенты равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то система ограничений задачи несовместна.

Замечание 2.9. Если в задаче все ограничения записаны в виде равенств, то она решается аналогично.

2.2. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

2.2.1. Постановка и правила построения двойственной задачи

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, называемую **двойственной** по отношению к данной (**исходной**) задаче. Исходная и двойственная задачи тесно связаны между собой и образуют **пару двойственных задач**. Двойственная задача по отношению к исходной задаче строится по следующим правилам:

1. Если исходная задача ставится на максимум, то двойственная ставится на минимум и наоборот.

2. В задаче на максимум все ограничения имеют знак «меньше или равно» («равно»), а в задаче на минимум все ограничения имеют знак «больше или равно» («равно»).

3. Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи. Правые части ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

4. Если A – матрица коэффициентов исходной задачи, то транспонированная матрица A^T будет матрицей коэффициентов двойственной задачи.

5. Число переменных двойственной задачи равно числу ограничений исходной задачи, а число ограничений двойственной равно числу переменных исходной задачи, и наоборот.

6. Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи. Если на переменную исходной задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи будет неравенством, в противном случае равенством. Аналогично связаны между собой ограничения исходной задачи и переменные двойственной.

Пара двойственных задач может быть **несимметричной** и **симметричной**. В несимметричных двойственных задачах си-

система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Приведем математические модели симметричных и несимметричных пар задач.

Симметричные задачи

I. Исходная:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

II. Исходная:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Двойственная:

$$Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Двойственная:

$$Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Несимметричные задачи

III. Исходная:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Двойственная:

$$Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

IV. Исходная:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Двойственная:

$$Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Переменные $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ называются **двойственными** (или **объективно обусловленными**) оценками.

Экономическая интерпретация двойственных задач следующая. Вектор x – это вектор выпускаемой продукции, y – двойственные оценки ресурсов исходной задачи. Левая часть ограничений двойственной задачи представляет собой оценку затрат на единицу выпускаемой продукции в двойственных ценах.

Исходная задача представляет собой задачу на определение плана, обеспечивающего максимальный выпуск продукции при заданных ценах реализации и ограничениях на ресурсы. Двойственная задача – определение таких оценок ресурсов, в которых стоимость имеющихся ресурсов минимальна, а затраты на производство единицы продукции не меньше цен реализации продукции.

Рассмотрим алгоритм составления двойственной задачи.

1. Упорядочить запись исходной задачи, т.е. привести все неравенства системы ограничений к одному смыслу: если целевая функция исходной задачи максимизируется, то все ограничения неравенства должны быть вида «меньше или равно», если минимизируется – то вида «больше или равно». Выполнение этих условий достигается умножением соответствующих ограничений на (-1). Если система ограничений задачи содержит хотя бы одно равенство, то все ограничения неравенства должны быть приведены к равенствам путем введения дополнительных неотрицательных переменных.

2. Составить расширенную матрицу исходной задачи, в которую включить матрицу коэффициентов при переменных, столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в линейной функции

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & F \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу, транспонированную к составленной исходной матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & F' \end{pmatrix}.$$

4. Используя модели пар двойственных задач, сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы.

Пример 2.5. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Упорядочим запись исходной задачи. Так как требуется найти максимум целевой функции, то неравенства в системе ограничений должны быть вида «меньше или равно». Умножив первое и четвертое неравенства на (-1) , приведем систему ограничений к виду:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 - x_2 \leq -5. \end{cases}$$

Рассмотрим два способа построения двойственной задачи.

1-ый способ. В соответствии с указанными выше правилами запишем двойственную задачу:

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Двойственная задача имеет четыре переменные, так как исходная задача содержит четыре ограничения. Ограничения двойственной задачи записаны в виде неравенств, так как на все переменные исходной задачи наложено условие неотрицательности. Переменные двойственной задачи неотрицательны в связи с тем, что в исходной задаче им соответствуют ограничения в виде неравенств.

2-ой способ. Запишем двойственную задачу, используя выше рассмотренный алгоритм. Для чего составим расширенную матрицу исходной задачи:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & F \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, транспонированную к составленной исходной матрице:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & F' \end{pmatrix}.$$

Сформулируем двойственную задачу на основании полученной матрицы, используя модели пар двойственных задач:

$$\begin{aligned} Z &= -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2, \end{cases} \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Пример 2.6. Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в общей форме:

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \geq 7, \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение

1-ый способ. Упорядочим запись исходной задачи. Так как требуется найти минимум целевой функции, то неравенства в системе ограничений должны быть вида «больше или равно». Умножив первое и третье неравенства на (-1) , приведем систему ограничений к виду:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq -8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq -5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \geq 7. \end{cases}$$

В соответствии с указанными выше правилами запишем двойственную задачу:

$$Z = -8y_1 + 6y_2 - 5y_3 + 7y_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -3y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 \leq 2, \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 - 5y_4 \leq -1, \\ -y_1 + y_2 - y_3 \leq 1, \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \leq 1, \\ y_1 - 2y_2 + 3y_4 \leq -2, \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Двойственная задача имеет четыре переменные, так как исходная задача содержит четыре ограничения. Ограничения двойственной задачи записаны в виде неравенств, так как на все переменные исходной задачи наложено условие неотрицательности. На переменные y_1, y_3, y_4 наложено условие неотрицательности в связи с тем, что в исходной задаче им соответствуют ограничения в виде неравенств.

2-ой способ. Запишем двойственную задачу, используя выше рассмотренный алгоритм. Система ограничений задачи содержит равенство, поэтому приведем все неравенства системы ограничений к равенствам путем введения дополнительных неотрицательных переменных:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = -8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_7 = -5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 - x_8 = 7. \end{cases}$$

Добавим введенные переменные в целевую функцию:

$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 \rightarrow \min.$$

Составим расширенную матрицу исходной задачи:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, транспонированную к составленной исходной матрице:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & 6 & -5 & 7 & F' \end{pmatrix}.$$

Сформулируем двойственную задачу на основании полученной матрицы, используя модели пар двойственных задач:

$$\begin{aligned} Z &= -8y_1 + 6y_2 - 5y_3 + 7y_4 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} -3y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 \leq 2, \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 - 5y_4 \leq -1, \\ -y_1 + y_2 - y_3 \leq 1, \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \leq 1, \\ y_1 - 2y_2 + 3y_4 \leq -2, \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2.2. Основные теоремы двойственности

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при определении оптимального плана одной из задач находится решение и другой задачи. Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Первая теорема двойственности. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны:

$$F_{\max} = Z_{\min}.$$

Если линейная функция одной из задач двойственной пары не ограничена, то другая задача не имеет решения.

Теорема. Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи.

Экономический смысл теоремы состоит в следующем:

- если оптимальная оценка i -го ресурса не равна нулю, то в оптимальном плане этот ресурс используется полностью;
- если в оптимальном плане ресурс не используется полностью, то его оценка равна нулю;
- если j -й продукт входит в оптимальный план, то в оптимальных оценках ресурсов он неубыточен;
- если j -й продукт в оптимальных оценках ресурсов убыточен, то он не входит в оптимальный план.

Соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи.

Переменные исходной задачи							
Первоначальные				Дополнительные			
x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	$\cdots$	y_{m+n}	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
Дополнительные				Первоначальные			
Переменные двойственной задачи							

Установленное соответствие между переменными позволяет находить решение одной задачи, зная решение другой. При этом используют вторую теорему двойственности.

Вторая теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных ли-

нейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

Пример 2.7. Используя теоремы двойственности, найти решение двойственной задачи к задаче о производстве сыров (пример 2.2).

Исходная задача:

$$F = 156x_1 + 168x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \leq 66, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 58, \\ 1x_1 + 6x_2 \leq 72, \\ x_1 \leq 15, \\ x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$Z = 66y_1 + 45y_2 + 58y_3 + 72y_4 + 15y_5 + 12y_6 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + y_5 \geq 156, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 6y_4 + y_6 \geq 168, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Решение двойственной задачи, согласно второй теоремы двойственности, равно значениям коэффициентов F-строки последней симплексной таблицы прямой задачи.

Установим соответствие между переменными двойственных задач:

Переменные исходной задачи							
Первоначальные				Дополнительные			
x_1	x_2			x_3	x_4	x_5	x_6
$\updownarrow$	$\updownarrow$			$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_7	y_8			y_1	y_2	y_3	y_4
Дополнительные				Первоначальные			
Переменные двойственной задачи							

Приведем оптимальное решение задачи о производстве сыров (пример 2.4) в таблице 2.8.

Таблица 2.8

Заключительная симплексная таблица

Базисные переменные (БП)	Свобод- ный член, b_i	Свободные переменные (СП)		
		x_7	x_4	
x_3	36	2,2	-1,4	y_1
x_2	0	-0,6	0,2	y_8
x_5	28	0,4	-0,8	y_3
x_6	57	2,6	-1,2	y_4
x_1	15	1	0	y_7
x_8	12	0,6	-0,2	y_6
F	2340	55,2	33,6	
		y_5	y_2	

Значения коэффициентов F-строки свободных x -переменных равны соответствующим значениям y -переменных, остальные значения y -переменных приравниваются к нулю:

$$y_2 = 33,6; y_5 = 55,2; y_1 = y_3 = y_4 = y_6 = y_7 = y_8 = 0.$$

При этом значение функции Z минимально и равно значению функции прямой задачи (2340).

2.3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ EXCEL РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.3.1. Решение задач линейного программирования с использованием табличного процессора Excel

Для решения задач линейного программирования в Excel имеется надстройка **Поиск решения**⁴. Если в меню **Сервис** отсутствует команда **Поиск решения**, значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите команду **Сервис / Надстройки** и установите флажок **Поиск решения**.

Для того чтобы решить задачу линейного программирования в Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. **Ввести условие задачи:**

a) *создать экранную форму для ввода условий задачи:*

- переменных,
- целевой функции (ЦФ),
- ограничений;

b) *ввести исходные данные в экранную форму:*

- коэффициенты ЦФ,
- коэффициенты при переменных в ограничениях,
- правые части ограничений;

c) *ввести зависимости из математической модели в экранную форму:*

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) *задать ЦФ (в окне **Поиск решения**):*

- целевую ячейку,
- направление оптимизации ЦФ;

e) *ввести ограничения (в окне **Поиск решения**):*

- ячейки со значениями переменных,

⁴ **Поиск решения** - это надстройка EXCEL, которая позволяет решать оптимизационные задачи.

- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2. *Решить задачу:*

a) *установить параметры решения задачи (в окне Поиск решения);*

b) *запустить задачу на решение (в окне Поиск решения);*

c) *выбрать формат вывода решения (в окне Результаты поиска решения).*

Применение надстройки *Поиск решения* из Excel рассмотрим на примере 2.2.

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид.

Максимизировать целевую функцию

$$F = 156x_1 + 168x_2$$

при следующих ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 7x_2 \leq 66 \text{ — 1-е ограничение (на время работы 1 цеха),} \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 45 \text{ — 2-е ограничение (на время работы 2 цеха),} \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 58 \text{ — 3-е ограничение (на время работы 3 цеха),} \\ 1x_1 + 6x_2 \leq 72 \text{ — 4-е ограничение (на время работы 4 цеха),} \\ \quad x_1 \leq 15 \text{ — 5-е ограничение (спроса 1),} \\ \quad x_2 \leq 12 \text{ — 6-е ограничение (спроса 2),} \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для решения этой задачи с помощью табличного процессора необходимы следующие действия.

1. *Создание экранной формы и ввод в нее условий задачи*

Экранная форма для ввода условий задачи вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис. 2.9.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ресурсы и спрос	Переменные		Ограничения	Отношения	Запасы	
2		x_1	x_2				
3	Время 1	2	7		$\leq$	66	
4	Время 2	3	5		$\leq$	45	
5	Время 3	2	4		$\leq$	58	
6	Время 4	1	6		$\leq$	72	
7	Спрос 1	1	0		$\leq$	15	
8	Спрос 2	0	1		$\leq$	12	
9	Цена	156	168				
10	План выпуска						
11	Прибыль (ЦФ)						
12							
13							

Рис. 2.9. Экранная форма задачи

В экранной форме на рис. 2.9 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи линейного программирования. Так, например, переменным задачи соответствуют ячейки B10 (x_1), C10 (x_2), коэффициентам целевой функции соответствуют ячейки B9 ($c_1 = 156$), C9 ($c_2 = 168$) и т.д.

В затененных областях необходимо будет ввести формулы для целевой функции и линейных ограничений.

2. Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для целевой функции. В ячейку D11, в которой будет отображаться значение целевой функции, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно математической модели задачи значение целевой функции определяется выражением

$$156x_1 + 168x_2. \quad (2.4)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (рис. 2.9), формулу для расчета целевой функции (2.4) можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных

для значений переменных задачи (B10, C10), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов целевой функции (B9, C9), то есть

$$= B10 * B9 + C10 * C9. \quad (2.5)$$

Формулу (2.5) можно записать, используя функцию Excel **СУММПРОИЗВ**, которая находит сумму попарных произведений ячеек с ценами (B9:C9) на ячейки со значениями переменных (B10:C10):

$$= \text{СУММПРОИЗВ}(B9:C9; B10:C10). \quad (2.6)$$

После этого в целевой ячейке появится нуль, т.к. в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые.

Замечание 2.10. Для задания функций в Excel можно использовать команду *Вставить функцию* меню *Вставка*, которая вызывает диалоговое окно *Мастер функций*. В первом окне мастера выбираем категорию *Математические* и в ней функцию **СУММПРОИЗВ**. Второе окно мастера позволяет задать аргументы функции (рис. 2.10). Адреса ячеек можно ввести как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех нужных ячеек непосредственно в экранной форме.

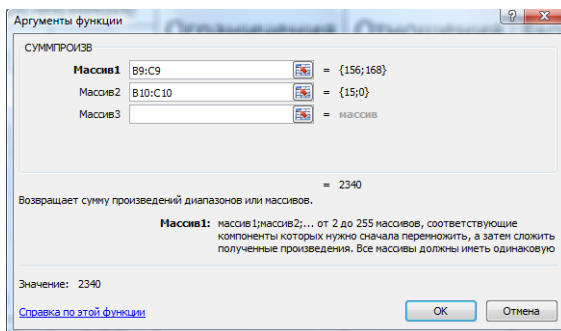


Рис. 2.10. Диалоговое окно мастера функций

Зависимости для левых частей ограничений. Левые части ограничений задачи представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи

(B10, C10), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B3, C3 – 1-е ограничение; B4, C4 – 2-е ограничение и т.д.). В ячейку D3 введем формулу, задающую левую часть первого ограничения

$$= \text{СУММПРОИЗВ}(B3:C3; \$B\$10:\$C\$10). \quad (2.7)$$

Ячейки со значениями переменных преобразуются к абсолютному виду для удобства дальнейшего копирования формулы (2.7) в ячейки с ограничениями, т.к. формулы, задающие левые части ограничений задачи, отличаются друг от друга только номером строки в первом массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Чтобы установить абсолютный адрес ячейки необходимо при наборе формулы после выделения нужного диапазона ячеек в экранной форме (B10, C10) нажать клавишу **F4**.

Для задания остальных ограничений скопируем формулу (2.7) в ячейки D4, D5, D6, D7 и D8 (рис. 2.11).

	A	B	C	D	E	F	
1	Ресурсы и спрос	Переменные		Ограничения	Отношения	Запасы	
2		X ₁	X ₂				
3	Время 1	2	7	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;\$B\$10:\$C\$10)	≤	66	
4	Время 2	3	5	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;\$B\$10:\$C\$10)	≤	45	
5	Время 3	2	4	=СУММПРОИЗВ(B5:C5;\$B\$10:\$C\$10)	≤	58	
6	Время 4	1	6	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;\$B\$10:\$C\$10)	≤	72	
7	Спрос 1	1	0	=СУММПРОИЗВ(B7:C7;\$B\$10:\$C\$10)	≤	15	
8	Спрос 2	0	1	=СУММПРОИЗВ(B8:C8;\$B\$10:\$C\$10)	≤	12	
9	Цена	156	168				
10	План выпуска						
11	Прибыль (ЦФ)			=СУММПРОИЗВ(B9:C9;\$B\$10:\$C\$10)			
12							

Рис. 2.11. Экранная форма задачи в режиме формул

Замечание 2.11. Для проверки правильности введенных формул произведем поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле.

3. *Занесение данных в диалоговое окно Поиск решения*

После заполнения экранной формы (рис. 2.11) установим курсор в ячейку с формулой целевой функции (D11) и выберем

в меню **Сервис** команду **Поиск решения**. Заполним поля в появившемся окне следующим образом (рис. 2.12):

- в поле **Установить целевую ячейку** должен появиться адрес с формулой целевой функции (\$D\$11);
- установим переключатель вида оптимизации равной **максимальному значению**;
- в поле **Изменяя ячейки** укажем диапазон ячеек со значениями переменных задачи, выделив его в экранной форме (\$B\$10:\$C\$10);
- в поле **Ограничения** зададим вид и значения ограничений. Для этого установим курсор в поле ввода ограничений и нажмем кнопку **Добавить**. В появившемся окне **Добавление ограничения** (рис. 2.13) введем в поле **Ссылка на ячейку** адрес ячейки с формулой соответствующего ограничения (например, D3). Затем в поле **Ограничение** введем предельное значение соответствующего запаса (для 1-го ограничения оно находится в ячейке F3) и выберем вид отношения ($\leq$, $\geq$, $=$ и т. д.).

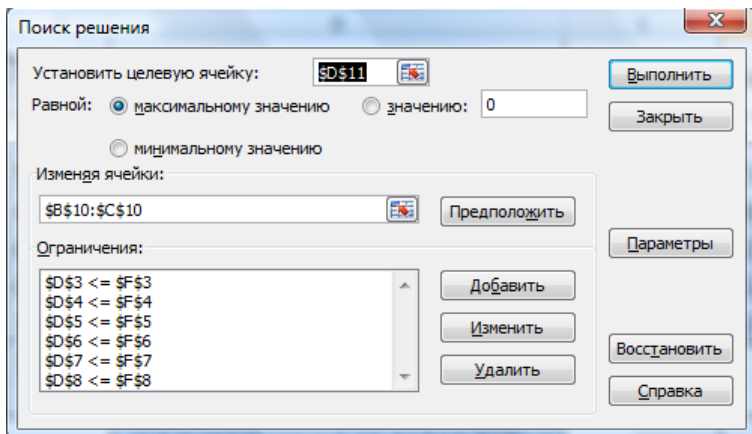


Рис. 2.12. Диалоговое окно **Поиск решения**

После нажатия кнопки **Добавить** (или **ОК** для ввода последнего ограничения) данное ограничение попадает в список ограничений задачи.

С помощью кнопок **Удалить** и **Изменить** можно удалять выделенные в списке ограничения или вносить в них исправления.

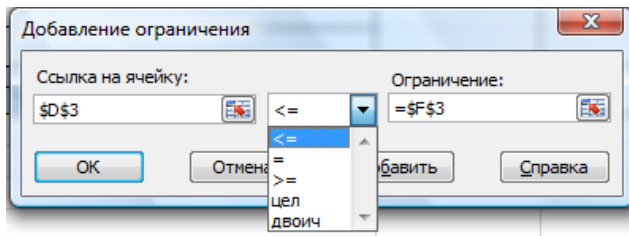


Рис. 2.13. Диалоговое окно *Добавление ограничения*

4. Установка параметров решения задачи

После заполнения всех полей окна **Поиск решения** нажмем кнопку **Параметры** и в открывшемся окне **Параметры поиска решения** (рис. 2.14) установим флажки **Линейная модель** для решения задачи линейного программирования и **Неотрицательные значения**, если такие ограничения накладываются на все переменные задачи.

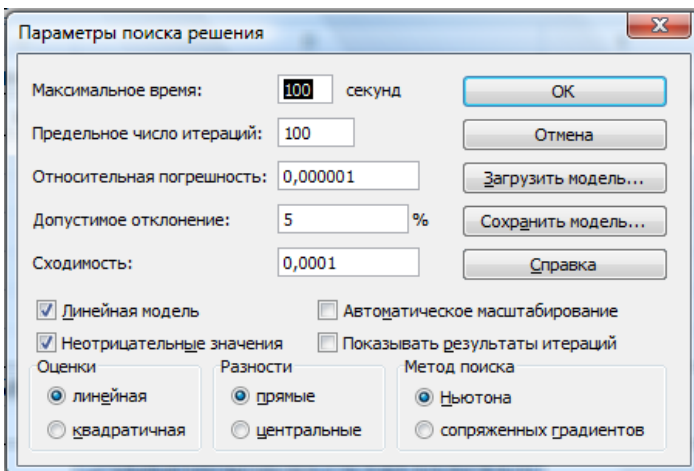


Рис. 2.14. Диалоговое окно *Параметры поиска решения*

Замечание 2.12. В этом окне можно также определить параметры процесса решения: предельное время поиска решения, максимальное количество итераций, точность и т.д.

5. *Запуск задачи на решение*

Для поиска решения задачи нажмем кнопку **Выполнить** окна **Поиск решения**. После этого появится окно **Результаты поиска решения** с сообщением о том, что решение найдено (рис. 2.15), или о том, что нельзя найти подходящего решения. Результаты решения можно сохранить в виде сценария, добавить листы отчетов, отказаться от полученного решения и восстановить исходные значения переменных.

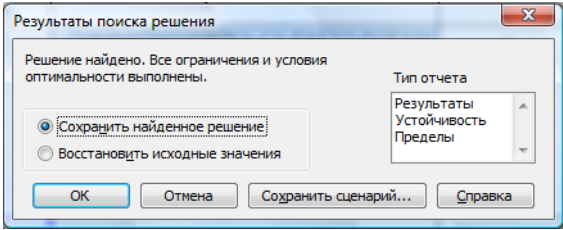


Рис. 2.15. Диалоговое окно **Результаты поиска решения**

Для получения решения прямо в экранной форме (рис. 2.16) нажмем кнопку **ОК** окна **Результаты поиска решения**.

	A	B	C	D	E	F
1	Ресурсы и спрос	Переменные		Ограничения	Отношения	Запасы
2		x ₁	x ₂			
3	Время 1	2	7	30	≤	66
4	Время 2	3	5	45	≤	45
5	Время 3	2	4	30	≤	58
6	Время 4	1	6	15	≤	72
7	Спрос 1	1	0	15	≤	15
8	Спрос 2	0	1	0	≤	12
9	Цена	156	168			
10	План выпуска	15	0			
11	Прибыль (ЦФ)			2340		
12						

Рис. 2.16. Экранная форма задачи после получения решения

2.3.2. Анализ оптимального решения на устойчивость в Excel

На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т.д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи линейного программирования, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает задача анализа устойчивости задачи линейного программирования, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Свойство устойчивости в общем случае – это сохранение оптимальности решения при небольших отклонениях параметров. Если значение оптимального решения резко меняется при небольших отклонениях параметров, то такой моделью сложно пользоваться на практике, где изменения цен и запасов – явление обыденное.

Анализ решения задач линейного программирования основывается на варьировании параметров a_{ij}, b_i, c_j ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Интервалы изменения параметров задачи, для которых решение не изменяется, называется областью устойчивости.

Проверим решение задачи линейного программирования (пример 2.2) на устойчивость к изменению параметров модели. Для этого необходимо после запуска в Excel задачи на решение в окне **Результаты поиска решения** выделить с помощью мыши два типа отчетов: **Результаты** и **Устойчивость** (рис. 2.15).

Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рис. 2.17):

- таблица 1 содержит информацию о целевой функции;
- таблица 2 содержит информацию о значениях переменных, полученных в результате решения задачи;
- таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений задачи.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам						
2	Рабочий лист: [лин прог.xlsx]Лист1						
3	Отчет создан: 31.03.2010 12:18:55						
4							
5							
6	Целевая ячейка (Максимум)						
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
8	\$D\$11	Прибыль (ЦФ) Ограничения	0	2340			
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
13	\$B\$10	План выпуска x1	0	15			
14	\$C\$10	План выпуска x2	0	0			
15							
16							
17	Ограничения						
18	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	
19	\$D\$3	Время 1 Ограничения	30	\$D\$3<=\$F\$3	не связан.	36	
20	\$D\$4	Время 2 Ограничения	45	\$D\$4<=\$F\$4	связанное	0	
21	\$D\$5	Время 3 Ограничения	30	\$D\$5<=\$F\$5	не связан.	28	
22	\$D\$6	Время 4 Ограничения	15	\$D\$6<=\$F\$6	не связан.	57	
23	\$D\$7	Спрос 1 Ограничения	15	\$D\$7<=\$F\$7	связанное	0	
24	\$D\$8	Спрос 2 Ограничения	0	\$D\$8<=\$F\$8	не связан.	12	

Рис. 2.17. Лист отчета по результатам

Если ресурс используется полностью (то есть ресурс **дефицитный**), то в графе **Статус** (*Состояние*), соответствующее ограничение указывается как "связанное"; при неполном использовании ресурса (то есть ресурс **недефицитный**) в этой графе указывается "не связан". В графе **Значение** приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий (строки 23, 24 рис. 2.17) в графе **Разница** показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица 3 отчета по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов недефицитных ресурсов при сохранении полученного оптимального значения целевой функции. Так, если на ресурс наложено ограничение типа «больше или равно», то в графе **Разница** дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма.

Если на ресурс наложено ограничение типа «меньше или равно», то в графе **Разница** дается количество ресурса, которое не используется при реализации оптимального решения. Так, анализ строки 19 (рис. 2.17) отчета по результатам для задачи о молочном комбинате показывает, что время работы 1-го цеха составило 30 ч. Неизрасходованным остается 36 ч из общего фонда времени, отведенного на производство сыров. Из этого следует, что запас недефицитного ресурса «Время 1» можно уменьшить на 36 ч и это никак не повлияет на оптимальное решение.

Анализ строки 24 показывает, что общее количество выпускаемого сыра «Петровский» составляет 0 тонн, что меньше предполагаемого рыночного спроса на 12 тонн. То есть запас недефицитного ресурса «Спрос 2» может быть уменьшен до 0 тонн и это никак не повлияет на оптимальное решение задачи. Другими словами, уменьшение спроса до 0 тонн в месяц никак не скажется на оптимальных объемах выпуска сыров.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что существуют причины (ограничения), не позволяющие молочному комбинату выпускать большее количество сыров и получать большую прибыль. Проанализировать эти причины позволяет отчет по устойчивости.

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рис. 2.18).

Таблица 1 содержит информацию, относящуюся к переменным:

- результат решения задачи;
- нормированную стоимость;
- коэффициенты целевой функции;
- предельные значения приращения целевых коэффициентов.

Нормированная стоимость показывает, насколько изменится значение целевой функции в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи (рис. 2.18) нормированная стоимость для сыра «Петровский» равна –92 тыс. руб./т (строка 10). Это означает, что если, не-

смотря на полученное оптимальное решение, включить в план выпуска 1 тонну сыра «Петровский», то новый план выпуска принесет прибыль 2248 тыс. руб. в месяц, что на 92 тыс. руб. меньше, чем в прежнем оптимальном решении.

Предельные значения приращения целевых коэффициентов, при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение. Например, допустимое увеличение цены на сыр «Нежный» (за 1 т) практически неограниченно, а допустимое уменьшение равно 55,2 тыс. руб./т (строка 9 на рис. 2.18). Это означает, что если цена на сыр «Нежный» уменьшится более чем на 55,2 тыс. руб./т, то оптимальное решение изменится. А если цена будет возрастать, то оптимальное решение останется прежним.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости								
2	Рабочий лист: [лин прог.xlsx]Лист1								
3	Отчет создан: 31.03.2010 12:18:55								
4									
5									
6	Изменяемые ячейки								
7				Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое	
8	Ячейка	Имя		значение	стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение	
9	\$B\$10	План выпуска x1		15	0	156	1E+30	55,2	
10	\$C\$10	План выпуска x2		0	-92	168	92	1E+30	
11									
12	Ограничения								
13				Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое	
14	Ячейка	Имя		значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение	
15	\$D\$3	Время 1 Ограничения		30	0	66	1E+30	36	
16	\$D\$4	Время 2 Ограничения		45	52	45	0	45	
17	\$D\$5	Время 3 Ограничения		30	0	58	1E+30	28	
18	\$D\$6	Время 4 Ограничения		15	0	72	1E+30	57	
19	\$D\$7	Спрос 1 Ограничения		15	0	15	1E+30	0	
20	\$D\$8	Спрос 2 Ограничения		0	0	12	1E+30	12	
21									

Рис. 2.18. Лист отчета по устойчивости

Замечание 2.13. При выходе за указанные в отчете по устойчивости пределы изменения цен оптимальное решение может меняться как по номенклатуре выпускаемой продукции, так и по объемам выпуска (без изменения номенклатуры).

Таблица 2 (рис. 2.18) содержит информацию, относящуюся к ограничениям:

- величина использованных ресурсов в колонке **Результ. значение**;

- предельные значения приращения ресурсов;
- ценность дополнительной единицы i -го ресурса (теневая цена).

В графе **Допустимое Уменьшение** показывают, насколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Рассмотрим анализ дефицитных ресурсов, так как анализ недефицитных ресурсов был дан в отчете по результатам. Анализируя отчет по результатам, установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие молочному комбинату выпускать большее, чем в оптимальном решении, количество сыра и получать более высокую прибыль. В рассматриваемой задаче такими ограничениями являются дефицитные ресурсы «Время 2» и «Спрос 1». Поскольку знак ограничений этих ресурсов имеет вид «меньше или равно», то возникает вопрос, насколько максимально можно увеличить время работы 2-го цеха и насколько должен возрасти спрос на сыр «Нежный», чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе **Допустимое Увеличение**. Время работы 2-го цеха увеличить без изменения оптимального решения нельзя, т.к. допустимое увеличение равно 0 (строка 16 на рис. 2.18). Спрос же на сыр «Нежный» может неограниченно возрастать, что приведет к новым оптимальным решениям.

Ценность дополнительной единицы i -го ресурса (**теневая цена**) рассчитывается только для дефицитных ресурсов. После определения дефицитных ресурсов возникает следующий вопрос. Какой из дефицитных ресурсов нужно увеличивать в первую очередь? Ответ на этот вопрос дает графа **Теневая цена**. Чем выше значение теневой цены, тем выше ценность ресурса.

2.4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

2.4.1. Постановка и математическая модель транспортной задачи

Транспортные задачи (ТЗ) – это специальный класс задач линейного программирования. Они предназначены для разработки наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных и повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятия, связанные со снабжением сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д.

Стандартная транспортная задача определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

В общем случае транспортную модель можно применять для описания ситуаций, связанных с управлением запасами, управлением движением капиталов, составлением расписаний, назначением персонала и др.

Экономическая постановка транспортной задачи следующая. Имеется m поставщиков и n потребителей некоторой продукции. Заданы тарифы (стоимость) перевозок единицы продукции от поставщиков к потребителям, известны объемы запасов у поставщиков и потребности каждого потребителя в продукции.

Требуется составить план поставок продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной.

Математическая постановка транспортной задачи закрытого типа имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (2.10)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}), \quad (2.11)$$

где m - количество поставщиков;

n - количество потребителей;

a_i - запасы продукции у поставщиков;

b_j - спрос на продукцию потребителей;

c_{ij} - тариф (стоимость) перевозки единицы продукции от i -го поставщика к j -му потребителю;

x_{ij} - количество единиц поставляемого груза (продукции) от i -го поставщика к j -му потребителю.

Целевая функция (2.8) представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Система ограничений (2.9) указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта (баланс по строкам). Система ограничений (2.10) указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте (баланс по столбцам).

Транспортная задача называется **закрытой**, если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (2.12)$$

т.е. суммарный объем отправляемых грузов равен суммарному объему потребности в этих грузах по пунктам назначения. В противном случае задачу называют **открытой**.

Исходные данные транспортной задачи можно представить в виде **таблицы поставок** (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Таблица поставок

Поставщики	Потребители				Запасы продукции
	1	2	...	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности в продукции	b_1	b_2	...	b_n	

Решение транспортной задачи называется **оптимальным планом перевозок** (поставок) продукции.

Рассмотрим содержательную постановку транспортной задачи и построим ее математическую модель.

Для составления математической модели необходимо:

- 1) обозначить переменные;
- 2) проверить условие баланса (2.12);
- 3) составить целевую функцию исходя из цели задачи;
- 4) записать системы ограничений.

Пример 2.8. Три плодовых хозяйства поставляют апельсины в ящиках четырем оптовым покупателям. Ежедневная потребность этих покупателей составляет 20, 110, 40 и 110 ящиков соответственно. Плодовые хозяйства могут ежедневно поставлять 60, 120 и 100 ящиков апельсинов соответственно. Транспортные расходы на один ящик апельсинов приведены в таблице.

Хозяйства	Покупатели			
	1	2	3	4
1	1	2	5	3
2	1	6	5	2
3	6	3	7	4

Требуется найти оптимальный план поставок.

Построение модели

1) Обозначим количество ящиков, перевозимых из i -го хозяйства в j -й пункт потребления через x_{ij} .

2) Проверим равенство суммарного производства апельсинов и суммарного спроса

$$(20+110+40+110) = (60+120+100),$$

откуда следует вывод – задача закрытого типа, поскольку спрос на апельсины равен объему их производства.

3) Суммарные затраты в рублях на ежедневную перевозку апельсинов определяются по формуле

$$F = 1x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 3x_{14} + 1x_{21} + 6x_{22} + 5x_{23} + 2x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min.$$

4) Запишем ограничения задачи. Баланс по строкам и по столбцам имеет вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 120, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100, \\ \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110, \end{cases} \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи составлена.

2.4.2. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Являясь задачей линейного программирования, транспортная задача может быть решена симплекс-методом. Но благодаря особенностям переменных задачи и системы ограничений существуют менее громоздкие методы ее решения. Наиболее применяемым мето-

дом является метод потенциалов, при котором каждой i -й строке (i -му поставщику) устанавливается потенциал u_i , который можно интерпретировать как цену продукта в пункте поставщика, а каждому столбцу j (j -му потребителю) устанавливается потенциал v_j , который можно принять условно за цену продукта в пункте потребителя. В простейшем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пункте поставщика плюс транспортные расходы на его доставку, т.е.

$$v_j = u_i + c_{ij}. \quad (2.13)$$

При решении задачи используется свойство, которое состоит в том, что ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных системы ограничений транспортной задачи равен $m + n - 1$, где m и n – количество поставщиков и потребителей соответственно. Из этого следует, что решение транспортной задачи должно содержать $m + n - 1$ базисных переменных и $m \cdot n - (m + n - 1)$ небазисных, равных нулю неизвестных. Вследствие этого при любом допустимом базисном решении в матрице перевозок (таблице поставок) будет занято ровно $m + n - 1$ клеток, которые называют базисными в отличие от остальных свободных клеток.

Если в решении транспортной задачи число отличных от нуля неизвестных равно $m + n - 1$, то решение называется **невырожденным**, а если их меньше, то **вырожденным**.

Для решения задачи (2.8) - (2.11) составляется таблица поставок (табл. 2.10).

Решение транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1. Первоначальное закрепление потребителей за поставщиками (построение начального опорного плана перевозок). Для реализации этого этапа имеется ряд методов.

2. Построение системы потенциалов и проверка начального опорного плана на оптимальность. В случае его неоптимальности переходят к третьему этапу.

3. Корректировка плана прикрепления потребителей к поставщикам. После чего переходят ко второму этапу.

Таблица поставок

Поставщики	Потребители				Запасы продукции	u_i
	1	2	...	n		
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1	u_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2	u_2
...	...	...	...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m	u_m
Потребности в продукции	b_1	b_2	...	b_n		
v_j	v_1	v_2	...	v_n		

Начальный опорный план перевозок является допустимым решением транспортной задачи и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов. Существует несколько методов нахождения начального опорного плана: **метод северо-западного угла**, **метод минимальной стоимости** и другие.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только способом выбора клетки для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода. В каждом из этих методов при заполнении некоторой клетки, кроме последней, вычеркивается или только строка матрицы перевозок, или только столбец. Такой подход гарантирует, что базисных клеток будет ровно $m + n - 1$.

Замечание 2.14. Если при заполнении некоторой (не последней) клетки одновременно удовлетворяются мощности и поставщика, и потребителя (т.е. из рассмотрения выпадают одновременно и строка и столбец), то вычеркивается, например, только строка, а в соответствующем столбце заполняется незапятнанная клетка так называемой «нулевой поставкой», после чего вычеркивается и столбец.

В **методе северо-западного угла** всегда в первую очередь заполняется клетка (из числа не вычеркнутых), стоящая в верх-

нем левом (северо-западном) углу таблицы поставок. В выбранную таким образом клетку записываем меньшее из чисел a_i и b_j . Из запаса i -го поставщика и потребностей j -го потребителя вычитаем эту величину. Исключаем из рассмотрения поставщика, запасы которого исчерпаны и /или потребителя, спрос которого полностью удовлетворен. Так повторяем до тех пор, пока все запасы продукции не будут исчерпаны.

В методе минимальной стоимости заполнение клеток таблицы поставок проводится с учетом значений величин c_{ij} . Сначала заполняют клетки с наименьшей стоимостью. При этом из двух клеток с одинаковой стоимостью перевозок предпочтение отдается клетке, через которую осуществляется больший объем перевозок. Заполнение выбранной клетки производится по правилам, описанным выше.

Рассмотрим пример построения начального опорного плана методом северо-западного угла

Пример 2.9. Занесем данные транспортной задачи (пример 2.8) в таблицу поставок (табл. 2.11) и найдем опорный план перевозок методом северо-западного угла.

Таблица 2.11

Исходная таблица поставок

Хозяйства	Покупатели				Запасы продукции
	1	2	3	4	
1	1	2	5	3	60
2	1	6	5	2	120
3	6	3	7	4	100
Потребности в продукции	20	110	40	110	

Решение

В соответствии с методом северо-западного угла заполнение клеток (распределение объемов пунктов отправления по пунктам назначения) начинается с верхней левой клетки и про-

должается вниз и вправо (по диагонали). Занятые клетки будем отмечать диагональной чертой.

По указанному правилу заполняем первую клетку на основе следующего условия:

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{20, 60\} = 20.$$

Таким образом, первый пункт назначения загружен (клетки первого столбца отмечены пунктиром), а первый пункт отправления имеет остаток груза $60 - 20 = 40$, которые и распределяем на второй пункт назначения:

$$x_{12} = \min\{110, 60 - 20\} = 40 \text{ и т. д.}$$

Найденный опорный план (табл. 2.12) является допустимым и невырожденным, так как выполняется условие $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ (в нашем примере число занятых клеток равно 6).

Таблица 2.12

Начальный план перевозок

Хозяйства	Покупатели				Запасы продукции
	1	2	3	4	
1	1 20	2 40	5	3	60
2	1	6 70	5 40	2 10	120
3	6	3	7	4 100	100
Потребности в продукции	20	110	40	110	

Затраты на перевозку апельсин для данного плана равны:

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 6 \cdot 70 + 5 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 100 \\ &= 1140 \text{ руб.} \end{aligned}$$

Сформулируем *алгоритм метода потенциалов для закрытой транспортной задачи*

1. Построение начального опорного плана перевозок.

Начальный опорный план можно составить одним из перечисленных выше методов.

2. Проверка оптимальности полученного плана перевозок. Для данного базисного распределения поставок находятся потенциалы поставщиков u_i ($i = \overline{1, m}$) и потребителей v_j ($j = \overline{1, n}$) таким образом, чтобы для заполненной клетки (i, j) выполнялось равенство (2.13).

Замечание 2.15. Так как в опорном плане заполнено $m + n - 1$ клеток таблицы поставок, то для нахождения потенциалов по данному плану можно составить систему из $m + n - 1$ линейно независимых уравнений с $m + n$ неизвестными. Такая система является неопределенной, и поэтому одной неизвестной (обычно u_1) придают нулевое значение, а остальные находятся однозначно по формуле (2.13).

Чтобы оценить оптимальность распределения, для всех клеток (i, j) таблицы поставок определяются их оценки по формуле:

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - v_j. \quad (2.14)$$

Если для всех свободных клеток $d_{ij} \geq 0$, то опорный план транспортной задачи является оптимальным (решение задачи завершено). Если же для некоторых свободных клеток таблицы $d_{ij} \leq 0$, то переходят к третьему этапу.

Замечание 2.16. Если оценки всех свободных клеток строго больше нуля, то найденный оптимальный план является единственным. Наличие нулевых оценок свободных клеток в оптимальном плане перевозок свидетельствует о неединственности оптимального плана.

3. Улучшение неоптимального плана перевозок (циклы перераспределения). Чтобы улучшить неоптимальный план перевозок, выбирается клетка таблицы поставок с отрицательной оценкой.

Замечание 2.17. Если таких клеток несколько, то выбирается клетка с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой.

Для выбранной клетки строится замкнутая линия (контур), начальная вершина которой лежит в выбранной клетке, а все остальные вершины находятся в занятых клетках. При этом

направления отдельных отрезков контура могут быть только горизонтальными и вертикальными. Число отрезков контура, как и его вершин, будет четным.

Замечание 2.18. Нельзя рассматривать как вершины клетки, где горизонтальные и вертикальные отрезки контура пересекаются.

В вершинах контура расставляются поочередно знаки «+» и «-», начиная со знака «+» в выбранной свободной клетке.

Величина перераспределяемой поставки определяется как наименьшая из величин поставок в вершинах контура со знаком «-». На эту величину увеличиваются поставки в вершинах со знаком «+» и уменьшаются поставки в вершинах со знаком «-». Это правило гарантирует, что в вершинах контура не появятся отрицательных поставок, начальная выбранная клетка окажется занятой, в то время как одна из занятых клеток при этом обязательно освободится. После чего переходят ко второму этапу.

Замечание 2.19. Если величина перераспределяемой поставки равна поставкам не в одной, а в нескольких вершинах контура со знаком «-», то освобождается только одна клетка, обычно с наибольшей стоимостью перевозки, а все другие такие клетки остаются занятыми с нулевой поставкой.

Пример 2.10. Рассмотрим работу алгоритма на данных, приведенных в примере 2.8. Начальный план перевозок этой задачи получен методом северо-западного угла (табл. 2.12). Применяя далее алгоритм решения задачи, найдем потенциалы поставщиков и потребителей. Полагая $u_1 = 0$ и, пользуясь соотношением (2.13), определяем потенциалы:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = u_1 + c_{11} = 0 + 1 = 1 \\ v_2 = u_1 + c_{12} = 0 + 2 = 2 \\ u_2 = v_2 - c_{22} = 2 - 6 = -4 \\ v_3 = u_2 + c_{23} = -4 + 5 = 1 \\ v_4 = u_2 + c_{24} = -4 + 2 = -2 \\ u_3 = v_4 - c_{34} = -2 - 4 = -6. \end{cases}$$

Результаты расчета потенциалов представлены в таблице 2.13.

Таблица 5.13

Начальный план перевозок с найденными потенциалами

Хозяйства	Покупатели				Запасы про- дукции	u_i
	1	2	3	4		
1	1 20	2 40	5	3	60	0
2	1	6 70	5 40	2 10	120	-4
3	6	3	7	4 100	100	-6
Потребности в продукции	20	110	40	110		
v_j	1	2	1	-2		

Рассчитаем элементы матрицы оценок по соотношению (2.14):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наличие большого числа отрицательных оценок свободных клеток свидетельствует о том, что данный план перевозок далек от оптимального.

Чтобы улучшить неоптимальный план перевозок, выберем клетку таблицы поставок с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой (это клетка (3, 2)).

Строим замкнутый контур (табл. 2.14) и находим величину перераспределяемой поставки. Величина перераспределяемой поставки определяется как наименьшая из величин поставок в вершинах контура со знаком «-»:

$$Q = \min(70, 100) = 70.$$

Таблица 2.14

Таблица поставок с циклом перераспределения

Хозяйства	Покупатели				Запасы про- дукции	u_i
	1	2	3	4		
1	1 20	2 40	5	3	60	0
2	1	6 - 70	5 40	2 + 10	120	-4
3	6	3 +	7	4 - 100	100	-6
Потребности в продукции	20	110	40	110		
v_j	1	2	1	-2		

Осуществляем перераспределение груза по циклу, добавляя величину $Q = 70$ в клетках со знаком «+» и вычитая в клетках со знаком «-». В результате получаем новый опорный план (табл. 2.15).

Таблица 2.15

Новый (второй) план перевозок

Хозяйства	Покупатели				Запасы про- дукции	u_i
	1	2	3	4		
1	1 20	2 40	5	3	60	0
2	1	6	5 40	2 80	120	1
3	6	3 70	7	4 30	100	-1
Потребности в продукции	20	110	40	110		
v_j	1	2	6	3		

В соответствии с алгоритмом решения задачи рассчитаем потенциалы (табл. 2.15) и проверим полученный план на оптимальность, составив матрицу оценок:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $d_{13} = -1 \leq 0$, то план в таблице 5.15 неоптимальный.

Построим замкнутый контур и перераспределим поставку $Q = 30$ по циклу (табл. 2.16).

Таблица 2.16

Таблица поставок с новым циклом перераспределения

Хозяйства	Покупатели				Запасы про- дукции	u_i
	1	2	3	4		
1	1 20	2 - 40	5 +	3	60	0
2	1	6	5 - 40	2 + 80	120	1
3	6	3 + 70	7	4 - 30	100	-1
Потребности в продукции	20	110	40	110		
v_j	1	2	6	3		

В результате получаем новый опорный план (табл. 2.17), который проверяем на оптимальность.

Таблица 2.17

Оптимальный план перевозок

Хозяйства	Покупатели				Запасы про- дукции	c_i
	1	2	3	4		
1	1 20	2 10	5 30	3	60	0
2	1	6	5 10	2 110	120	0
3	6	3 100	7	4	100	-1
Потребности в продукции	20	110	40	110		
v_j	1	2	5	2		

Так как оценки всех свободных клеток неотрицательны

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то найденный план перевозок является оптимальным.

Суммарные минимальные затраты на перевозку апельсинов:

$$F = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 100 = 760.$$

Эти минимальные затраты достигаются при следующих объемах перевозок:

$$x_{11} = 20, x_{12} = 10, x_{13} = 30, x_{23} = 10, x_{24} = 110, x_{32} = 100.$$

Остальные неизвестные равны нулю.

2.4.3. Транспортная задача с нарушенным балансом

Если баланс (2.12) не выполняется, то ограничения (2.9) или (2.10) имеют вид неравенств типа «меньше или равно». Транспортная задача в таком случае называется **открытой**. Для решения открытой транспортной задачи методом потенциалов ее сводят к закрытой задаче.

Случай 1. Если суммарная мощность потребителей больше суммарной мощности поставщиков

$$\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i,$$

то в рассмотрение вводится «фиктивный поставщик» $((m+1)$ -й) с потребностью

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i,$$

а к таблице поставок присоединяется дополнительная строка. Коэффициенты затрат этой добавленной строки определяются издержками ввиду недогрузки мощностей потребителей. Если информация об этих издержках отсутствует, то их принимают равными одному и тому же числу (например, нулю).

Случай 2. Если суммарная мощность поставщиков больше суммарной мощности потребителей

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

то в рассмотрение вводится «фиктивный потребитель» $((n+1)$ -й) с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j,$$

а к таблице поставок присоединяется дополнительный столбец. Коэффициенты затрат этого добавленного столбца соответствуют затратам на хранение неотправленного груза (поставки последнего – неотправленный груз для каждого из поставщиков). Если информация об этих издержках отсутствует, то их принимают равными одному и тому же числу (например, нулю).

Пример 2.11. Три плодовых хозяйства поставляют апельсины в ящиках четырем оптовым покупателям. Ежедневная потребность этих покупателей составляет 45, 35, 55 и 65 ящиков

соответственно. Плодовые хозяйства могут ежедневно поставлять 40, 60 и 90 ящиков апельсинов соответственно. Транспортные расходы на один ящик апельсинов приведены в таблице.

Хозяйства	Покупатели				Запасы продукции
	1	2	3	4	
1	4	1	2	5	40
2	3	2	3	7	60
3	4	4	5	2	90
Потребности в продукции	45	35	55	65	

Требуется найти оптимальный план поставок.

Построение модели

1) Обозначим количество ящиков, перевозимых из i -го хозяйства в j -й пункт потребления через x_{ij} .

2) Проверим равенство суммарного производства апельсинов и суммарного спроса

$$(45+35+55+65) > (40+60+90),$$

откуда следует вывод – задача открытого типа, поскольку спрос на апельсины превышает объем их производства.

3) Суммарные затраты в рублях на ежедневную перевозку апельсинов определяются по формуле

$$F = 4x_{11} + 1x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 7x_{24} + 4x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min.$$

4) Запишем ограничения задачи. Баланс по строкам и по столбцам имеет вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 35, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 55, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 65, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}).$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи составлена.

Для решения открытой транспортной задачи сведем ее к закрытой. Поскольку суммарный спрос потребителей больше, чем суммарная мощность поставщиков введем «фиктивного» поставщика и в таблицу поставок добавим дополнительную строку так, чтобы задача стала закрытой. Для этого мощность «фиктивного» поставщика следует принять равной $10 = 200 - 190$. Коэффициенты затрат этой добавленной строки определяются издержками ввиду недогрузки мощностей потребителей. Так как информация об этих издержках отсутствует, примем их равными нулю (табл. 2.18).

Таблица 2.18

Таблица поставок с введенным «фиктивным» поставщиком

Хозяйства	Покупатели				Запасы продукции
	1	2	3	4	
1	4	1	2	5	40
2	3	2	3	7	60
3	4	4	5	2	90
4	0	0	0	0	10
Потребности в продукции	45	35	55	65	

После введения «фиктивного» поставщика задача решается как закрытая (см. пример 2.10).

2.4.4. Решение транспортной задачи средствами табличного процессора Excel

Транспортная задача вводится и решается в Excel аналогично задаче линейного программирования. Специфика ввода условия транспортной задачи состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов целевой функции.

Решение транспортной задачи в Excel состоит из следующих шагов:

1. создание формы для ввода условий задачи;
2. ввод исходных данных;
3. определение целевой функции;
4. ввод ограничений;
5. проведение расчетов.

Применение информационных технологий Excel для решения транспортной задачи рассмотрим на примере 2.8.

Экранная форма для ввода условий задачи вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис. 2.19.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Матрица транспортных расходов					Целевая функция	
3		1	2	5	3			
4		1	6	5	2			
5		6	3	7	4			
6								
7								
8		Матрица перевозок				Ограничения	Отношения	Запасы
9							=	60
10							=	120
11							=	100
12	Ограничения							
13	Отношения	=	=	=	=			
14	Потребность	20	110	40	110			
15								

Рис. 2.19. Экранная форма задачи

В массив В3:Е5 введены значения стоимости перевозок единицы груза. В ячейки В14:Е14 введены величины спроса потребителей, в Н9:Н11 – запасов поставщиков. Массив В9:Е11 отведен под значения неизвестных x_{ij} (объемы перевозок).

В затененные области введем формулы для целевой функции и линейных ограничений (рис. 2.20). В ячейку G3 запишем целевую функцию, используя функцию СУММПРОИЗВ (В3:Е5; В9:Е11). В диапазоне Н9:Н11 запишем ограничения по поставщикам, а в ячейках В14:Е14 ограничения по потребителям. Для наглядности покажем знаки соотношений в ограничениях, ячейки G9:G11 и В13:Е13. Так как модель закрытая, то все знаки в форме равенств. Подготовленная таким образом информация в режиме чисел представлена на рис. 2.21.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Матрица транспортных расходов					Целевая функция	
3		1	2	5	3		=СУММПРОИЗВ(В3:Е5;В9:Е11)	
4		1	6	5	2			
5		6	3	7	4			
6								
7								
8		Матрица перевозок				Ограничения	Отношения	Запасы
9						=СУММ(В9:Е9)	=	60
10						=СУММ(В10:Е10)	=	120
11						=СУММ(В11:Е11)	=	100
12	Ограничения	=СУММ(В9:В11)	=СУММ(С9:С11)	=СУММ(Д9:Д11)	=СУММ(Е9:Е11)			
13	Отношения	=	=	=	=			
14	Потребность	20	110	40	110			
15								
16								

Рис. 2.20. Экранная форма задачи в режиме формул

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Матрица транспортных расходов					Целевая функция	
3		1	2	5	3		0	
4		1	6	5	2			
5		6	3	7	4			
6								
7								
8		Матрица перевозок				Ограничения	Отношения	Запасы
9						0	=	60
10						0	=	120
11						0	=	100
12	Ограничения	0	0	0	0			
13	Отношения	=	=	=	=			
14	Потребность	20	110	40	110			
15								

Рис. 2.21. Экранная форма задачи в режиме чисел

После ввода данных вызывается диалоговое окно **Поиск решения** командой **Поиск решения** из меню **Сервис**. В появившемся окне **Поиск решения** введем адрес ячейки с целевой функцией (G3), адреса изменяемых ячеек (B9:E11), установим направление оптимизации, а также введем ограничения задачи (рис. 2.22).

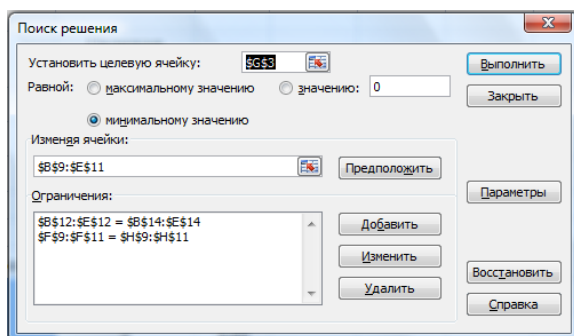


Рис. 2.22. Диалоговое окно **Поиск решения**

После заполнения всех полей окна **Поиск решения** нажмем кнопку **Параметры** и в открывшемся окне **Параметры**

поиска решения установим флажки *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. Вернувшись в окно *Поиск решения*, нажмем кнопку **Выполнить** и получим на экране результат решения задачи (рис. 2.23).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Матрица транспортных расходов					Целевая функция	
3		1	2	5	3		760	
4		1	6	5	2			
5		6	3	7	4			
6								
7								
8		Матрица перевозок				Ограничения	Отношения	Запасы
9		10	10	40	0	60	=	60
10		10	0	0	110	120	=	120
11		0	100	0	0	100	=	100
12	Ограничения	20	110	40	110			
13	Отношения	=	=	=	=			
14	Потребность	20	110	40	110			
15								

Рис. 2.23. Экранная форма задачи после получения решения

Суммарные минимальные затраты будут равны 760 при условии, что перевозки будут осуществляться в соответствии с оптимальным планом. Из которого видно, что первое хозяйство должно поставлять по 10 ящиков апельсин первому и второму покупателям, а третьему – 40 ящиков, второе хозяйство первому покупателю должно поставить 10 ящиков и 110 четвёртому, треть – 100 ящиков второму покупателю.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой общая задача линейного программирования?
2. Какие существуют формы представления моделей линейного программирования?

3. Как перейти от общей задачи линейного программирования к стандартной форме задачи линейного программирования?
4. В чем заключается идея и геометрический смысл симплекс-метода?
5. Опишите методику решения задачи линейного программирования графический метод.
6. Приведите алгоритм нахождения первоначального допустимого базисного решения задачи линейного программирования.
7. Приведите алгоритм нахождения оптимального решения задачи линейного программирования.
8. Что представляют собой двойственные задачи линейного программирования?
9. Дайте общую постановку транспортной задачи.
10. Охарактеризуйте методы нахождения начального решения транспортной задачи.
11. Опишите методику решения транспортной задачи методом потенциалов.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Во всяком производстве выпуск продукции происходит за счет затраты тех или иных ресурсов – запасов сырья, оборудования (которое при его использовании постепенно изнашивается), рабочей силы. Эти ресурсы могут измеряться в натуральных (килограммы, человеко-часы, киловатт-часы энергии и т.п.), или стоимостных (денежных) единицах. Далее ресурсы будут также именоваться **факторами** производства. В результате производственной деятельности происходит выпуск одного или нескольких видов продукции (далее будем рассматривать случай выпуска одного вида продукции).

Обозначим факторы производства x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а объем производства выпускаемого продукта – y . Очевидно, что объем производства должен зависеть от количества имеющихся ресурсов. Функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (3.1)$$

определяющая эту зависимость, называется **производственной функцией** (ПФ). В выражении производственной функции, кроме факторов производства, могут присутствовать также некие постоянные параметры a_j ($j = 1, 2, \dots, m$).

Если вид функции и значения ее параметров не зависят от времени, то она называется **статической**. Если с течением времени значения параметров меняются, или же время выступает в качестве самостоятельного фактора, то функция называется **динамической**.

Кроме того, как в статических, так и в динамических прикладных производственных функциях величины факторов и объема выпуска продукции "привязываются" к определенному конечному интервалу времени – месяцу, кварталу или году. В теоретических исследованиях удобнее использовать непрерывные производственные функции, в которых эти величины как

бы относят к бесконечно малому периоду времени, что позволяет использовать возможности дифференциального исчисления.

Аналогичное соображение можно высказать и в отношении зависимости производственных функций от других факторов – прикладные производственные функции часто дискретны (их факторы могут принимать только определенные значения). Например, если фактором является численность работников, то его значения могут быть только целыми. Теоретические производственные функции обычно непрерывны.

Конкретный вид производственной функции и значения ее параметров зависит от того, какая экономическая система моделируется, и какие цели преследуются при этом моделировании. Процесс выбора формы производственной функции называется ее **спецификацией**. Выбор может:

а) определяться теоретическими соображениями и представлениями об экономических процессах, происходящих в данной системе;

б) делаться на основе экспериментального (статистического) обследования сходных экономических систем.

Определение значений параметров производственной функции называется ее **параметризацией**. Оценки параметров производственной функции производятся методами регрессионного анализа на основе статистических обследований экономической системы.

Пример 3.1. Степенная производственная функция

$$y = a_0 x^{a_1} \quad (3.2)$$

является однофакторной. Ее параметры положительны; кроме того, обычно в реальных ситуациях $a_1 \leq 1$. В таком случае производственная функция имеет вид, показанный на рис. 3.1.

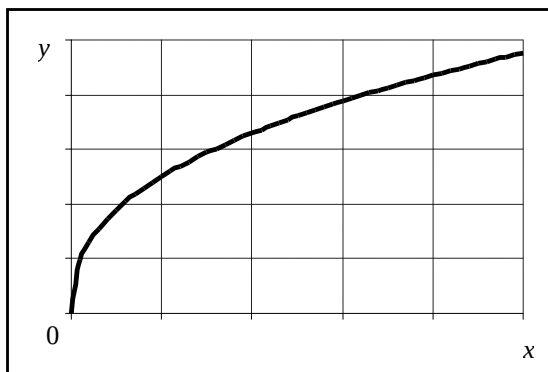


Рис. 3.1. Степенная производственная функция

Из графика видно, что при возрастании объема затрачиваемого ресурса увеличивается и выпуск продукции (что вполне естественно). Однако при увеличении значений x наклон графика падает. Это означает, что с ростом объемов производства каждая новая единица расходуемого ресурса позволяет получать все меньший прирост выпуска продукции. Эта закономерность выражает известный в экономической теории **закон убывающей эффективности**.

Пример 3.2. Двухфакторная производственная функция вида

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \quad (a_1 + a_2 = 1) \quad (3.3)$$

называется производственной **функцией Кобба-Дугласа** (ПФКД) по именам американских экономистов, которые в 1929 г. использовали ее для экономического моделирования.

Схематический график производственной функции Кобба-Дугласа представлен на рис. 3.2. Он представляет собой выпуклый "склон", возвышающийся в направлении одновременного возрастания факторов (вдоль пунктирной стрелки ОС).

Сечение графика, соответствующее постоянному значению одного фактора, описывается степенной функцией вида (3.2) (линия АВ). Поэтому для каждого фактора в отдельности выполняется закон убывающей эффективности.

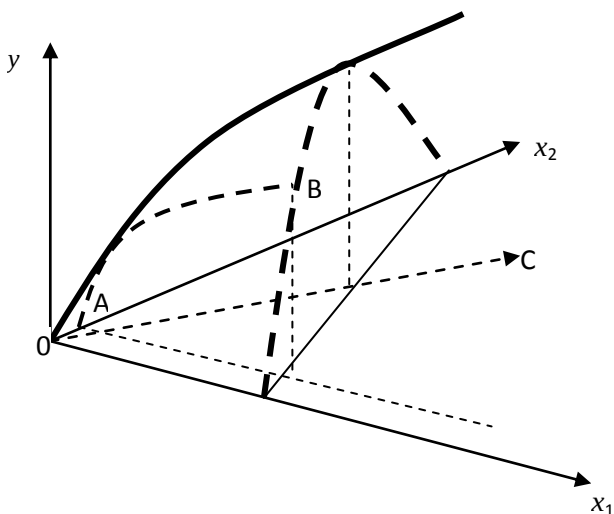


Рис. 3.2. Производственная функция Кобба-Дугласа

Важное значение при исследовании многофакторных производственных функций имеет анализ **линий уровня** (т.е., линий, во всех точках которых значение функции одинаково). Они называются **изоквантами**.

Изокванты производственной функции Кобба-Дугласа показаны на рис. 3.3. Они имеют вид гипербол. Увеличение объема выпуска соответствует переходу с линии на линию в направлении "вверх-вправо". Подобный график называется **картой изоквант**.

Анализируя карту изоквант производственной функции Кобба-Дугласа, можно отметить, что один и тот же выпуск продукции может быть достигнут двумя способами – при использовании малого объема первого ресурса и большого объема второго, и наоборот – если использовать большой объем первого ресурса и малый объем второго. Такое свойство производственной функции Кобба-Дугласа имеет наглядное отражение в реальной действительности.

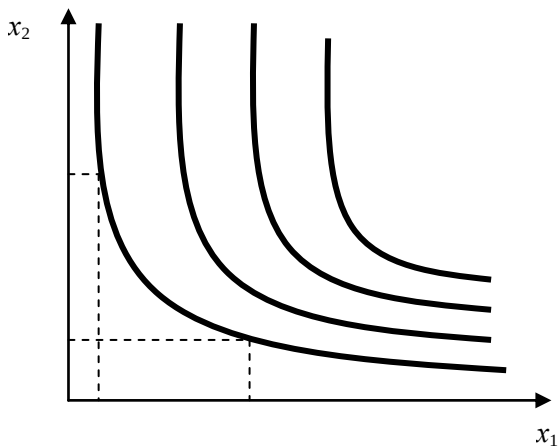


Рис. 3.3. Изокванты производственной функции Кобба-Дугласа

Представим себе, что один из факторов – это численность работников, второй – количество производственных фондов, приходящихся на одного работника (фондовооруженность). Тогда можно видеть, что при малой фондовооруженности для выполнения работы требуется использовать большое число работников – например, рыть котлован силами целой бригады землекопов с лопатами. Если же увеличить фондовооруженность (заменить лопату экскаватором), то для выполнения той же работы понадобится всего один экскаваторщик.

Производственные функции могут иметь различные области приложения. Для микроэкономических производственных функций областью приложения является отдельная фирма, производственный комплекс, отрасль. Макроэкономические производственные функции используются при моделировании региональных и национальных экономик. Основными факторами макроэкономических производственных функций являются K – объем используемого капитала, и L – затраты труда. Например, для экономики СССР за 1960-1985 гг. по результатам анализа экономических показателей была построена производственная функция

$$Y = 1,022 K^{0,5382} L^{0,4618}. \quad (3.4)$$

Для экономики США за 1950-1979 гг. аналогичная функция имеет вид

$$Y = 2,1005 K^{0,7986} L^{0,2014}. \quad (3.5)$$

Можно отметить, что объем производства в СССР сильнее зависел от численности работников (затрат труда), чем в США. Это может свидетельствовать о большей доле неквалифицированного труда в экономике СССР.

Производственные функции (3.2) и (3.3) являются статическими. Они не учитывают развитие средств производства вследствие научно-технического прогресса. Учет научно-технического прогресса приводит к появлению в производственной функции множителя вида $e^{\lambda t}$, где t – время, λ – положительный коэффициент.

3.2. МОДЕЛЬ СОЛОУ

3.2.1. Основные сведения

Модель Солоу (Роберт Солоу (род. 1924) – американский экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1987 г.) – это качественная модель, позволяющая оценить основные закономерности экономического роста и влияние отдельных факторов на этот процесс.

В модели Солоу рассматривается однопродуктовая экономическая система, в которой действует один обобщенный участник, являющийся одновременно производителем и владельцем факторов производства. Таких факторов имеется два – объем капитала $K(t)$ и затраты труда $L(t)$, являющиеся непрерывными функциями времени t . В любой момент времени выпуск продукции определяется производственной функцией

$$Y = F[K(t), L(t)] = Y(t). \quad (3.6)$$

Предполагается, что производственная функция $F(K, L)$ обладает следующими свойствами:

- Производственная функция является линейно-однородной. Это значит, что справедливо равенство:

$$F(mK, mL) = mF(K, L). \quad (3.7)$$

- Производственная функция удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} \xrightarrow{L \rightarrow 0} \infty, \quad \frac{\partial F}{\partial K} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \infty, \\ \frac{\partial F}{\partial L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\partial F}{\partial K} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

- Производственная функция **вогнута** по всем аргументам, т.е.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \quad (3.9)$$

Легко видеть, что такими свойствами обладает, например, производственная функция Кобба-Дугласа.

3.2.2. Уравнение накопления капитала

Произведенная продукция может быть использована либо на потребление $C(t)$, либо на сбережения, инвестируемые в расширение производства $I(t)$. Доля доходов, идущая на инвестиции (норма сбережения) s – является постоянной. Тогда

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + sY(t). \quad (3.10)$$

С течением времени капитал изнашивается. Допустим, что норма амортизации (доля утраченного капитала за единичный интервал времени) $\delta \in (0,1)$ также постоянна. Тогда валовые инвестиции за период времени dt будут равны сумме амортизационных расходов и чистого прироста капитала

$$I(t)dt = \delta K(t)dt + dK = \delta K(t)dt + \frac{\partial K}{\partial t} dt,$$

откуда

$$I(t) = sY(t) = \delta K(t) + \frac{\partial K}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Допустим, что прирост трудовых ресурсов за единицу времени пропорционален имеющемуся объему этих ресурсов:

$$dL = nLdt.$$

Отсюда

$$\frac{dL}{L} = ndt. \quad (3.12)$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\ln L = nt + C.$$

Константу C можно найти, если положить, что в начальный момент времени объем трудовых ресурсов составлял L_0 . Тогда:

$$\ln L_0 = C,$$

откуда

$$\ln L - \ln L_0 = \ln \frac{L}{L_0} = nt,$$

или

$$L = L_0 e^{nt}. \quad (3.13)$$

Полученная закономерность соответствует **модели Мальтуса**, описывающей прирост населения (и пропорциональный ему рост объема трудовых ресурсов) в условиях отсутствия безработицы и неограниченного удовлетворения жизненных потребностей. Величина n называется **темпом** роста трудовых ресурсов.

Разделим (3.11) почленно на L . С учетом однородности производственной функции (3.7)

$$\frac{1}{L} \frac{\partial K}{\partial t} + \delta \frac{K}{L} = s \frac{1}{L} F(K, L) = sF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = sf(\eta). \quad (3.14)$$

Величина $\eta = K / L$ представляет собой **капиталовооруженность** – размер капитала, приходящийся на одного работника. Приведенная функция

$$\sigma = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(\eta)$$

- это производительность труда, т.е. выпуск продукции в расчете на одного работника.

Рассмотрим скорость изменения капиталовооруженности. С учетом правил дифференцирования можно записать:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{K}{L} \right) = \frac{1}{L^2} \left(L \frac{\partial K}{\partial t} - K \frac{\partial L}{\partial t} \right) = \frac{1}{L} \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{K}{L^2} \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Но из (3.12) следует:

$$\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial t} = n.$$

Тогда в (3.15) получается:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{L} \frac{\partial K}{\partial t} - n\eta.$$

Подставив сюда вытекающее из (3.14) выражение

$$\frac{1}{L} \frac{\partial K}{\partial t} = sf(\eta) - \delta\eta,$$

получим **уравнение накопления капитала**:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = sf(\eta) - (\delta + n)\eta. \quad (3.16)$$

Рассмотрим статическое состояние системы, при котором капитал, приходящийся на одного работника, остается неизменным: $\eta = \eta^* = Const$. В этом случае производительность труда также постоянна: $\sigma^* = f(\eta^*) = Const$. Это значит, что запас капитала и выпуск продукции растут с тем же темпом, с которым растет население.

Из (3.16) тогда следует, что стационарная величина капиталовооруженности может быть найдена из уравнения:

$$sf(\eta^*) = (\delta + n)\eta^*. \quad (3.17)$$

Это уравнение имеет графическое решение, показанное на рис. 3.4.

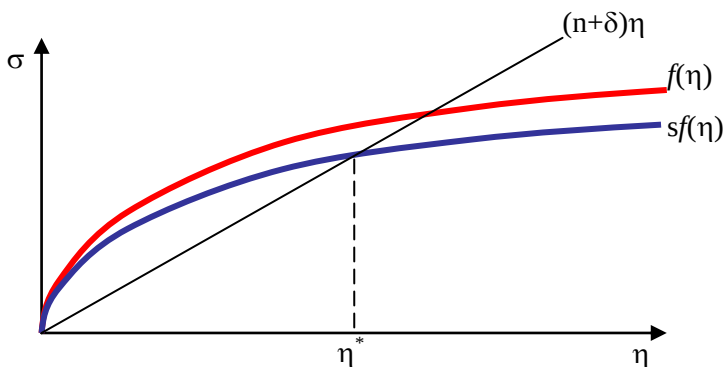


Рис. 3.4. Графическое решение для статического состояния

Наклонная прямая показывает объем инвестиций, необходимый для поддержания постоянной капиталовооруженности. Кривая $sf(\eta)$ показывает размер сбережений на душу населения, а расстояние между производственной функцией $f(\eta)$ и кривой сбережений $sf(\eta)$ – объем потребления на душу населения.

Точка пересечения кривой сбережений и наклонной прямой необходимых инвестиций определяет стационарный уровень капиталовооруженности η^* . Видно, что решение уравнения (3.17), а значит, и стационарное состояние системы, существует.

Из уравнения (3.17) можно понять, что при изменении нормы сбережения s должна измениться и стационарная капиталовооруженность η^* . Это можно также видеть и из рис. 3.4. Увеличение или уменьшение нормы сбережения приводит к смещению кривой сбережений соответственно вверх или вниз. При одном и том же положении прямой необходимых инвестиций точка пересечения кривой сбережений и прямой инвестиций в этих случаях смещается соответственно вправо или влево, что соответствует увеличению или уменьшению капиталовооруженности.

3.2.3. «Золотое правило» накопления капитала

Рассмотрим влияние изменения нормы сбережений на уровень потребления.

Из рис. 3.4. можно видеть, что объем потребления в статической точке $\eta = \eta^*$, который определяется расстоянием между графиком производственной функции и кривой сбережений, равен одновременно расстоянию между графиком производственной функции и прямой инвестиций в этой точке. Но это расстояние при смещении статической точки в одном и том же направлении может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Если первоначальная норма сбережений мала (s_1), статическая точка находится поблизости от начала координат. Тогда при смещении статической точки вправо (т.е., при увеличении нормы сбережений) указанное расстояние будет увеличиваться – потребление будет расти. Это можно видеть на рис. 3.5 (отрезок A_1B_1).

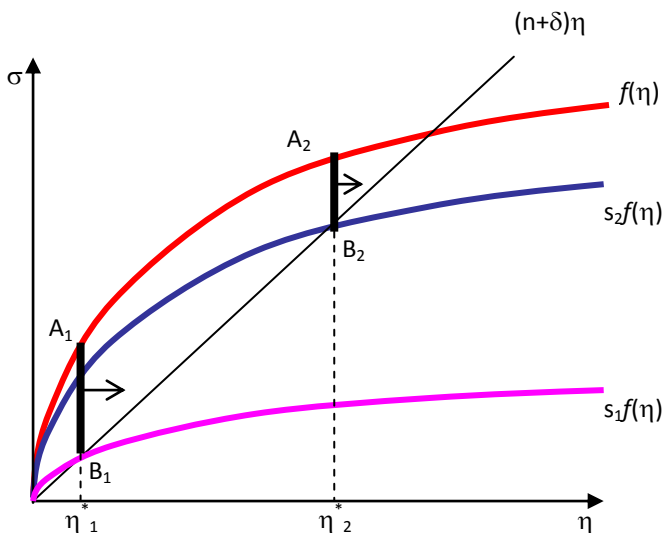


Рис. 3.5. Влияние нормы сбережений на уровень потребления

Это означает, что увеличение инвестирования средств в развитие производства в этом случае принесет настолько высокую отдачу, что результат позволит выделить больше средств и на потребление.

В случае высокой начальной нормы сбережений (s_2) дальнейшее ее увеличение будет приводить уже к уменьшению потребления (отрезок A_2B_2). Такие сбережения (и инвестиции) невыгодны, т.к. увеличение инвестирования в этом случае дает низкую отдачу.

Из этого можно заключить, что должна существовать такая норма сбережений s_m , при которой уровень потребления будет наибольшим. Инвестиции в этом случае также имеют максимальную эффективность. Определим эту норму.

Величина потребления, как уже сказано, равна разнице между доходом и сбережениями (инвестициями). С учетом (3.17) запишем:

$$c = f(\eta^*) - sf(\eta^*) = f(\eta^*) - (\delta + n)\eta^*. \quad (3.18)$$

Максимальное значение потребления на одного работника c определяется условием

$$\frac{dc}{ds} = 0.$$

Дифференцирование проводим с учетом того факта, что в поставленной нами задаче величина η^* сама является функцией нормы сбережения s :

$$\frac{dc}{ds} = \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{ds} - (\delta + n) \frac{d\eta}{ds} = \left[\frac{df}{d\eta} - (\delta + n) \right] \frac{d\eta}{ds}. \quad (3.19)$$

Как уже сказано, при увеличении нормы сбережения капиталовооруженность также увеличивается. Это означает, что производная $d\eta / ds$ положительна, и, следовательно, условие максимального потребления должно иметь вид:

$$\frac{df}{d\eta} - (\delta + n) = 0. \quad (3.20)$$

Это условие называют **золотым правилом накопления капитала**. Ему соответствует капиталовооруженность η_g , определяющая максимум возможного потребления на душу населения. Соответствующая золотому правилу норма сбережения определяется из (3.16)

$$s_g = \frac{(\delta + n)\eta_g}{f(\eta_g)}, \quad (3.21)$$

а величина максимального потребления – из (2.18):

$$c_g = f(\eta_g) - (\delta + n)\eta_g. \quad (3.22)$$

Решение уравнения (3.20) можно определить аналитически, если известно выражение производственной функции, или графически. Условие (3.20) означает, что в точке η_g наклон касательной к графику производственной функции $f(\eta)$ совпадает с наклоном прямой необходимых инвестиций. Приложив к графику линейку, направленную параллельно прямой инвестиций и

смещая ее вверх или вниз, надо найти такое ее положение, при котором линейка будет касаться графика производственной функции в единственной точке. Эта точка и определит капиталовооруженность, соответствующую золотому правилу.

Если система находится в статическом состоянии, которое соответствует золотому правилу, то уровень потребления на одного работника, являясь максимально возможным для данной системы, будет оставаться таким же и в дальнейшем, т.к. прирост населения будет компенсироваться соответствующим приростом объема производства.

Если норма сбережения превышает s_g , то, как уже сказано, инвестиции оказываются экономически неэффективными. Имеет смысл уменьшить эту норму до s_g . При этом сразу после момента снижения t_0 потребление резко (скачком) возрастет до значения, заметно превышающего s_g , а затем начнет постепенно снижаться, стремясь к этому значению. Динамика изменения уровня потребления для этого случая показана на рис. 3.6, а. В любом случае, после изменения нормы сбережения потребление всех последующих поколений окажется выше, чем было до этого изменения.

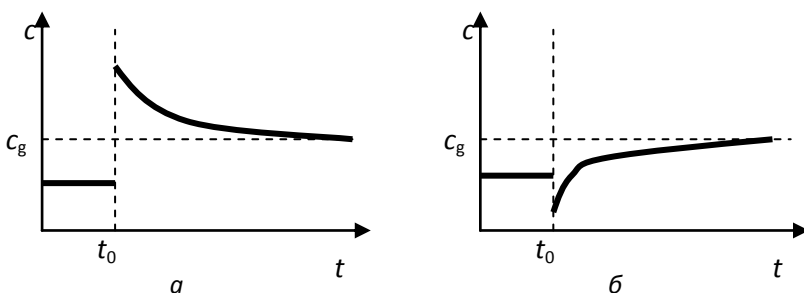


Рис. 3.6. Динамика изменения потребления после изменения нормы сбережения:

а) начальная норма сбережения выше s_g ; б) начальная норма сбережения ниже s_g

В случае, если норма сбережения ниже s_g , ее следует повысить до s_g . При этом, однако, сразу после момента изменения t_0 потребление резко падает, а затем начинает расти. Некоторое время после изменения нормы сбережения потребление будет ниже, чем до изменения, хотя в перспективе оно все-таки станет выше и будет стремиться к максимальному уровню c_g . Таким образом, можно сделать вывод, что непосредственно после проведенной реформы уровень жизни населения понизится. Следует пережить сложные времена, чтобы впоследствии достичь более высокого уровня жизни, чем до реформы.

Пример 3.3. Экономическая система описывается производственной функцией

$$Y = 2K^{0,75}L^{0,25}.$$

Нормы амортизации δ и коэффициент прироста трудовых ресурсов n равны 0,1. Необходимо определить величины нормы сбережения, объемы потребления и инвестирования на душу населения, соответствующие максимальному уровню потребления.

Решение

Производительность труда (приведенная производственная функция) описывается выражением (см. 3.14 и далее)

$$\sigma = f(\eta) = 2\eta^{0,75}.$$

Искомую капиталовооруженность находим из уравнения (3.20):

$$\left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_g} = (\delta + n) = 0,2$$

$$2 \cdot 0,75 \cdot \eta_g^{-0,25} = 0,2$$

$$\eta_g^{0,25} = 7,5$$

$$\eta_g = 7,5^4 = 316406.$$

Тогда производительность труда равна

$$\sigma_g = 2 \cdot (7,5^4)^{0,75} = 2 \cdot 7,5^{4 \cdot 0,75} = 2 \cdot 7,5^3 = 843,75.$$

Норма сбережения, соответствующая максимальному уровню потребления (золотому правилу накопления капитала) определяется из (3.21)

$$s_g = \frac{(\delta + n)\eta_g}{f(\eta_g)} = \frac{(\delta + n) \cdot \eta_g}{\sigma_g} = \frac{0,2 \cdot 316406}{843,75} = 0,75.$$

Объем сбережений (инвестиций) на душу населения

$$i = \frac{I}{L} = s_g \cdot \sigma_g = 0,75 \cdot 843,75 = 632,8.$$

Величина потребления на душу населения определяется из (3.22)

$$c_g = f(\eta_g) - (\delta + n) \cdot \eta_g = 843,75 - 0,2 \cdot 316406 = 210,93.$$

Можно также найти ее, как разницу между величиной производительности труда (843,75) и величиной инвестиций (632,8).

Пример 3.4. Произвести расчеты, аналогичные примеру 3.3, используя производственную функцию

$$Y = 2K^{0,5}L^{0,5}.$$

Нормы амортизации δ и коэффициент прироста трудовых ресурсов n принять прежними – по 0,1.

Решение

Производительность труда (приведенная производственная функция) описывается выражением (см. 3.14 и далее)

$$\sigma = f(\eta) = 2\eta^{0,5}.$$

Искомая капиталовооруженность:

$$\left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_g} = 0,2$$

$$2 \cdot 0,5 \cdot \eta_g^{-0,5} = 0,2$$

$$\eta_g = 5^2 = 25.$$

Производительность труда:

$$\sigma_g = 2 \cdot 25^{0,5} = 10.$$

Норма сбережения, соответствующая максимальному уровню потребления:

$$s_g = \frac{(\delta + n)\eta_g}{\sigma_g} = \frac{0,2 \cdot 25}{10} = 0,5.$$

Объем сбережений (инвестиций) на душу населения

$$i_g = s_g \cdot \sigma_g = 0,5 \cdot 10 = 5.$$

Величина потребления на душу населения

$$c_g = \sigma_g - i_g = 10 - 5 = 5.$$

Сравнивая полученные значения с примером 3.3, можно видеть, насколько меньше оказались во втором случае удельные значения сбережения и потребления. При этом разница в условиях задач заключается только в значениях показателей степени в формулах производственных функций этих задач (сравните значения этих коэффициентов с реальными показателями степени в макроэкономических производственных функций для СССР и США (3.4) и (3.5)).

Можно сделать вывод, что для повышения объема производства и уровня жизни населения необходимо менять структуру производственной функции, увеличивая зависимость объема производства от вложений капитала – т.е., увеличивая показатель степени при величине **K**. Как отмечено выше, это связано с автоматизацией производства и уменьшением доли неквалифицированного ручного труда.

3.3. БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

Допустим, что в некоторой экономической системе производятся, используются и обращаются N видов продукции. Каждая отрасль системы производит один продукт, и каждый продукт производится в отдельной отрасли. Производственный процесс в каждой отрасли использует для производства своего продукта некоторые (а возможно и все) виды производимой в системе продукции, и только их. Характеристики производственных процессов в отраслях предполагаются известными и постоянными, так что модель системы является статической (не учитывается изменение технологии производства вследствие технического прогресса). Кроме того, в ней не учитываются многие другие экономические факторы, такие, как, например, импорт товаров или сырья, использование невозпроизводимых ресурсов, и др.

Валовой выпуск i -го продукта необходимо разделить на две части: ту, которая потребляется отраслями системы на производственные нужды, и ту, которая должна потребляться населением на непроизводственные нужды (конечный спрос на продукт).

Обозначим через a_{ij} количество i -продукта, которое используется для производства единицы j -продукта. Тогда общее потребление i -продукта на нужды производства во всех отраслях составляет

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Чистый выпуск i -продукта составит

$$x_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Если известен конечный спрос на каждый продукт y_i , то из естественного требования баланса спроса и предложения получается система линейных алгебраических уравнений вида

$$x_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = y_i, \quad (i=1,2,\dots,N), \quad (3.23)$$

называемая **моделью Леонтьева** (Василий Леонтьев (1905-1999) – американский математик и экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1973 г.).

Систему (3.23) можно представить в матричной форме

$$(I - A) \cdot X = Y. \quad (3.24)$$

Здесь **A** – квадратная **матрица затрат**, или **технологическая матрица**, размером $N \times N$ с элементами a_{ij} ($i, j=1,2,\dots,N$); **I** – единичная матрица размером $N \times N$; **X** и **Y** – вектора-столбцы из N элементов каждый, содержащие, соответственно, искомые значения объемов выпуска и заданные значения объемов конечного спроса на отдельные продукты.

Решив систему (3.23), можно определить объемы выпуска каждого вида продукции, необходимые для устойчивого функционирования системы.

Система линейных уравнений, представляющая модель Леонтьева, имеет одно важное ограничение – все ее элементы (коэффициенты затрат a_{ij} , величины конечного спроса y_i и объемы выпуска продукции x_i) должны быть неотрицательными. Однако легко понять, что в общем случае в решении системы линейных уравнений могут иметься отрицательные компоненты даже в том случае, если все ее коэффициенты и свободные члены неотрицательны.

Если все компоненты решения системы (3.23) неотрицательны, то модель называется **продуктивной**. Определение продуктивности модели является важной задачей исследования модели Леонтьева.

Допустим, что какая-то часть отраслей рассматриваемой экономической системы (ее подсистема) не нуждается для своего функционирования в товарах других отраслей, т.е., осуществляет выпуск своих продуктов, используя только эти же продукты (при этом остальные отрасли для своих производств тоже могут потреблять эти продукты). Такая подсистема называется **изолированной**. Если в системе имеется изолированная подси-

стема, то матрицу затрат A можно перестановкой строк и/или столбцов (т.е., изменением нумерации отраслей/продуктов) привести к виду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Здесь A_1 – внутренняя квадратная матрица (подматрица) размером $K \times K$, которая соответствует изолированному подмножеству отраслей (подсистеме). Подматрица, обозначенная через "0" состоит целиком из нулевых элементов, элементы подматриц A_2 и A_3 могут быть любыми.

Если никакой перестановкой строк и столбцов матрицу затрат невозможно привести к виду (3.25), то она называется **неразложимой**. Это означает, что в экономической системе невозможно выделить какую-либо изолированную подсистему.

Можно доказать, что модель Леонтьева продуктивна, если:

- 1) матрица затрат неразложима;
- 2) сумма элементов каждой строки матрицы затрат не превосходит единицы:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \leq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, N);$$

- 3) хотя бы в одной строке эта сумма строго меньше единицы:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} < 1.$$

Решение системы линейных уравнений (3.24) позволяет определить объемы выпуска продукции каждой отрасли, которые обеспечивают устойчивое функционирование экономической системы в целом. В матричной форме это решение можно записать

$$X = (I - A)^{-1} \cdot Y. \quad (3.26)$$

Обратная матрица

$$A^* = (I - A)^{-1} \quad (3.27)$$

называется **матрицей полных затрат**. Ее элементы a_{ij}^* показывают, сколько единиц i -продукта требуется, чтобы выпустить единицу j -продукта для удовлетворения конечного спроса (т.е., без учета затрат j -продукта на производственные нужды).

Рассмотрим пример построения и решения модели Леонтьева.

Пример 3.5. Дана следующая технологическая матрица, описывающая взаимодействие трех секторов некоей экономической системы

$$A = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,41 & 0,02 \\ 0,8 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 0,41 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы a_{ij} показывают (в условных единицах) расход продукта i -отрасли на выработку единицы продукции j -отрасли. Конечный спрос на продукцию отраслей описывается вектором

$$Y = \begin{pmatrix} 210 \\ 608 \\ 270 \end{pmatrix}.$$

Необходимо проверить продуктивность модели и определить валовой выпуск продукции каждой отрасли, коэффициенты полных затрат и объемы межотраслевых поставок продукции.

Решение

Для решения задачи заносим в таблицу EXCEL условия задачи. Вид итоговой таблицы показан на рис. 3.7.

	A	B	C	D
1	Модель Леонтьева			
2	Матрица прямых затрат A :			Спрос Y_i
3	0,13	0,41	0,02	210
4	0,08	0,21	0,03	608
5	0,21	0,41	0,10	270
6	Единичная матрица I			
7	1			
8		1		
9			1	
10	Матрица I-A			
11	0,87	-0,41	-0,02	
12	-0,08	0,79	-0,03	
13	-0,21	-0,41	0,9	
14	Матрица полных затрат $(I-A)^{-1}$			Валовые выпуски X_i
15	1,222	0,660	0,049	670,96
16	0,137	1,362	0,048	869,95
17	0,348	0,774	1,145	852,87
18	670,964	869,953	852,870	
19	Межотраслевые поставки			Производств. затраты Z_i
20	87,225	356,681	17,057	460,96
21	53,677	182,690	25,586	261,95
22	140,902	356,681	85,287	582,87

Рис. 3.7. Экранная форма задачи после получения решения

Технологическая матрица занимает диапазон A3:C5. Вектор-столбец D3:D5 заполнен значениями объемов конечного спроса.

Для формирования матрицы коэффициентов уравнений модели Леонтьева $(I - A)$ сначала заполняем элементы единичной матрицы I (диапазон A7:C9). В ячейки диагонали матрицы заносим значения 1, остальные ячейки оставляем пустыми (значения в них равны нулю).

Затем создаем матрицу $(I - A)$. Для этого в первую ячейку первой строки – A11 – заносим формулу

$$= A7-A3$$

и копируем ее в остальные ячейки диапазона A11:C13. Теперь можно приступить к решению системы уравнений модели.

Сначала вычисляется обратная матрица $B = (I - A)^{-1}$, или матрица полных затрат. Это делается в следующей последовательности:

1. Выделяется необходимый диапазон ячеек, в котором будет размещаться матрица – A15:C17. Следует помнить, что размерность обратной матрицы $B = (I - A)^{-1}$ совпадает с размерностью матрицы $(I - A)$.

2. Щелчком мыши курсор устанавливается в строку формул.

3. С клавиатуры вводится формула

$$= \text{МОБР}(A11:C13).$$

После набора формулы необходимо нажать на клавиатуре не обычную клавишу ввода, а комбинацию клавиш **Ctrl + Shift + Enter**. Порядок нажатия комбинации клавиш таков: нажимают первую, затем, не отпуская ее, нажимают вторую, затем, удерживая нажатыми эти клавиши, нажимают третью (не пытайтесь нажимать клавиши одновременно!). При этом формула одновременно вставляется во все ячейки выделенного диапазона и в них вычисляются соответствующие значения обратной матрицы.

Если функция **МОБР()** вставляется в формулу из встроенного списка с помощью *Мастера функций*, то в диалоговом окне ввода аргумента вместо щелчка мышью по виртуальной клавише **ОК** также следует нажать указанную клавиатурную комбинацию.

Если по ошибке нажать просто клавишу ввода, то формула первоначально вставляется только в первую ячейку выделенного диапазона. Для ее распространения на весь диапазон следует заново выделить этот диапазон, затем щелкнуть мышью по

строке формул для появления в ней курсора редактирования и нажать **Ctrl + Shift + Enter**.

Для определения значений валового выпуска продукции по отраслям по формуле (3.26) необходимо выделить диапазон-столбец D15:D17 (рис. 3.7). Затем в том же порядке, в каком производилось вычисление обратной матрицы, в выделенный диапазон заносится формула, содержащая функцию перемножения матриц

$$= \text{МУМНОЖ}(\text{A15:C17}; \text{D3:D5}).$$

В результате в выделенном диапазоне вычисляется значение произведения матрицы полных затрат **B** и вектора конечного спроса **Y** – вектор объемов валового выпуска продукции **X**. Поскольку все элементы вектора **X** получились неотрицательными, можно сделать вывод, что модель оказалась продуктивной.

Межотраслевые поставки продукции определяются по формуле

$$x_{ij} = a_{ij}X_j.$$

Элементы матрицы x_{ij} показывают, какое количество продукции **i**-отрасли необходимо истратить на обеспечение валового выпуска продукции **j**-отрасли. Для удобства расчета матрицы межотраслевых поставок сначала надо транспонировать вектор валового выпуска **X**. Это делается с помощью функции **ТРАНСП()**. Ее аргументом является диапазон-столбец D15:D17. Транспонированный столбец занимает диапазон-строку A18:C18. Порядок работы с этой функцией такой же, как и порядок работы с другими функциями, результатом вычисления которых являются матрицы или вектора.

Затем в ячейку A20 вносится формула

$$=\text{A3}*\text{A\$18},$$

соответствующая приведенной формуле расчета межотраслевых поставок, и копируется в остальные ячейки диапазона A20:C22.

Сумма элементов какой-либо строки матрицы межотраслевых поставок – **Z_i** – показывает, какое количество продукции

соответствующей отрасли требуется для обеспечения производственной деятельности всех отраслей экономической системы. Соответствующие суммы вычислены справа от матрицы межотраслевых поставок. Видно, что объем продукции, затраченной на производственные нужды, для каждой отрасли (т.е., в каждой строке) равен разности между валовым выпуском X_i и конечным спросом Y_i .

3.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

3.4.1. Потребительские наборы и их сравнение

Теория потребительского поведения базируется на ряде идеализированных исходных предположений.

Первое из них заключается в том, что предполагается существование некоторого множества X потребительских наборов – наборов предметов потребления, продуктов или услуг (все эти понятия в теории потребления объединяют общим термином "блага"). Каждый набор охватывает все потребности потребителя в каком-то секторе жизнедеятельности, к примеру, это может быть набор продуктов питания. Под потребителем в общем случае понимается не обязательно отдельный человек – это может быть, например, семья, или определенная категория людей. Набор состоит из n элементов x_i , каждый из которых выражает количество потребляемого блага i -вида, входящего в состав набора. Очевидно, каждый элемент набора должен быть неотрицателен: $x_i \geq 0$.

Потребитель может выбрать любой из потребительских наборов, однако в его глазах они не равноценны. Второе исходное предположение заключается в том, что между различными наборами существуют **бинарные отношения слабого предпочтения**. Отношение слабого предпочтения между наборами x и y обозначается

$$x \succsim y \text{ (} x \text{ равноценен или предпочтительнее } y \text{)}. \quad (3.28)$$

Это значит, что при равных условиях потребитель может либо предпочесть набор x набору y , либо не увидит между ними разницы.

Если одновременно существуют отношения $x \succsim y$ и $y \succsim x$, то говорят, что между наборами x и y имеет место отношение безразличия (равноценности). Такие два набора с точки зрения потребителя абсолютно одинаковы. Отношение безразличия обозначают $x \sim y$.

Если же $x \succ y$, а отношение $y \succ x$ не имеет места, то говорят о **сильном предпочтении** x по отношению к y : $x \succ y$.

Отношение слабого предпочтения удовлетворяет ряду аксиом:

1. Оно является совершенным. Это значит, что для любых двух наборов x и y из множества X обязательно существует какое-то из трех соотношений:

$$x \succ y \quad y \succ x \quad x \sim y,$$

т.е., не существует таких наборов, которые нельзя было бы сравнить с другими.

2. Оно является транзитивным, т.е. из того, что $x \succ y$ и $y \succ z$ следует, что $x \succ z$.

3. Оно является рефлексивным – для любого набора из множества X справедливо соотношение $x \succsim x$.

Отсюда следует, что множество наборов X распадается на попарно непересекающиеся подмножества, внутри которых составляющие их наборы связаны отношением безразличия (при этом некоторые из подмножеств безразличия могут состоять всего из одного набора). Подмножество безразличия, состоящее из наборов, равноценных некоторому набору x , обозначается C_x .

Сравнительную ценность разных наборов в глазах потребителя можно описать **функцией полезности** (ФП) потребительских наборов. Это некая функция $u(x)$, обладающая следующим свойством:

$$x \succ y \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad u(x) > u(y). \quad (3.29)$$

Легко видеть, что любое монотонное преобразование функции $u(x)$, например, $\ln u$, e^u , $au+b$ (где a, b – постоянные, причем, $a > 0$), также дает функцию, обладающую свойством (2.29), т.е., новую функцию полезности. Поэтому функция полезности не служит количественной мерой какого-то свойства "полезности". Она только позволяет определить порядок сортировки наборов по критерию увеличения потребительских предпочтений, поэтому иногда называется функцией **порядковой полезности**.

Можно заметить, что каждому подмножеству безразличия C_x соответствует какое-то постоянное значение функции полезности.

В теории потребления предполагается, что функция полезности обладает свойствами:

1. $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ – увеличение потребления какого-то блага в

наборе при неизменном потреблении остальных благ должно увеличивать полезность набора.

2. $\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – если какое-то благо вообще отсутствовало

в наборе, то появление даже малого его количества в наборе резко увеличивает полезность.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$ – с увеличением потребления блага в наборе

скорость роста полезности уменьшается. В конце концов, наступает насыщение и дальнейшее увеличение потребления данного блага, уже не увеличивает полезность набора. Это приводит к следующему свойству функции полезности:

4. $\lim_{x_i \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$

Рассмотрим набор из двух благ, количества которых обозначим соответственно x_1 и x_2 . Тогда функция полезности – это функция двух переменных $u(x_1, x_2)$. Какое-либо подмножество безразличия в множестве различных наборов определяется условием $u(x_1, x_2) = u_0 = \text{Const}$.

Если рассматривать x_1 и x_2 , как координаты на плоскости, то указанное условие определяет на плоскости кривую, называемую **кривой безразличия**. Для разных значений u_0 кривые безразличия образуют семейство линий на плоскости – **изоквант функции полезности**.

Часто рассматривается **неоклассическая функция полезности** (функция Кобба-Дугласа)

$$u = x_1^a x_2^b, \quad (a + b \leq 1), \quad (3.30)$$

Кривые безразличия неоклассической функции полезности представляют собой семейство гипербол (рис. 3.8).

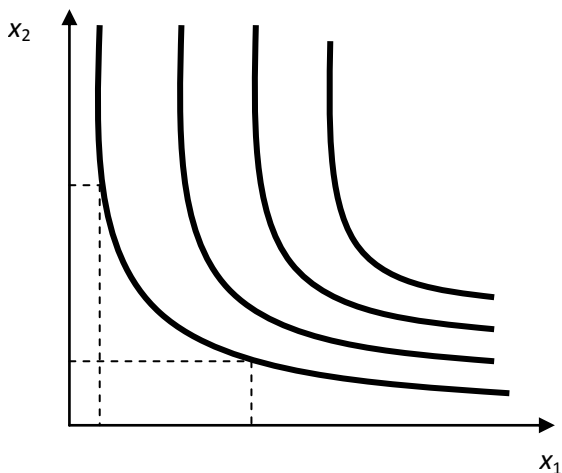


Рис. 3.8. Неоклассические кривые безразличия

Можно видеть, что в этом случае для сохранения неизменного уровня полезности в случае уменьшения потребления одного из благ необходимо увеличивать потребление второго блага. Такое свойство называется **взаимозамещением** благ. Примером взаимозамещающихся благ могут служить, например, чай и кофе, мясо и рыба (если не принимать во внимание какие-то дополнительные – например, медицинские – соображения).

Следует отметить, что существуют и другие виды функции полезности, например:

1. Функция полезности с полным взаимозамещением благ

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \quad (a, b = \text{Const}).$$

Кривые безразличия такой функции полезности имеют вид наклонных прямых (рис. 3.9).

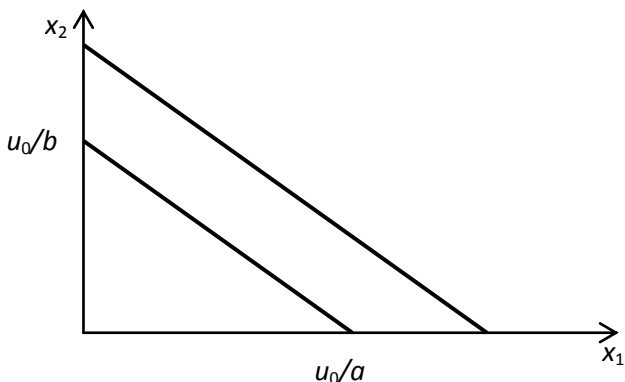


Рис. 3.9. Кривые безразличия функции полезности с полным взаимозамещением благ

2. Функция полезности с полным взаимодополнением благ. В этом случае повышение спроса на 1 товар или услугу автоматически ведет к повышению спроса на другое благо. Примером могут служить бензин и моторное масло. При взаимодополнении благ избыток одного из благ не имеет значения. Определенная полезность набора u_0 достигается только при определенном сочетании благ, определяемом значениями x_1^* и x_2^* .

У такой функции не существует кривых безразличия. Подмножеством безразличия при определенном значении u_0 является единственная точка, лежащая на пересечении прямых, определяемых равенствами $x_1 = x_1^*$ и $x_2 = x_2^*$. Все такие точки для разных значений u_0 располагаются на прямом луче, выходящем из начала координат под углом $\varphi = \arctg(x_1^*/x_2^*)$ к горизонтальной оси.

3.4.2. Определение оптимального выбора потребителя в случае набора из двух благ

Предельная норма замещения блага x_1 благом x_2 ("marginal rate of substitution", $MRS_{x_1x_2}$) – это количество блага x_2 , которое следует добавить в набор для сохранения неизмен-

ности уровня удовлетворения потребности при уменьшении количества блага x_1 на единицу. Математическое выражение предельной нормы замещения:

$$MRS_{x_1x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} \bigg|_{u=const}. \quad (3.31)$$

Отсюда видно, что предельная норма замещения графически выражается тангенсом угла наклона касательной к кривой безразличия, взятым с обратным знаком (рис. 3.10). Видно также, что эта величина переменна и зависит от начального количества блага x_1 . При увеличении количества блага предельная норма его замещения уменьшается.

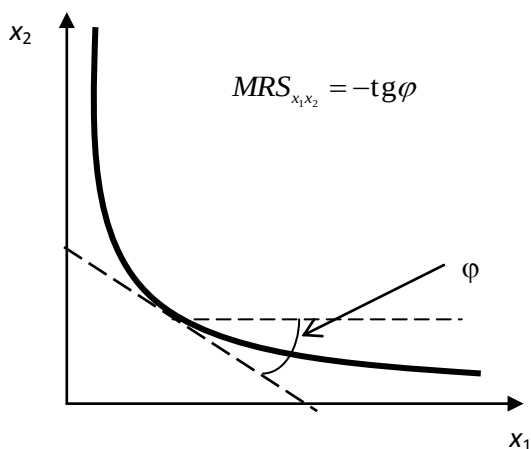


Рис. 3.10. Геометрическое выражение предельной нормы замещения благ

Как легко понять, потребитель стремится приобрести такой набор благ, который обеспечивает максимальный уровень полезности. Иначе говоря, такой набор должен соответствовать наиболее высоко расположенной (или наиболее удаленной от начала координат) кривой безразличия. Однако это стремление потребителя ограничено объемом средств, которыми он распо-

лагает для приобретения набора. Если средства, которые потребитель может затратить на приобретение набора, равны I , а цены за единичные объемы благ 1 и 2 равны p_1 и p_2 соответственно, то возможные объемы закупок x_1 и x_2 должны удовлетворять **бюджетному ограничению** потребителя

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I. \quad (3.32)$$

Это уравнение определяет на графике кривых безразличия наклонную прямую (рис. 3.11). Для каждой кривой безразличия возможность покупки набора с соответствующим значением функции полезности определяется точками пересечения кривой безразличия и прямой линии бюджетного ограничения. Легко понять, что оптимальный выбор потребителя соответствует самой верхней из кривых безразличия, имеющей хотя бы одну общую точку с прямой ограничения. Он определяется точкой C , в которой прямая ограничения оказывается касательной к одной из кривых безразличия – эта кривая как раз и соответствует максимально возможному уровню удовлетворения потребности при ограниченных затратах I .

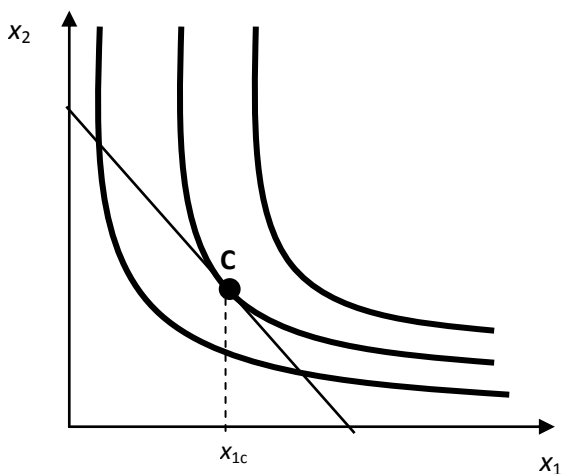


Рис. 3.11. Определение оптимального выбора потребителя

Из (3.32) можно определить зависимость $x_2(x_1)$:

$$x_2 = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1. \quad (3.33)$$

Тогда тот факт, что прямая ограничения является касательной к кривой безразличия в некоторой точке C с горизонтальной координатой x_{1c} , означает, что в этой точке совпадают как значения функций $x_2(x_1)$, определяемые уравнениями $u(x_1, x_2) = u_{\max}$ и (3.33), так и значения производных этих функций.

С учетом (3.31) и (3.33) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u\left(x_1, \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right) = u_{\max}, \\ MRS_{x_1, x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{u=u_{\max}} = \frac{p_1}{p_2}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Эти уравнения определяют значение количества первого блага x_1 в оптимальном наборе и уровень полезности такого набора $u_{\max}$. Количество второго блага в оптимальном наборе определяется формулой (3.33).

Пример 3.6. Потребительский набор включает два товара и описывается неоклассической функцией полезности

$$u = x_1^{0,5} x_2^{0,5}.$$

Цены на товары одинаковы и равны каждой 2 единицам, а доход потребителя – 8 единиц.

Определить для этого случая максимальный уровень полезности и состав набора, соответствующего оптимальному выбору потребителя.

Решение

В данном случае функция полезности имеет простой вид (показатели степени при обеих переменных равны). Это позволяет не решать задачу в общем виде (3.34), а получить решение более простым способом.

Бюджетное ограничение потребителя имеет вид (3.32):

$$I = 2x_1 + 2x_2 = 8.$$

Выразим из этого равенства и из выражения функции полезности переменную x_2 :

$$x_2 = 4 - x_1, \quad x_2 = \frac{u^2}{x_1}.$$

Приравняем эти выражения:

$$\frac{u^2}{x_1} = 4 - x_1.$$

Отсюда получается квадратное уравнение

$$x_1^2 - 4x_1 + u^2 = 0.$$

Решение уравнения определяется формулой

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4u^2}}{2}.$$

Уравнение может иметь два действительных корня, один действительный корень, или не иметь действительных корней. Если посмотреть на рис. 3.11, то можно понять, что наличие двух корней соответствует случаю, когда прямая бюджетного ограничения пересекает график изокванты функции полезности в двух точках. Отсутствие корней уравнения означает, что прямая бюджетного ограничения и изокванта не имеют общих точек. Наконец, наличие одного корня означает, что эти линии соприкасаются в единственной точке C . Эта точка как раз и определяет оптимальный выбор потребителя.

Если квадратное уравнение имеет один корень, то его дискриминант равен нулю:

$$D = 16 - 4u^2 = 0.$$

Отсюда находим максимально достижимое значение функции полезности $u_{\max} = 2$. Объем оптимального спроса на

первый товар определяется решением квадратного уравнения при $D = 0$:

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2.$$

Оптимальный спрос на второй товар:

$$x_2 = 4 - x_1 = 2.$$

3.4.3. Определение оптимального выбора потребителя в случае произвольного количества благ

В общем случае рассматривается потребитель с определенным доходом I , предназначенным для приобретения набора из n благ, количества которых определяются вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; цены благ определяются соответственно вектором $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Ограниченность средств потребителя задает бюджетное ограничение

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I. \quad (3.35)$$

Если задана функция полезности $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то задача определения оптимального выбора потребителя представляет собой задачу поиска условного максимума функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии условия

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = I. \quad (3.36)$$

Неравенство (3.35) здесь заменено равенством, исходя из предположения, что для максимизации полезности набора потребитель будет использовать все имеющиеся у него средства.

Из курса высшей математики известно, что подобная задача поиска условного экстремума сводится к нахождению безусловного экстремума функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda' f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.37)$$

Необходимые условия локального экстремума – равенство нулю частных производных функции Лагранжа. С учетом (3.36) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda' p_i = 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = I. \end{cases} \quad (3.38)$$

Решение этой системы позволяет определить компоненты вектора $\mathbf{x}$ – объемы приобретения благ, соответствующие оптимальному выбору потребителя, а также параметр λ' , называемый **множителем Лагранжа**.

Множитель Лагранжа в данной задаче определяет (с точностью до знака), насколько возрастет полезность оптимального набора $\mathbf{u}_{\max}$, если объем средств, выделяемых для приобретения набора, увеличить на единицу:

$$\frac{du_{\max}}{dI} = -\lambda' = \lambda. \quad (3.39)$$

Показатель λ , противоположный множителю Лагранжа, называется **предельной полезностью денег**.

3.4.4. Математическое описание потребительского спроса. Функции спроса

С решением задач оптимального выбора связан анализ влияния цен на товары и услуги (т.е., блага) и доходов группы потребителей на изменение спроса на те или иные блага. Оптимальный спрос (т.е., спрос на блага, соответствующий оптимальному выбору потребителя) выражается набором функций вида

$$x_i^* = D_i(I, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (3.40)$$

называемых функциями спроса (ФС). На рис. 3.11 значение функции спроса D_1 определяется горизонтальной координатой

точки **C** (при соответствующих значениях дохода и цен, определяющих положение кривой безразличия и бюджетной прямой).

Как правило, форма функций спроса определяется путем статистической обработки результатов специальных наблюдений за доходами и расходами представителей различных социальных групп. В зависимости от формы полученной функции спроса выделяют две группы товаров:

а) Если для некоторого товара выполняется условие

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} < 0, \quad (3.41)$$

то такой товар называется нормальным, т.к. спрос на него снижается при увеличении цены на товар. Большинство товаров относятся к категории нормальных.

Как правило, для характеристики нормальных товаров используются функции спроса двух видов:

- Линейная функция спроса

$$D_i(p_i) = a - bp_i, \quad (a > 0, b > 0 - \text{постоянные параметры}). \quad (3.42)$$

- Степенная функция спроса

$$D_i(p_i) = a \cdot p_i^{-b}, \quad (a > 0, b > 0 - \text{постоянные параметры}). \quad (3.43)$$

б) Существуют товары, у которых условие (3.41) не выполняется, т.е.

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} > 0.$$

Они называются **аномальными**.

Различают два вида аномальных товаров:

а) **товары Гиффина**.

Эффект Гиффина наблюдался в конце XIX века в Ирландии. В то время картофель считался одним из основных продуктов питания. При этом по мере увеличения дохода потребитель предпочитал покупать меньше картофеля, но больше мяса. Однако с увеличением цены на картофель реальный доход понижался настолько, что потребитель не в состоянии был купить

мясо на прежнем уровне, и вынужден был для восполнения недостатка калорий потреблять больше картофеля. Таким образом, картофель стал заменителем мяса и его потребление, несмотря на повышение цены, все равно увеличилось.

Эффект Гиффина проявился и в современной России. Так, в 1990 году отношение средних рыночных цен на картофель (0,3 р./кг) и мяса (5 р./кг) составило 0,06. В июне 1996 года средние цены стали соответственно 2250 р./кг и 13750 р./кг, а их отношение составило 0,16. Таким образом, относительная цена картофеля (к мясу) выросла в 2,7 раз. В то же время потребление мяса за этот срок сократилось на 20 %, а потребление картофеля возросло на 15 %.

Товары Гиффина являются малоценными товарами, предназначенными для потребителей с низкими доходами.

б) товары Веблена.

Товары Веблена – это предметы роскоши, потребляемые богатыми людьми. Обладание таким предметом служит показателем статуса владельца и является престижным в его глазах. Повышение цены увеличивает престиж товара и способствует росту потребления.

Эффект Веблена иногда проявляется и по отношению к товарам широкого потребления. Это происходит, если потребители начинают проявлять недоверие к дешевым товарам какой-то группы (например, лекарствам), считая низкую цену показателем низкого качества. Эффект Веблена иногда используется в рекламных кампаниях (осуществляемых под девизом "скупой платит дважды").

3.4.5. Эластичность спроса

Коэффициент эластичности (КЭ) – это мера реагирования зависимой переменной $y(x)$ на изменение независимой переменной x :

$$E_x(y) = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}. \quad (3.44)$$

Эластичность показывает, на сколько процентов изменяется зависимая переменная, если независимая переменная изменяется на 1%.

Формула (3.44) определяет **точечную эластичность**. Существует еще и **дуговая**, или средняя на каком-то отрезке, эластичность, обычно вычисляемая по формуле Аллена

$$E_x(y)_{1-2} = \frac{\frac{x_{cp}}{y_{cp}} \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{\left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)}{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)}} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{\left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)}}{\frac{x_2 - x_1}{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}. \quad (3.45)$$

Среднюю эластичность можно использовать на сравнительно небольших отрезках, или если зависимость $y(x)$ является достаточно гладкой.

Для линейной и степенной функций спроса (3.42) и (3.43) коэффициенты эластичности спроса по цене выражаются соответственно формулами

$$E_{p, \text{лин}}(D_i) = -\frac{bp}{a - bp}, \quad (3.46)$$

$$E_{p, \text{степ}}(D_i) = -b. \quad (3.47)$$

У товаров первой необходимости спрос неэластичен по цене:

$$|E_p(D)| \rightarrow 0.$$

Спрос на такие товары практически постоянен и потребители будут вынуждены приобретать их по любой цене.

У товаров длительного пользования спрос нормально эластичен по цене:

$$|E_p(D)| \sim 1.$$

У предметов роскоши спрос суперэластичен по цене:

$$|E_p(D)| > 1.$$

Малое изменение цены может резко изменить спрос на такие товары.

Если цены остаются неизменными, то спрос на товар может меняться также в зависимости от дохода покупателя I .

Если

$$\frac{\partial D_i}{\partial I} > 0$$

– товар **ценный**. Спрос на такой товар выше у потребителей с высокими доходами.

Если выполняется противоположное условие:

$$\frac{\partial D_i}{\partial I} < 0$$

– товар **малоценный**. Такой товар в основном потребляется покупателями с низкими доходами, а по мере роста доходов населения спрос на него падает. Примерами малоценных товаров могут служить изделия китайского ширпотреба.

Сравнительной характеристикой ценности товара является коэффициент эластичности спроса по доходу

$$E_I(D_i) = \frac{I}{D_i} \frac{\partial D_i}{\partial I}. \quad (3.48)$$

При изучении спроса различных групп потребителей используются в основном модели двух видов:

1. Степенная модель Энгеля

$$D_i = a(p)I^\beta. \quad (3.49)$$

Эластичность спроса по доходу для такой модели:

$$E_I(D_i) = \beta. \quad (3.50)$$

При разных значениях показателя β вид зависимости $D_i(I)$ получается разным (рис. 3.12). Для товаров и благ повседневного спроса (еда, одежда, оплата коммунальных услуг и т.п.) $\beta < 1$. С ростом дохода потребителей на такие блага тратится все меньшая доля дохода.

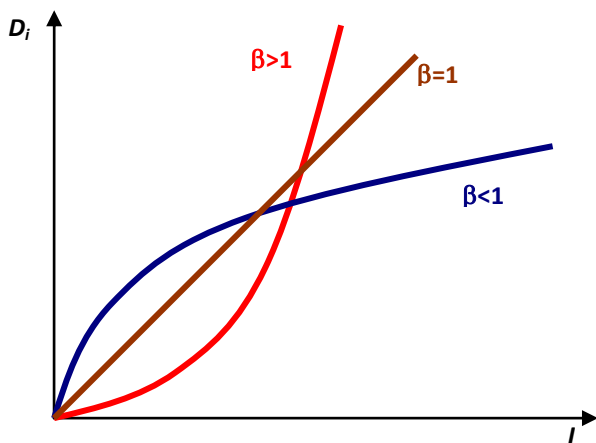


Рис. 3.12. Функции спроса Энгеля

Показатель $\beta \approx 1$ характерен для товаров длительного пользования. Доля затрат на такие товары у потребителей с разным доходом примерно одинакова.

Для предметов роскоши $\beta > 1$. Доля расходов на предметы роскоши близка к нулю у небогатых потребителей и резко возрастает у потребителей с высоким доходом.

2. Модель Торнквиста.

В этой модели для трех групп благ вводятся функции спроса различной структуры:

а) Товары и блага первой необходимости. Функция Торнквиста для них имеет вид

$$D_{i1} = \frac{a_1 I}{b_1 + I}. \quad (3.51)$$

При возрастании величины дохода такая функция стремится к постоянному пределу a_1 . Это выражает тенденцию к постепенному насыщению спроса на блага первой необходимости по мере роста дохода потребителей.

б) Для товаров длительного пользования вводится функция вида

$$D_{i2} = \begin{cases} 0, & (I < I_2); \\ \frac{a_2(I - I_2)}{I + b_2}, & (I \geq I_2). \end{cases} \quad (3.52)$$

Можно видеть, что спрос на эти товары возникает только после того, как доход потребителей превысит некоторое пороговое значение I_2 . С ростом дохода вторая функция Торнквиста также стремится к конечному пределу – a_2 . Таким образом, спрос на товары длительного пользования тоже имеет тенденцию к насыщению по мере роста дохода потребителей.

в) Третья функция Торнквиста – для предметов роскоши – имеет вид

$$D_{i3} = \begin{cases} 0, & (I < I_3); \\ \frac{a_3 I(I - I_3)}{I + b_3}, & (I \geq I_3). \end{cases} \quad (3.53)$$

Таким образом, спрос на предметы роскоши также возникает только после того, как доход потребителей превысит пороговое значение I_3 (причем $I_3 > I_2$). Кроме того, спрос на предметы роскоши не имеет тенденции к насыщению при возрастании дохода. Это обстоятельство отражается тем, что третья функция Торнквиста при возрастании величины дохода асимптотически приближается к линейной функции

$$D_{i3} \xrightarrow{I \rightarrow \infty} a_3 I.$$

Графики функций Торнквиста схематически представлены на рис. 3.13.

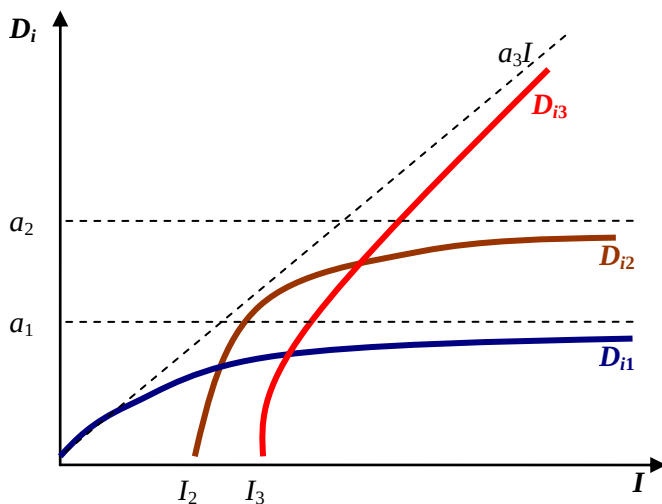


Рис. 3.13. Функции спроса Торнквиста

3.4.6. Компенсация роста цен для одного товара

Если цены на какие-то блага растут, необходимо повышать и доходы населения. Это может делаться путем повышения зарплаты или введения прямых компенсационных выплат определенным группам потребителей.

Рассмотрим случай одного блага, спрос на которое описывается функцией спроса $D(I, p)$. Если цена увеличилась от начальной величины p_0 до нового значения $p_1 = p_0 + \Delta p$, то для компенсации потерь населения требуется изменить и доход, сделав его равным $I_1 = I_0 + \Delta I$. При этом спрос на благо не должен измениться. Тогда

$$D(I_1, p_1) - D(I_0, p_0) = \frac{\partial D}{\partial I} \Delta I + \frac{\partial D}{\partial p} \Delta p = 0. \quad (3.54)$$

Отсюда можно найти требуемую величину изменения дохода

$$\Delta I = - \frac{\partial D / \partial I}{\partial D / \partial p} \Delta p. \quad (3.55)$$

Т.к. для нормальных ценных товаров

$$\frac{\partial D}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial D}{\partial I} > 0,$$

то при $\Delta p > 0$ изменение дохода ΔI получается положительным, так что доходы потребителей необходимо увеличивать.

Если функция спроса имеет степенной вид как по доходу (3.49), так и по цене

$$D(I, p) = a I^\beta p^{-\alpha}, \quad (3.56)$$

то из (3.55) легко получается

$$\Delta I = \frac{\alpha}{\beta} \frac{I}{p} \Delta p, \quad (3.57)$$

или, с учетом (3.47), (3.50):

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\Delta p}{p} = \frac{|E_p(D)|}{E_I(D)} \frac{\Delta p}{p}. \quad (3.58)$$

Таким образом, требуемое для компенсации относительное увеличение дохода должно быть пропорционально относительному увеличению цены с коэффициентом пропорциональности, равным отношению эластичностей спроса по цене и доходу.

3.4.7. Компенсация роста цен для многотоварного потребительского набора

В общем случае рассматривают набор функций спроса вида (3.40)

$$D_i = D_i(I, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.59)$$

В общем случае, изменение цены на некий товар (благо) с номером i влияет на спрос и на все остальные товары. При этом если товар i является нормальным, то

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} < 0$$

– т.е., при увеличении цены на товар спрос на него уменьшается. Что касается перекрестного влияния цены на i -товар на спрос на j -товар, то оно может быть различным. Для взаимодополняющих товаров (например, бензина и моторного масла)

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} < 0,$$

для взаимозамещающих товаров (чай – кофе, мясо – рыба, крупы – макароны и т.п.)

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} > 0.$$

Если в наборе имеются пары взаимодополняющих товаров, то задача компенсации в общем случае не имеет решения. Если же все товары взаимозаменяемы, то определение уровня компенсации и влияние компенсированного изменения цен на отдельные товары на общую структуру спроса осуществляется на основе решения задачи оптимизации (3.38). Влияния изменений цен на отдельные товары на спрос (как на эти, так и на другие товары в наборе), описывается **уравнением Слуцкого**, вывод и истолкование которого выходят за рамки настоящего пособия.

Ограничимся случаем двух благ. В этом случае анализ может быть произведен графически.

Графическое решение задачи оптимального выбора представлено на рис. 3.14 (см. также рис. 3.11). Оно соответствует кривой безразличия, касательной к которой является прямая

бюджетного ограничения, и определяется точкой C , в которой соприкасаются эти линии.

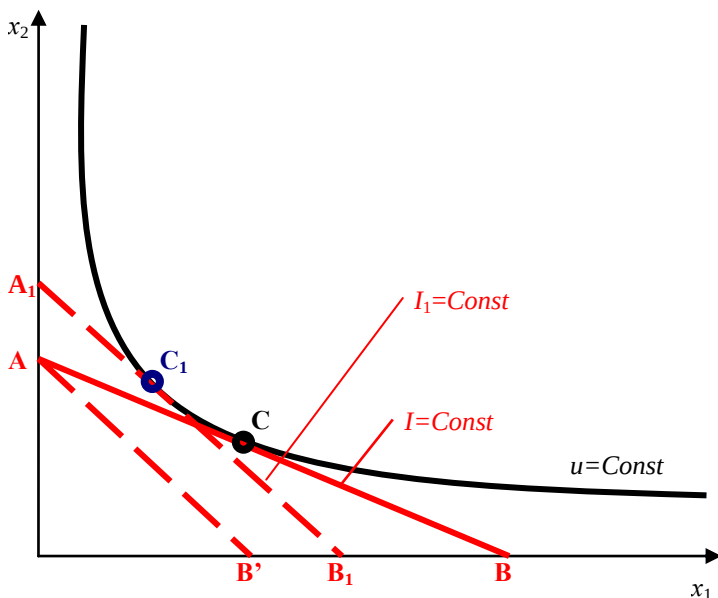


Рис. 3.14. Графический анализ влияния компенсации цен на спрос

Заметим, что из уравнения бюджетной прямой (3.32)

$$I = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

следует, что точки пересечения прямой и осей координат Ox_1 и Ox_2 (точки B и A) определяются значениями координат $x_1 = I / p_1$ и $x_2 = I / p_2$ соответственно.

Пусть теперь цена 1-го товара увеличилась. Тогда координата x_1 точки пересечения прямой бюджетного ограничения с осью Ox сместится ближе к началу координат и эта линия переместится в положение AB' . В этом положении линия бюджетного ограничения уже не будет касаться заданной кривой безразличия, и оптимальный выбор потребителя будет определяться другой кривой безразличия, проходящей ниже. Это иллюстрирует очевидный вывод о том, что при некомпенсированном ро-

сте цен полезность доступного потребителю набора уменьшается.

Для сохранения прежнего уровня полезности доход потребителя необходимо увеличить. На рис. 3.14 это соответствует параллельному сдвигу прямой бюджетного ограничения вверх. Новый оптимальный выбор при сохранении первоначальной полезности будет теперь соответствовать положению бюджетной прямой A_1B_1 и определяться точкой касания этой прямой и заданной кривой безразличия, т.е., точкой C_1 . Видно, что эта точка не совпадает с прежней точкой C . Ей соответствуют меньшее, чем раньше, значение координаты x_1 (спроса на 1-й товар) и большее значение координаты x_2 (спроса на 2-й товар). Таким образом, на основе проведенного графического анализа можно сделать важный вывод:

Повышение цены на товар, даже при полной компенсации этого повышения (позволяющей сохранить прежний уровень полезности набора товаров), вызывает уменьшение спроса на этот товар и увеличивает спрос на замещающий товар (товары).

Определим величину увеличения дохода, требуемого для компенсации. Запишем систему уравнений, определяющих решение задачи оптимального спроса (3.38). С учетом (3.39) для случая двух товаров имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} - p_1\lambda = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} - p_2\lambda = 0, \\ I = p_1x_1 + p_2x_2. \end{cases} \quad (3.60)$$

Отсюда полные дифференциалы полезности u и дохода I :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = \lambda(p_1 dx_1 + p_2 dx_2), \quad (3.61)$$

$$dI = d(p_1x_1 + p_2x_2) = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + x_1 dp_1 + x_2 dp_2. \quad (3.62)$$

Т.к. в рассматриваемой задаче полезность и не должна измениться, ее дифференциал равен нулю. С учетом того, что полезность денег λ не является нулевой величиной, получаем из (3.61)

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = 0.$$

Тогда в выражении (3.62) получим

$$dI = x_1 dp_1 + x_2 dp_2. \quad (3.63)$$

Если меняется только цена на 1-й товар ($dp_2 = 0$), то величина компенсации: $dI = x_1 \cdot dp_1$. Значит, при изменении цены 1-го товара на Δp_1 компенсирующая прибавка дохода должна быть равна

$$\Delta I = x_1 \Delta p_1. \quad (3.64)$$

Полученная формула носит приближенный характер, т.к. уравнение (3.63) справедливо только при бесконечно малых изменениях цен, а в реальности изменение цены на товар всегда является конечной величиной.

Пример 3.7. Допустим, что в предыдущей задаче (пример 3.6) цена на первый товар изменилась и стала равной 3 единицам. Определить необходимую величину компенсационной прибавки к доходу потребителя и объемы спроса на товары, соответствующие оптимальному выбору потребителя в новых условиях.

Решение

Поскольку компенсация предполагает, что уровень полезности набора остается неизменным, функция полезности описывается той же формулой, что и в предыдущей задаче и имеет ранее найденное значение 2. Однако величина дохода потребителя теперь неизвестна. Обозначим ее I' . Теперь бюджетное ограничение запишется так:

$$I' = 3x_1 + 2x_2.$$

Снова выразим x_1 из выражений функции полезности и бюджетного ограничения и приравняем эти два выражения. Получается квадратное уравнение

$$3x_1^2 - I'x_1 + 2u^2 = 0$$

с решением

$$x_{1,2} = \frac{I' \pm \sqrt{D}}{6} = \frac{I' \pm \sqrt{I'^2 - 24u^2}}{6}.$$

Оптимальный выбор соответствует случаю $D = 0$. Тогда

$$I' = \sqrt{24u^2}.$$

Величина функции полезности не изменилась по сравнению с предыдущей задачей и по-прежнему равна 2. Тогда

$$I' = \sqrt{24 \cdot 2^2} = \sqrt{96} = 9,8.$$

Величина компенсационной прибавки будет равна $\Delta I = 9,8 - 8 = 1,8$. Заметим, что формула (3.64) дает в данном случае величину прибавки в 2 единицы, так что эта формула действительно является приближенной. Спрос на первый товар, как и в предыдущей задаче, определяется единственным корнем квадратного уравнения

$$x_1 = \frac{I'}{6} = \frac{9,8}{6} = 1,63.$$

Спрос на второй товар находим из выражения функции полезности

$$x_2 = \frac{u^2}{x_1} = \frac{2^2}{1,63} = 2,45.$$

Видно, что спрос на первый товар уменьшился, а на второй – увеличился, что подтверждает вывод, полученный ранее на основе графического анализа.

Пример 3.8. Решение задачи об оптимальном спросе потребителя с помощью электронных таблиц EXCEL.

Рассмотрим потребительский набор, который включает два товара и описывается неоклассической функцией полезности

$$u = x_1^{a_1} x_2^{a_2}.$$

Цены на товары равны соответственно p_1 и p_2 , а доход потребителя – I . Эти величины заданы.

Определить с помощью электронных таблиц EXCEL максимальный уровень полезности и значения спроса на блага, соответствующие оптимальному выбору потребителя.

Решение

В соответствии с общей постановкой задачи об оптимальном выборе потребителя, необходимо решить условную задачу оптимизации:

$$\begin{cases} u = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \rightarrow \max, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

Для решения с помощью EXCEL составляем таблицу, показанную на рис. 3.15 (строки 1-10).

В ячейки, выделенные серой заливкой, заносятся значения параметров, заданных в условиях задачи – значения цен на блага, показатели степени для выражения функции полезности и величина дохода потребителя. В данном случае использованы значения параметров из примера 3.6.

В ячейках A10 и B10 вычисляются искомые параметры решения – величины спроса на блага 1 и 2. При составлении таблицы в них можно занести произвольные значения.

В ячейке C6 вычисляется искомое значение функции полезности, которая является целевой функцией поставленной задачи оптимизации. Для этого в ячейку заносится формула

$$=A10^{\wedge}B5*B10^{\wedge}C5.$$

Таким образом, искомые параметры решения задачи сосредоточены в ячейках A10, B10, C6. Эти ячейки выделены на рис. 3.15 жирными рамками, а значения в них даны крупным жирным шрифтом.

В ячейке D3 (она обведена тонкой рамкой) рассчитывается величина затрат потребителя на приобретение набора благ. Для этого использована функция

$$= \text{СУММПРОИЗВ}(B1:C1;A10:B10).$$

Знак в ячейке E3 поставлен для наглядности. Он напоминает, что затраты потребителя не могут превышать его дохода.

	A	B	C	D	E	F
1	Параметры условий					
2		Благо 1	Благо 2	Затраты:		Доход I
3	Цены p_1, p_2 :	2	2	8	<=	8
4						
5	$a_1, a_1 =$	0,5	0,5			
6	Функция полезности:	2				
7						
8	Спрос					
9	$x_1 =$	$x_2 =$				
10	2	2				
11						
12						
13	Расчет компенсации:					
14		Благо 1	Благо 2	Затраты:		Компенсация
15	Цены p_1, p_2 :	3	2	9,80		1,80
16						
17	$a_1, a_1 =$	0,5	0,5			
18	Функция полезности:	2				
19						
20	Спрос					
21	$x_1 =$	$x_2 =$				
22	1,63	2,45				

Рис. 3.15. Решение задач расчета спроса в EXCEL

После подготовки таблицы в меню *Сервис* выбирается команда *Поиск решения*. Появившееся диалоговое окно заполняется так, как показано на рис. 3.16.

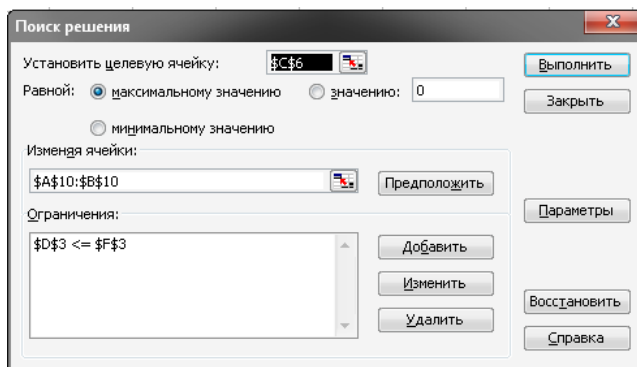


Рис. 3.16. Параметры поиска решения для расчета оптимального спроса

Заметим, что при решении задачи с помощью EXCEL бюджетное ограничение может иметь как вид равенства (3.36), так и более общий вид неравенства (3.35). Решение получится одинаковым.

После заполнения элементов диалогового окна, необходимо нажать клавишу **Параметры** и в появившемся окне диалога **Параметры поиска решения** установить флажок **Неотрицательные значения**; затем нажать **ОК** для возврата в окно диалога. Затем щелчком по клавише **Выполнить** дается команда компьютеру на поиск решения задачи. Результат поиска показан на рисунке 3.15.

Пример 3.9. Решение задачи о компенсации повышения цен с помощью электронных таблиц EXCEL.

Допустим, что потребительский набор включает два блага и описывается неоклассической функцией полезности

$$u = x_1^{a_1} x_2^{a_2}.$$

При ценах на блага соответственно p_1 и p_2 , и доходе потребителя I_0 определен максимальный уровень полезности u_0 и соответствующие ему значения спроса на блага. Эти величины заданы.

В случае, когда цена на благо 1 возросла и стала равной p'_1 , определить с помощью электронных таблиц EXCEL новые уровни спроса x'_1 и x'_2 , соответствующие оптимальному выбору потребителя при условии сохранения прежнего значения функции полезности, а также необходимую для сохранения полезности величину компенсации дохода.

Решение

В данной задаче целевой функцией становится новая величина дохода потребителя. Для того чтобы на компенсацию роста цены не расходовались лишние средства, отыскивается минимально необходимое значение компенсированного дохода I' при условии сохранения прежнего значения функции полезности. Получаем условную задачу оптимизации следующего вида:

$$\begin{cases} p'_1 x'_1 + p_2 x'_2 = I' \rightarrow \min, \\ (x'_1)^{a_1} (x'_2)^{a_2} = u_0. \end{cases}$$

Результаты решения задачи с помощью электронных таблиц EXCEL при параметрах примера 3.7 показаны на рисунке 3.15 (строки 13-22). Функции для расчета значений затрат потребителя и функции полезности имеют ту же структуру, что и в предыдущем примере:

- затраты (ячейка D15):

СУММПРОИЗВ(B15:C15;A22:B22);

- функция полезности (ячейка C18):

=A22^B17*B22^C17.

Параметры заполнения диалогового окна **Поиск решения** для этого случая читателю предлагается разработать самостоятельно по аналогии с предыдущим примером. Обратите внимание на изменение параметров оформления ячеек в таблице, показывающих роль содержимого ячеек в решении задачи (исходные данные выделены серой заливкой, искомые значения спроса и целевой функции затрат (дохода потребителя) – крупным жирным шрифтом и жирными рамками, вспомогательная функ-

ция для создания ограничения – функция полезности – тонкой рамкой).

В качестве ограничивающего функцию полезности значения можно взять как непосредственно числовое значение решения предыдущего примера – 2 – так и сослаться для этого на ячейку C6, содержащую это значение. Таким образом, ограничение при поиске решения может иметь вид

$$C18 = 2 \text{ или } C18 = C6.$$

Второй вариант удобен, если приходится одновременно решать как первичную задачу расчета оптимального спроса, так и задачу расчета компенсации роста цен относительно первоначального уровня.

Величина компенсационной прибавки к доходу рассчитывается в ячейке F15 по формуле

$$= D15 - D3.$$

3.5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

3.5.1. Технологические способы и производственные функции

В основе деятельности любого предприятия (фирмы) лежит процесс преобразования некоторых ресурсов (факторов) в конечные результаты. Набор факторов характеризуется вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, компонентами которого являются объемы затраченных ресурсов. Результаты производственной деятельности характеризуются вектором $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$, компонентами которого могут быть объемы выпуска различной продукции, прибыль, рентабельность и другие характеристики. Компоненты обоих векторов объединяют вместе в один вектор

$$v = (x, y).$$

Он характеризует определенный вариант деятельности предприятия, называемый **"технологическим способом"** (ТС). Таких технологических способов в деятельности предприятия может быть много, они характеризуются разными расходами ресурсов, выпуском различного ассортимента продукции и т.п. Совокупность различных технологических способов образует **"технологическое множество"** V .

Отдельные технологические способы могут быть неравноценны. Можно выделить более выгодные технологические способы, при которых либо удастся добиться повышения выпуска продукции при таких же затратах, что и в менее выгодном технологическом способе, либо произвести такое же количество продукции, израсходовав меньшее количество ресурсов.

Рассмотрим два технологических способа: v_1 и v_2 . Говорят, что технологический способ v_1 *предпочтительнее*, технологического способа v_2 , если

$$\begin{aligned} 1) y_{1i} &\geq y_{2i}, \quad i = 1, \dots, M \\ 2) x_{1j} &\leq x_{2j}, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.65)$$

и при этом справедливо, по крайней мере, одно из условий

1) существует хотя бы один номер i_0 , при котором

$$y_{1_{i_0}} > y_{2_{i_0}};$$

2) существует хотя бы один номер j_0 , при котором

$$x_{1_{j_0}} < x_{2_{j_0}}.$$

Следует заметить, что если рассмотреть два технологических способа, для которых нарушается одно из условий (3.65), то говорить о предпочтительности одного другому вообще невозможно. Такие технологические способы несопоставимы.

Если некий технологический способ $\tilde{v}$ принадлежит технологическому множеству и не существует другого технологического способа, который также принадлежал бы этому множеству и был бы предпочтительнее $\tilde{v}$, то технологический способ $\tilde{v}$ называется **эффективным**. Поскольку в различных подмножествах технологического множества V , состоящих из сопоставимых между собой технологических способов, имеются свои эффективные технологические способы, то внутри V возникает подмножество V^* , состоящее из эффективных технологических способов. Оно называется **эффективным подмножеством V** .

Отображение вектора x на вектор y : $x \rightarrow y$ – задается производственной функцией $y = f(x)$. Такое определение производственной функции шире, чем данное в 1-й главе 3-й части, поскольку теперь производственная функция оказывается векторной, а значения ее компонентов могут выражать не только объем выпуска продукции, но и другие результаты хозяйственной деятельности. Тем не менее, в дальнейших рассуждениях мы ограничимся случаем, когда:

1) Производственная функция однозначна – каждому вектору x соответствует только один результат y (это, вообще говоря, не обязательно)

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.66)$$

2) Производственная функция скалярная – результат деятельности описывается одним численным показателем y . Обычно в таких случаях y – это денежный эквивалент полного объема произведенной продукции во всем ее ассортименте.

Если производственная функция при каждом векторе аргументов x соответствует эффективному технологическому способу, то уравнение (3.66) задает в N -мерном пространстве факторов некую гиперповерхность, которая является границей технологического множества V .

Такие производственные функции для конкретных предприятий строятся на основе статистического анализа производственных процессов (при этом неявно предполагается, что эти процессы являются эффективными). Наиболее часто для моделирования используются следующие формы производственных функций:

1) линейная:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N; \quad (3.67)$$

2) степенная:

$$y = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_N^{a_N}. \quad (3.68)$$

Частным случаем степенной производственной функции (3.68) для двухфакторного технологического процесса является производственная функция Кобба-Дугласа (3.3). В таком частном случае двумя факторами могут оказаться труд L и капитал K .

Задание производственной функции позволяет ввести некоторые характеристики технологического процесса:

1) Отношение

$$m_j = \frac{y}{x_j} \quad (3.69)$$

называется ресурсоотдачей фактора (ресурса) x_j . Ресурсоотдача определяет выпуск продукции в расчете на единицу затрат соответствующего ресурса.

2) Обратная ресурсоотдаче величина

$$d_j = \frac{x_j}{y} \quad (3.70)$$

называется **ресурсоемкостью** единицы продукции (затрата ресурса на единицу выпущенной продукции).

3) Частная производная

$$q_j = \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad (3.71)$$

определяет **предельную ресурсоотдачу**, или **предельную продуктивность ресурса** (здесь, как и во многих других задачах экономической математики, слово "предельный" характеризует величины, описываемые с помощью производных, т.е., отнесенные к бесконечно малому изменению аргумента). Она характеризует прирост выпуска продукции в расчете на единицу прироста соответствующего ресурса.

4) Величина

$$E_j = \frac{q_j}{m_j} = \frac{x_j}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{\partial(\ln y)}{\partial(\ln x_j)} \quad (3.72)$$

задает эластичность выпуска продукции по фактору x_j . Эластичность определяет процентное значение прироста выпуска в расчете на 1% прироста затрат ресурса x_j .

Для линейной производственной функции (3.67)

$$q_j = a_j. \quad (3.73)$$

Для степенной производственной функции (3.68)

$$E_j = a_j. \quad (3.74)$$

Если значение эластичности находится в диапазоне между 0 и 1 (как в случае производственной функции Кобба-Дугласа), то с увеличением затрат ресурса x_j прирост выпуска на каждую дополнительную единицу затраченного ресурса постепенно уменьшается – имеет место убывание предельной продуктивности ресурса.

Каждый технологический способ отображается точкой в многомерном пространстве ресурсов. Координатами точки являются минимальные затраты ресурсов, необходимые для выпуска заданного объема продукции. Тогда каждому значению объема выпуска y (в денежном выражении) соответствует множество точек, описывающих разные эффективные технологические способы, позволяющие добиться данного объема выпуска. В многомерном пространстве эти точки задают определенную гиперповерхность. В простейшем случае двухфакторной произ-

водственной функции для каждого объема выпуска точки образуют на координатной плоскости линию – изокванту производственной функции (см. также главу 3.1). Чем дальше от начала координат находится изокванта, тем большему объему выпуска она соответствует (рис. 3.17).

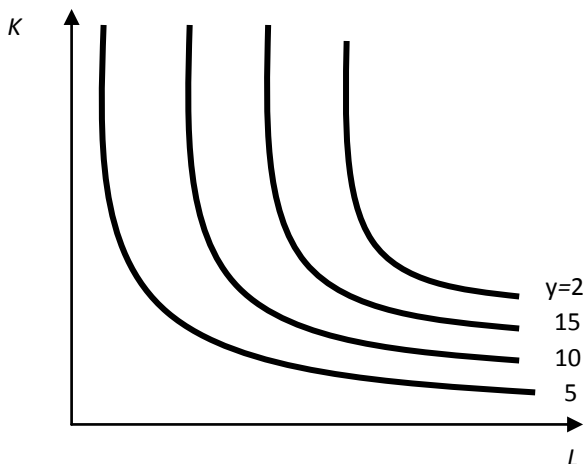


Рис. 3.17. Карта изоквант производственной функции

Анализируя изокванту, можно оценить возможность взаимозамены отдельных ресурсов, не приводящей к изменению объема выпуска.

Допустим, затраты ресурса x_j уменьшились на dx_j . На сколько надо увеличить в этом случае затраты ресурса x_k , чтобы объем выпуска остался неизменным? Ответ на этот вопрос определяется **коэффициентом замены**

$$\gamma_{jk} = -\frac{dx_k}{dx_j}. \quad (3.75)$$

Знак "минус" возникает из-за того, что изменения значений ресурсов x_j и x_k при смещении точки вдоль изокванты, как можно видеть, например, из рис. 3.17, имеют разные знаки.

Для определения коэффициента замены найдем дифференциал производственной функции при условии, что изменяются только ресурсы x_j и x_k , а затраты остальных ресурсов остаются неизменными:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial y}{\partial x_k} dx_k. \quad (3.76)$$

Т.к. значение y должно при замене ресурсов остаться неизменным, дифференциал dy равен нулю. Тогда из (3.76) получается, с учетом определения (3.71)

$$\gamma_{jk} = -\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{\partial y / \partial x_j}{\partial y / \partial x_k} = \frac{q_j}{q_k}. \quad (3.77)$$

Т.о., коэффициент замены ресурса x_j ресурсом x_k равен отношению предельных продуктивностей этих ресурсов.

3.5.2. Оптимизация структуры закупок ресурсов

Допустим, что известны цены на ресурсы $x_1, x_2, \dots, x_N$. Обозначим их соответственно $p_1, p_2, \dots, p_N$. Также допустим, что для приобретения этих ресурсов выделен определенный объем денежных средств b . Эти средства следует израсходовать таким образом, чтобы обеспечить максимально возможный объем выпуска продукции. Структура закупок ресурсов, обеспечивающая такой объем выпуска, определяется из решения задачи оптимизации. Рассмотрим ее постановку.

Любой вариант закупки ресурсов должен удовлетворять условию

$$\sum_{j=1}^N p_j x_j \leq b. \quad (3.78)$$

Поскольку можно предположить, что для максимального увеличения выпуска продукции, имеющиеся средства будут израсходованы полностью, неравенство можно заменить на равенство

$$\sum_{j=1}^N p_j x_j = b. \quad (3.79)$$

Это равенство определяет гиперплоскость в пространстве факторов, называемую **изокостой** (от английского слова "cost" – стоимость).

Тогда оптимальная структура закупок ресурсов определяется из решения задачи условной оптимизации

$$\begin{cases} y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^N p_j x_j = b. \end{cases} \quad (3.80)$$

Можно отметить значительное сходство задач оптимизации структуры закупок ресурсов (3.80) и оптимизации потребительского выбора (см. § 3.4.3). Оно вытекает из схождения экономических ситуаций, в которых оказываются потребитель и предприятие. Потребитель стремится добиться максимальной полезности для себя, покупая различные блага, и варьируя объемы закупок благ. Для предприятия "полезность" определяется выпуском продукции, приносящим прибыль. Чтобы максимизировать прибыль, надо варьировать объемы закупок ресурсов, обеспечивающих выпуск продукции.

Сходными оказываются и методы решения задач. Условную оптимизационную задачу (3.80) можно заменить эквивалентной задачей поиска безусловного максимума функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N) = y - \lambda \sum_{j=1}^N p_j x_j. \quad (3.81)$$

Решение задачи (2.81) определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_j} = \lambda p_j \quad (j = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{j=1}^N p_j x_j = b. \end{cases} \quad (3.82)$$

Множитель Лагранжа λ характеризует в данной задаче предельную продуктивность финансовых средств – прирост выпуска продукции в расчете на единицу увеличения вложенных в дело финансов.

Для двухфакторной задачи решение можно определить графически (рис. 3.18). Оптимальная структура закупки ресурсов x_1 и x_2 соответствует точке **D**, в которой прямая линия изо-

косты является касательной к графику изокванты производственной функции (значение объема выпуска, соответствующее этой изокванте, является максимально достижимым при заданном объеме финансовых средств **b**).

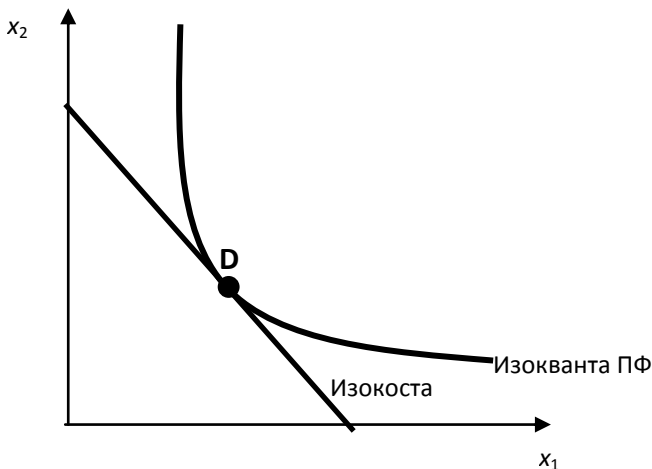


Рис. 3.18. Графическое решение задачи оптимизации закупок

Рассмотрим аналитическое решение задачи оптимизации структуры закупки ресурсов для случая закупки двух ресурсов, которыми являются труд и капитал, а технологический способ описывается с помощью производственной функции Кобба-Дугласа $y = AK^\alpha L^\beta$.

Параметрами задачи являются цены на капитал (норма банковского процента по кредитам r) и труд (ставка оплаты труда w).

Тогда система уравнений (3.82) запишется так:

$$\begin{cases} A\alpha K^{\alpha-1}L^\beta = \lambda r, \\ A\beta K^\alpha L^{\beta-1} = \lambda w, \\ rK + wL = b, \end{cases} \quad (3.83)$$

или

$$\begin{cases} \alpha \frac{y}{K} = \lambda r, \\ \beta \frac{y}{L} = \lambda w, \\ rK + wL = b. \end{cases} \quad (3.84)$$

Разделив первое уравнение на второе, исключим неизвестную λ

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{L}{K} = \frac{r}{w}.$$

Выразим K через L :

$$K = \frac{\alpha w}{\beta r} L.$$

Подставим это выражение в третье уравнение

$$\frac{\alpha w}{\beta} L + wL = b.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} L &= \frac{\beta b}{(\alpha + \beta)w}, \\ K &= \frac{\alpha w}{\beta r} L = \frac{\alpha b}{(\alpha + \beta)r}, \\ y &= AK^\alpha L^\beta = A \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta b^{\alpha + \beta}}{r^\alpha w^\beta (\alpha + \beta)^{(\alpha + \beta)}}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Предельная продуктивность финансовых средств λ можно найти из первого или второго уравнения системы (3.84)

$$\lambda = \frac{\alpha y}{rK} = \frac{\alpha y}{r} \cdot \frac{(\alpha + \beta)r}{\alpha \beta} = \frac{(\alpha + \beta)y}{b}. \quad (3.86)$$

Для производственной функции Кобба-Дугласа часто $\alpha + \beta = 1$. При этом решение упрощается:

$$K = \alpha \frac{b}{r}, \quad L = \beta \frac{b}{w}, \quad y = A \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{r^\alpha w^\beta} b, \quad \lambda = \frac{y}{b}. \quad (3.87)$$

В этом случае увеличение финансовых вложений b дает постоянную отдачу – на каждую дополнительно вложенную

единицу средств Δb получается один и тот же прирост выпуска продукции, равный $\lambda \Delta b$.

Если $\alpha + \beta > 1$, отдача возрастает – на каждую дополнительно вложенную единицу финансов получается все больший прирост выпуска. При $\alpha + \beta < 1$ отдача падает по мере увеличения вложений.

3.5.3. Математическое описание рынка. Функции предложения

Рассмотрим другую сторону производственной деятельности. Чтобы получить прибыль, предприятие должно реализовать произведенную продукцию по достаточно высокой цене. Для описания рыночной ситуации вводится **функция предложения $S(p)$** . Она описывает зависимость между рыночной ценой товара (произведенного предприятием продукта) p и его предложением на рынке S . Эта функция зависит от того, как взаимодействуют между собой производители одного и того же товара. Здесь возможны различные ситуации, в частности:

1) **Монополия** – весь товар производится одним производителем. В этом случае он может получать прибыль только за счет повышения цены, не меняя объем выпуска, так что $S(p) = \text{Const}$. Дополнительным условием возникновения монополии является отсутствие на рынке замещающих товаров.

2) **Олигополия** – товар производится небольшим числом производителей (в частном случае **дуополии** – двумя). В этом случае на зависимость между ценой и предложением могут влиять различные дополнительные факторы, например, возможность согласованного (прямой сговор) или независимого целенаправленного изменения цены с целью недопущения на рынок новых производителей.

3) **Совершенная (идеальная) конкуренция** – товар производится большим числом отдельных производителей, каждый из которых контролирует малую долю рынка, так что сговор между ними практически невозможен. Тогда при повышении цены каждый производитель будет стремиться повысить свою прибыль, увеличивая выпуск товара. Предложение товара в це-

лом возрастет, так что в случае совершенной конкуренции $S'_p > 0$.

В практике экономико-математического моделирования используют в основном два вида функций предложения, получаемых при статистическом обследовании рынка:

1) линейная

$$S(p) = b_0 + b_1 p, \quad b_0, b_1 > 0; \quad (3.88)$$

2) степенная

$$S(p) = b_0 p^\beta, \quad b_0, \beta > 0. \quad (3.89)$$

Как и в других случаях, важной характеристикой товара оказывается эластичность предложения по цене, показывающая процентный прирост предложения при увеличении цены на 1%

$$E_p(S) = \frac{p}{S} \frac{dS}{dp} = \frac{d \ln S}{d \ln p}. \quad (3.90)$$

Для линейной функции (3.88) $E_p(S) = b_p \bar{p} / \bar{S}$, где $\bar{p}, \bar{S}$ – средние значения цены и предложения в обследованном диапазоне (секторе рынка). Для степенной функции предложения $E_p(S) = \beta$.

4) В общем случае объем предложения товара может зависеть не только от его цены, но и от цен на другие товары. Тогда рассматривают систему функций предложения $S_j = S_j(p_1, p_2, \dots, p_n)$, где n – количество наименований товаров, и коэффициенты перекрестной эластичности $E_{p_i}(S_j)$. Если перекрестная эластичность отрицательна, то при возрастании цены на i -товар выпуск j -товара падает. Такие товары называются **конкурирующими**. Если же перекрестная эластичность положительна, то рост цены на i -товар стимулирует увеличение выпуска j -товара. Такие товары называются **комплектными**.

Возникает противоречие. С точки зрения потребителя, конкурирующие товары являются взаимозамещающими, комплектные – взаимодополняющими (см. § 3.4.1). Но из анализа моделей потребительского спроса мы знаем, что для нормальных товаров рост цены на один из взаимозамещающих товаров

увеличивает спрос на другой товар, так что логично было бы ожидать увеличения его выпуска для удовлетворения спроса.

Это противоречие снимается при анализе рыночного равновесия с учетом интересов, как потребителей, так и производителей. Такой анализ будет произведен позже.

3.5.4. Оптимизация структуры выпуска продукции в случае совершенной конкуренции

Продолжим односторонний анализ ситуации – с точки зрения производителя. Он стремится максимизировать получаемую прибыль, действуя в условиях сложившейся системы цен. Цены на производимые товары в этом случае часто рассматриваются, как **экзогенные** (внешние) параметры, величины которых не зависят от действий производителя.

Начнем с простейшего случая, когда предприятие производит один продукт в условиях совершенной конкуренции, в объеме y натуральных единиц. Цена продукта – p . Тогда валовой доход производителя будет равен

$$R(y) = py. \quad (3.91)$$

В ходе производства продукта производитель несет издержки в объеме $C(y)$. Вполне очевидно, что издержки описываются возрастающей функцией y , т.е., их величина растет при увеличении объема производства. Менее очевидным, но часто предполагаемым свойством функции $C(y)$ является то, что при увеличении y растет и скорость роста издержек. Иными словами, чем больше объем выпуска, тем большее увеличение издержек происходит при возрастании выпуска на одну и ту же величину. Причина этого может заключаться, например, в том, что для выпуска малого объема продукции производитель может использовать только наиболее совершенное оборудование и задействовать только наиболее квалифицированных рабочих. Если же объем выпуска возрастает, приходится привлекать менее квалифицированную рабочую силу (в результате чего возрастает процент брака) и задействовать резервное, более старое и ме-

нее надежное, оборудование, что приводит к росту непроизводительных простоев.

Указанные свойства функции издержек описываются математическими соотношениями

$$C'_y > 0, \quad C''_{yy} > 0. \quad (3.92)$$

По своей природе издержки делятся на:

- 1) материальные (сырье) C_M ;
- 2) оплату труда C_L ;
- 3) издержки, связанные с амортизацией, ремонтом оборудования и т.п. – это так называемая "оплата услуг капитала" C_K ;
- 4) дополнительные расходы различной природы, в основном связанные с расширением производства для выпуска дополнительной продукции – C_R .

Общая величина издержек состоит из трех частей:

- 1) постоянные расходы C_0 , не зависящие от объема выпуска: аренда административных помещений, оплата труда административно-управленческого персонала, амортизационные отчисления и др.;
- 2) линейные издержки $C_1 = ay$ (материальные затраты, оплата труда производственного персонала – рабочих, обслуживание оборудования, задействованного в выпуске продукции);
- 3) нелинейные издержки (нелинейными обычно являются всевозможные прочие расходы C_R); они описываются степенной функцией $C_2 = by^h$, где показатель степени $h > 1$.

Тогда полные издержки:

$$C(y) = C_0 + ay + by^h. \quad (3.93)$$

Легко видеть, что такая функция удовлетворяет условиям (3.92).

Стратегия действий производителя может зависеть от различных обстоятельств, влияющих на структуру издержек. Рассмотрим в качестве примеров два случая.

1. Предприятие располагает большими производственными мощностями, заведомо перекрывающими его потребности для обеспечения выпуска нужного количества продукции. В

этом случае ему не требуются дополнительные (нелинейные) издержки, так что в выражении (3.93) $C_2(y) = 0$.

Тогда с учетом (3.91), (3.93) прибыль предприятия выражается формулой

$$\Pi(y) = R(y) - C(y) = py - (C_0 + ay) = (p - a)y - C_0. \quad (3.94)$$

Видно, что при малом объеме выпуска y прибыль окажется отрицательна, т.е., предприятие будет нести убытки. Порог безубыточности y_{min} определяется условием $\Pi = 0$. Из (3.94) имеем

$$y_{min} = \frac{C_0}{p-a}. \quad (3.95)$$

Графическая иллюстрация данной ситуации приведена на рис. 3.19. Из рисунка легко понять, что прибыль вообще может появиться в данной ситуации только при условии, что наклон прямой валового дохода $R(y)$ больше, чем наклон прямой издержек $C(y)$, т.е., $p > a$ (цена продажи продукта выше, чем линейные издержки на единицу продукции).

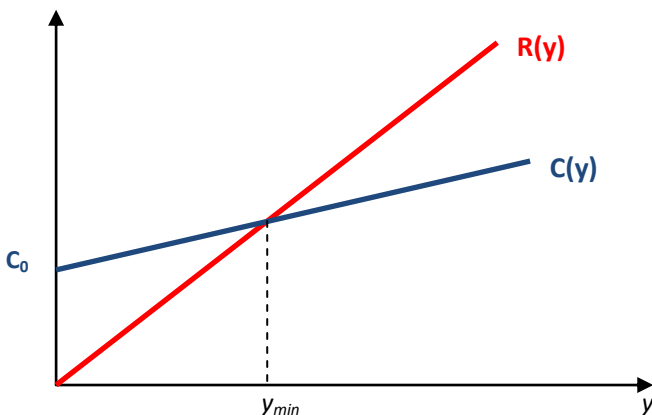


Рис. 3.19. Определение прибыли при линейной функции издержек

2. Фирма имеет возможность расширять производство. В этом случае надо учитывать также и нелинейные издержки $C_2 \neq 0$. Издержки выражаются формулой (3.93), а прибыль:

$$\Pi = R - C = py - (C_0 + ay + by^h). \quad (3.96)$$

Рассмотрим графики функций дохода и издержек (рис. 3.20).

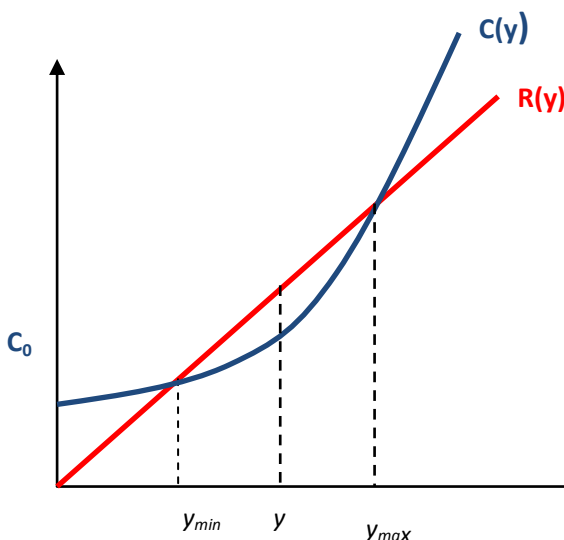


Рис. 3.20. Определение прибыли при нелинейной функции издержек

Из рис. 3.20 видно, что доход превышает издержки, т.е., производство приносит прибыль, при $y_{\min} < y < y_{\max}$. Точки безубыточности $y_{\min}$, $y_{\max}$ определяются путем решения уравнения $\Pi = 0$, или, с учетом (3.96)

$$by^h - (p - a)y + C_0 = 0. \quad (3.97)$$

Также можно видеть, что в некоторой точке отрезка $[y_{\min}, y_{\max}]$ прибыль, определяемая, как вертикальное расстояние между прямой дохода и кривой издержек, максимальна. Ве-

личину выпуска продукции, соответствующую максимальной прибыли, можно найти обычным способом поиска максимума – из решения уравнения $\Pi' = 0$. Дифференцируя (3.96), получаем

$$p - a - bhy^{h-1} = 0,$$

откуда оптимальный объем выпуска

$$y_M = \left(\frac{p-a}{bh} \right)^{\frac{1}{h-1}}. \quad (3.98)$$

Т.к. $\Pi' = R' - C'$, то в точке оптимального выпуска $R' = C'$. Графически это означает, что в этой точке касательная к кривой издержек $C(y)$ параллельна прямой валового дохода $R(y)$. Это позволяет искать оптимальный объем выпуска графически. С экономической точки зрения это означает, что при оптимальном выпуске продукции должны быть равны предельный (в расчете на дополнительную единицу продукции) доход и предельные издержки. В самом деле, если, например, $y < y_M$, то предельный доход превышает предельные издержки. При этом выпуск каждого нового изделия приносит дополнительную прибыль и имеет смысл увеличить выпуск продукции, приближаясь тем самым к точке y_M . Аналогично при $y > y_M$ предельные издержки превышают предельный доход и имеет смысл уменьшить выпуск.

Пример 3.10. Фирма производит сельскохозяйственные машины, рыночная цена на которые составляет 500 тысяч рублей за 1 машину. Существующие производственные мощности позволяют выпускать до 150 машин в месяц, при большем объеме выпуска необходимо расширять производство. Расчет возможных издержек показал, что их зависимость от предполагаемого объема выпуска y можно описать функцией

$$C(y) = 2000 + 350y + 5y^{1.5} \text{ (тыс. руб.)}.$$

Решение

Оптимальный объем выпуска в этом случае определяется с помощью формулы (3.98):

$$y_m = \left(\frac{500 - 350}{5 \cdot 1.5} \right)^{\frac{1}{0.5}} = \left(\frac{150}{7.5} \right)^2 = 20^2 = 400 \text{ (штук)}.$$

При этом валовой доход предприятия составит $400 \cdot 500 = 200000$ тыс. руб., издержки составят

$$C = 2000 + 350 \cdot 400 + 5 \cdot 400^{1.5} = 182\,000 \text{ (тыс. руб.)},$$

прибыль будет равна $200000 - 182000 = 18000$ тыс. руб.

Величины оптимального выпуска и прибыли существенно зависят от цены на товар. Если в приведенном примере цена одной машины увеличится на 10% и станет равна 550 тыс. руб., то повторный расчет по тем же формулам даст величину оптимального выпуска 711 машин в месяц и прибыль более 45000 тыс. руб. (т.е., в 2,5 раза – на 2400 % – больше).

3.5.5. Несовершенная конкуренция

В случае несовершенной конкуренции производитель может оказывать влияние на систему цен. В особенности это относится к монопольному производителю, который может формировать цену, исходя из различных собственных соображений, например, из уровня разумной рентабельности.

Допустим, производитель желает, чтобы прибыль при любом объеме выпуска составляла определенную долю $\gamma \in (0, 1)$ от валового дохода. Рассмотрим для простоты случай линейной функции издержек

$$C(y) = C_0 + ay. \quad (3.99)$$

Тогда прибыль, с учетом (3.91), (3.99), составит

$$\Pi = py - (C_0 + ay) = \gamma py.$$

Отсюда можно определить необходимую цену товара

$$p = \frac{C_0 + ay}{y(1 - \gamma)} = \frac{a}{1 - \gamma} + \frac{C_0}{y(1 - \gamma)}.$$

Видно, что при увеличении объема производства необходимая величина цены снижается, и производитель может пойти

на снижение практически существующей цены, исходя из каких-то дополнительных соображений. Уровень рентабельности останется неизменным.

Если же производитель не снизит цену на производимый товар, то он будет получать дополнительную прибыль.

3.5.6. Оптимизация структуры выпуска продукции в условиях ограниченности ресурсов

Другая простая модель используется, когда необходимо учесть ресурсные ограничения (тот факт, что какие-то ресурсы могут быть доступны производителю только в ограниченном количестве). В этой модели выделяется один, наиболее дефицитный, ресурс, и предполагается, что фирма может получить его в количестве не более Q единиц в месяц, производя при этом n различных продуктов. Объемы выпуска отдельных продуктов – y_j , цены на товары – p_j ($j=1, 2, \dots, n$). Также известна цена единицы дефицитного ресурса q . Расходом прочих ресурсов пренебрегают, считая, что основные издержки связаны с расходованием дефицитного (и, вероятно, дорогого) ресурса.

Будем считать, что функции издержек для каждого товара $C_j(y_j)$ удовлетворяют условиям (3.92). На расход ресурса накладывается ограничение

$$\sum_{j=1}^n C_j(y_j) \leq qQ.$$

Как и ранее в похожих случаях, полагаем, что для повышения прибыли фирма будет расходовать дефицитный ресурс полностью, так что вместо неравенства запишем равенство

$$C = \sum_{j=1}^n C_j(y_j) = qQ. \quad (3.100)$$

Тогда в денежном выражении величина издержек C окажется фиксированной. Поэтому увеличение прибыли

$$\Pi = R - C = \sum_{j=1}^n p_j y_j - qQ \quad (3.101)$$

эквивалентно увеличению валового дохода. В целом на основе (3.100), (3.101) можно сформулировать условную задачу оптимизации

$$\begin{cases} R = \sum_{j=1}^n p_j y_j \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n C_j(y_j) = qQ. \end{cases} \quad (3.102)$$

Как и раньше в подобных случаях, ставится эквивалентная задача поиска безусловного максимума функции Лагранжа

$$L = \sum_{j=1}^n p_j y_j - \lambda \sum_{j=1}^n C_j(y_j) \rightarrow \max. \quad (3.103)$$

Решение задачи определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \lambda(C_j)'_{y_j} = p_j, & (j = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n C_j(y_j) = qQ. \end{cases} \quad (3.104)$$

Видно, что конкретное решение зависит от вида функций издержек для отдельных товаров.

Допустим в качестве примера, что издержки для каждого товара описываются квадратичными функциями

$$C_j = a_j y_j^2.$$

Тогда

$$C'_j = 2a_j y_j$$

и из (3.104) получаем

$$2a_j y_j \lambda = p_j$$

откуда оптимальный выпуск каждого товара определяется выражением

$$y_j = \frac{p_j}{2a_j \lambda}. \quad (3.105)$$

Из последнего уравнения системы (3.104) находим

$$\sum_{j=1}^n a_j y_j^2 = \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{p_j}{2a_j \lambda} \right)^2 = qQ.$$

Отсюда после несложных преобразований находим величину множителя Лагранжа λ :

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{qQ} \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{a_j}}. \quad (3.106)$$

Подставив (3.106) в (3.105), получаем для какого-либо товара с индексом k величину выпуска

$$y_k = \sqrt{\frac{qQ}{\sum_{j=1}^n \frac{p_o^2}{a_j}}} \frac{p_k}{a_k}. \quad (3.107)$$

Видно, что объем выпуска каждого товара зависит от цен на все товары, выпускаемые предприятием. Если все цены одновременно увеличить одинаковым образом – в M раз, то значения y_i не изменятся – структура ассортимента останется неизменной. Если же меняется только одна из цен, то структура ассортимента изменяется. Из (3.105), (3.107) можно найти

$$\frac{\partial y_k}{\partial p_k} = \frac{1}{2\lambda a_k} > 0, \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_k} = -\frac{p_i p_k}{a_i a_k} \frac{\sqrt{qQ}}{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{a_j}} \right)^3} < 0. \quad (3.109)$$

Видно, что при возрастании цены p_k на какой-либо товар, выпуск этого товара y_k в оптимальном случае должен возрасти, а выпуск любого другого товара y_i должен уменьшиться. Таким образом, в описанной ситуации все товары являются конкурирующими между собой. Также из (3.107) видно, что

$$\frac{\partial y_k}{\partial Q} > 0,$$

так что при увеличении запаса ресурса выпуск каждого товара увеличивается, но для разных товаров степень этого увеличения будет разной.

Пример 3.11. Пусть выпускается два товара по ценам $p_1 = p_2 = 1$. Коэффициенты квадратичных издержек $a_1 = a_2 = 1$. Запас дефицитного ресурса $Q = 0,5$, его цена $q = 0,5$.

Решение

В этих условиях из (3.106), (3.107) находим

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{0,5 \cdot 0,5} \left(\frac{1^2}{1} + \frac{1^2}{1} \right)} = \sqrt{2} = 1,4142,$$

$$y_1 = \frac{1}{2 \cdot a_1 \cdot \lambda} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 1,4142} = 0,3536,$$

$$y_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 1,4142} = 0,3536.$$

Валовой доход $R = p_1 y_1 + p_2 y_2 = 1 \cdot 0,3536 + 1 \cdot 0,3536 = 0,7072$.

Издержки равны $C = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 = 1 \cdot 0,3536^2 + 1 \cdot 0,3536^2 = 0,25$. С другой стороны, их можно также найти по формуле $qQ = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

Прибыль $\Pi = R - C = 0,7072 - 0,25 = 0,4572$.

Пример 3.12. Пусть теперь цена 1-го товара увеличилась и стала равной 1,5. Прочие величины остались такими же, как в примере 3.11.

Аналогично расчетам примера 3.11 находим

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{0,5 \cdot 0,5} \left(\frac{1,5^2}{1} + \frac{1^2}{1} \right)} = 1,8028,$$

$$y_1 = \frac{1,5}{2 \cdot a_1 \cdot \lambda} = \frac{1,5}{2 \cdot 1 \cdot 1,8028} = 0,4160,$$

$$y_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 1,8028} = 0,2774.$$

Валовой доход $R = p_1 y_1 + p_2 y_2 = 1,5 \cdot 0,4160 + 1 \cdot 0,2774 = 0,9014$.

Издержки равны $C = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 = 1 \cdot 0,4160^2 + 1 \cdot 0,2774^2 = 0,1731 + 0,0769 = 0,25$. Таким образом, они по-прежнему равны величине qQ .

Прибыль $\Pi = R - C = 0,9014 - 0,25 = 0,6514$.

Как видно из сравнения результатов этих двух примеров, выпуск подорожавшего первого товара возрос, тогда, как выпуск второго упал. Прибыль предприятия заметно возросла.

3.6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

3.6.1. Равновесие в экономических системах

До сих пор мы рассматривали поведение двух субъектов экономики – потребителя и производителя – изолированно друг от друга. Теперь следует рассмотреть их взаимодействие в рамках более крупной структуры – рынка. Взаимодействие субъектов приводит к понятию **равновесия**.

В широком смысле слова равновесие в ситуации взаимодействия субъектов с несовпадающими интересами – это такое состояние системы (в политике или экономике), которое устраивает всех ее участников за неимением лучшего. В конкретных случаях даются более узкие определения понятия равновесия.

Пример 3.13. Допустим, в системе имеется несколько участников с несовпадающими интересами. Реализация целей каждого участника зависит как от его действий, так и от действий других участников. При этом участники действуют независимо друг от друга и не обмениваются информацией о предполагаемых действиях. В итоге каждый участник должен предполагать, что остальные участники процесса действуют оптимальным для себя образом. В этом случае равновесным считается такое состояние системы, при котором отклонение от нее любого из участников при условии неизменного поведения остальных ухудшает его собственное положение. Это **равновесие по Нэшу** (Джон Форбс Нэш (род. в 1928 г.) – американский математик, лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 г.). Частным случаем равновесия по Нэшу для случая двух участников с прямо противоположными интересами является равновесие с **седловой точкой**. Эти понятия широко используются в теории игр, входящей в круг интересов одной из экономико-математических дисциплин – **исследования операций**.

Пример 3.14. Если участники процесса, интересы которых не совпадают, могут обмениваться информацией о предполагаемых действиях, то равновесие может возникнуть вследствие того, что любая информация со стороны одного участника о его

предполагаемых действиях, приносящих ущерб другим участникам, встречает ответную информацию о предполагаемых противодействиях, и это заставляет участника воздержаться от каких-либо действий. Такое **равновесие на основе угроз** часто встречается в политике.

В моделях рынка под равновесием понимается равенство спроса на товар ***D*** и предложения этого товара ***S*** при определенной цене на него ***p****. Соответствующая цена называется **равновесной**. Математическое выражение равновесия

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Графическая иллюстрация этого определения (при условии, что товар является нормальным) дана на рис. 3.21.

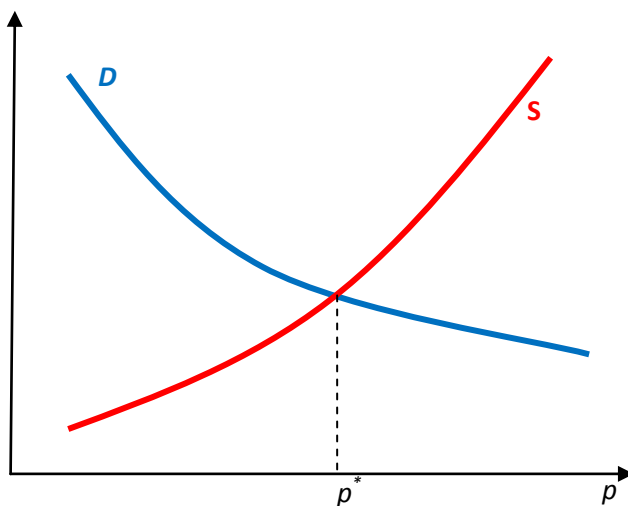


Рис. 3.21. Равновесие спроса и предложения

Цена равновесия ***p**** определяется под влиянием факторов производства и потребления. Со стороны производителя на нее влияют удельные издержки на производство товара, со стороны

потребителя – доход потребителя и относительная полезность товара.

В более общем случае равновесием считается любое состояние, в котором избыточный спрос $E = D - S$ неположителен: $D - S \leq 0$.

3.6.2. Влияние спроса и предложения на рыночное равновесие

Качественно проследить влияние различных факторов на параметры равновесия в случае одного товара можно на основе графического анализа.

Допустим, доход потребителя увеличился. В этом случае кривая спроса займет более высокое положение (рис. 3.22, кривая D'). Видно, что точка равновесия смещается при этом вправо – в сторону более высокой цены равновесия. Величина равновесного спроса-предложения, т.е., объема продаж (в натуральном выражении), определяемая вертикальной координатой точки пересечения кривых спроса и предложения, также увеличивается (само собой, объем продаж в данном случае увеличивается и в денежном выражении).

Если на рынке появляется более эффективный или дешевый заменитель данного товара, спрос на него падает. В результате кривая спроса смещается вниз (рис. 3.22, кривая D''). Можно видеть, что новая цена равновесия $p^{*''}$ становится меньше первоначальной, а объем продаж падает как в натуральном, так и в денежном выражении.

Изменения предложения товара, в свою очередь, также влияют на спрос. Например, повышение предложения возникает при уменьшении издержек вследствие снижения цен на сырье при появлении новых его источников (скажем, открытии новых месторождений), вследствие внедрения новых прогрессивных технологий и по другим причинам. В этом случае кривая предложения смещается вверх (рис. 3.23, кривая S'). Видно, что новой точке равновесия соответствуют меньшая цена и более высокий объем продаж (в натуральном выражении).

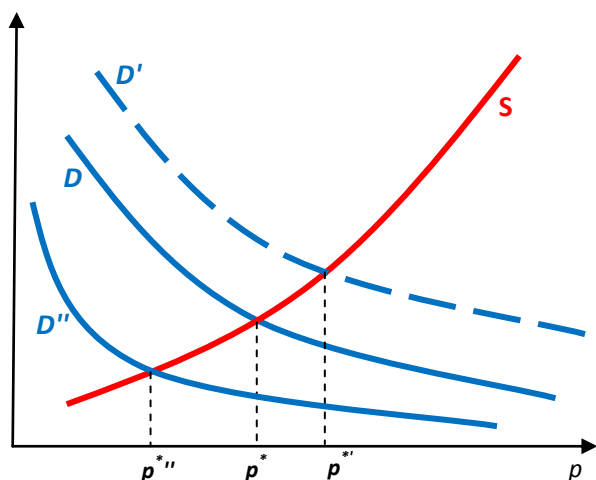


Рис. 3.22. Влияние изменений спроса на равновесие

Предложение может и снижаться при уменьшении производства товара из-за снижения поставок сырья – импортного, или сельскохозяйственного при неурожае, из-за разрыва ранее существовавших хозяйственных связей, подорожания дефицитного сырья и др. Во всех этих случаях кривая предложения смещается вниз (рис. 3.23, кривая S''). Новое равновесие устанавливается при более высокой цене $p^{*''}$ и уменьшенном объеме продаж (также в натуральном выражении).

Изменение объема продаж в денежном выражении при изменениях предложения нельзя предсказать однозначно на качественном уровне, т.к. изменения объема продаж в натуральном выражении и цены на товар в этом случае разнонаправлены. Денежный объем может, как вырасти, так и уменьшиться.

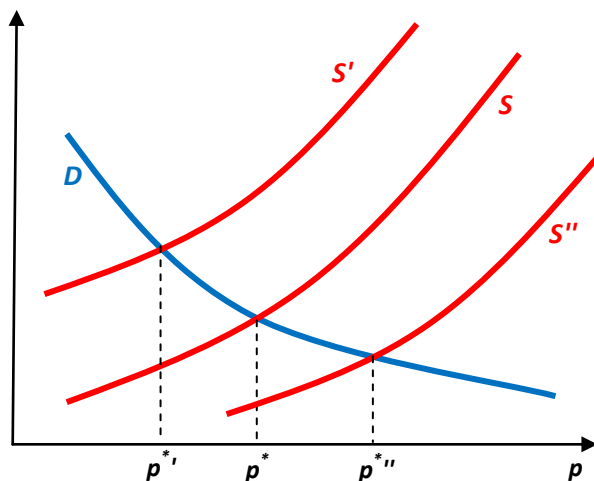


Рис. 3.23. Влияние изменений предложения на равновесие

Из приведенного анализа можно видеть, что одностороннее увеличение доходов потребителей (и, соответственно, спроса), не сопровождаемое повышением предложения (т.е., совершенствованием производства) ведет к росту цен. Такое явление называется **инфляцией спроса**. С другой стороны, повышение цен происходит и при снижении предложения (вследствие повышения издержек) в условиях неизменного спроса – это **инфляция издержек**.

Более подробный анализ равновесия, связанный с одновременным изменением, как спроса, так и предложения, требует знания математических выражений функций спроса и предложения.

Рассмотрим простой пример.

Пример 3.15. Пусть в системе производится и продается один товар. Функция издержек при его производстве является квадратичной и имеет вид

$$C(y) = C_0 + by^2,$$

а спрос потребителя описывается сравнительно простой функцией

$$D(p) = \frac{\gamma I}{p},$$

где I – доход потребителя, γ – постоянный коэффициент, определяющий относительную полезность рассматриваемого товара среди различных товаров, приобретаемых потребителем. Такая функция представляет собой сочетание степенных моделей функции спроса (3.43) и (3.49), с показателями, равными 1 в обоих случаях.

Решение

Оптимальное решение, определяющее предложение товара в зависимости от цены, имеет вид (3.98) при $a = 0$, $h = 2$

$$S(p) = \frac{p}{2b}.$$

Тогда цена равновесия p^* определяется из решения уравнения (3.110), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{p}{2b} = \frac{\gamma I}{p}.$$

Отсюда находим параметры равновесия: цену и спрос-предложение (т.е., равновесный объем продаж товара)

$$p^* = \sqrt{2\gamma b I}, \quad S^* = \sqrt{\frac{\gamma I}{2b}}.$$

Можно видеть, что при увеличении издержек (коэффициента b) цена равновесия увеличивается, а объем продаж падает. Выручка производителя

$$p^* S^* = \gamma I$$

остаётся постоянной и составляет долю γ от дохода, которую потребитель намерен выделять для покупки данного товара.

При увеличении дохода потребителя I или относительной полезности товара γ увеличиваются и спрос на товар, и равновесная цена на него.

Следует иметь в виду, что подобный расчет параметров равновесия малопригоден для определения равновесной цены в реальных ситуациях. Это связано со стохастическим (см. часть 1) характером моделей спроса и предложения. В реальности на спрос и предложение влияет большое количество случайных внешних факторов, и реальные значения могут отличаться от расчетных. Поэтому достижение равновесия на реальном рынке происходит постепенно. Далее мы рассмотрим некоторые модели процессов прихода к равновесию.

3.6.3. Виды рыночного равновесия

В конкурентной экономике достижение равновесия происходит стихийно в результате совершения большого числа рыночных сделок. Если цена высока (превышает равновесную), у производителей возникает стремление увеличить количество предлагаемого товара. Но оно будет превышать то количество, на которое покупатели намерены предъявить спрос. В результате часть продавцов захочет избавиться от излишков товара, сбывая его по сниженной цене. Возникает давление на цену в сторону ее снижения. Аналогичным образом в случае заниженной цены возникнет давление на нее в сторону повышения.

При возникновении устойчивого спроса на товар, зависящего только от его цены и не зависящего от времени, различают три вида равновесия (рис. 3.24):

- 1) **Мгновенное** равновесие создается в условиях краткого периода времени после возникновения спроса, если производители не в состоянии сразу расширить производство и предложение товара на какое-то время остается фиксированным (линия S_1). В этих условиях равновесие устанавливается на высоком уровне цены p^*_1 , что стимулирует производителей к расширению производства.

- 2) Если после установления мгновенного равновесия производители быстро вводят в действие имеющиеся резервы (сво-

бодные производственные мощности), предложение может за достаточно короткий срок несколько увеличиться, причем тем сильнее, чем выше существующая цена на товар (линия S_2). В результате равновесная цена несколько понижается – до уровня p^*_2 . Такое равновесие называется **кратковременным**.

3) Если равновесная цена после достижения кратковременного равновесия остается достаточно высокой, к выпуску товара подключаются все производители, которые способны наладить выпуск данного товара (в том числе и те, кто до сих пор этим не занимался). Предложение еще более возрастает (линия S_3) и равновесная цена снижается до уровня p^*_3 , соответствующего нормальным издержкам производства. Если же предложение окажется избыточным и цена понизится до более низкого значения, часть производителей может уйти с рынка, снизив тем самым предложение и создав условия для повышения равновесной цены. В результате устанавливается длительное нормальное равновесие.

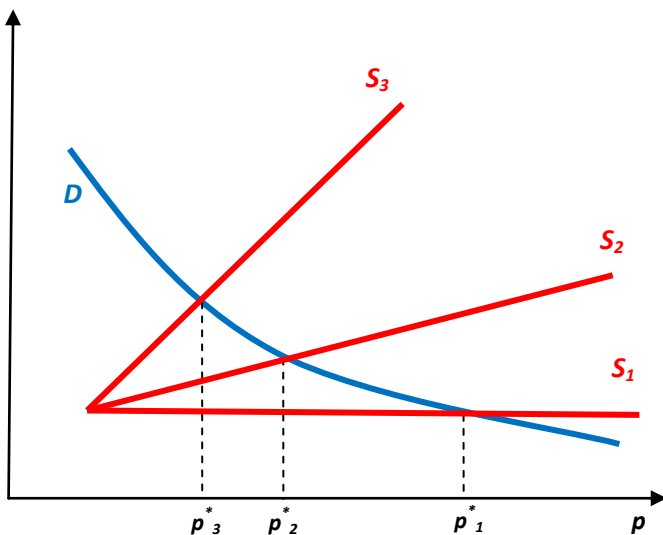


Рис. 3.24. Виды рыночного равновесия

3.6.4. Стихийное достижение равновесия на рынке одного товара. Паутинообразная модель

Процесс приближения к нормальному равновесию можно представить при помощи последовательности дискретных шагов, анализируя кривые спроса и предложения. Процесс колебаний рынка разбивается на отдельные интервалы времени, условно называемые торговыми днями (по продолжительности они не обязаны совпадать с днями календарными).

Допустим, что к началу 1-го торгового дня установилась некая цена p_1 . Она определяет уровень предложения S_1 (рис. 3.25, точка A). Но при столь высоком предложении равный ему спрос D_1 соответствует более низкой цене p_2 (точка B). Иными словами, покупатели не станут покупать товар по высокой цене p_1 . Возникает описанное выше давление на цену в сторону снижения и цена упадет до уровня p_2 , обеспечивающего нужный спрос на товар и его реализацию в течение торгового дня.

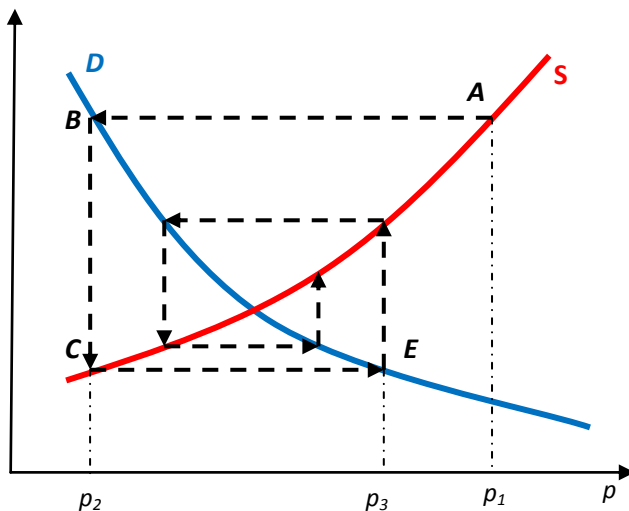


Рис. 3.25. Паутинообразная модель установления равновесия

Эта цена становится исходной для следующего торгового дня. Но теперь уже производители не согласны предложить по столь низкой цене прежнее количество товара. Предложение упадет до уровня, соответствующего цене (точка **C**). Возникает ситуация неудовлетворенного спроса, при которой покупатели согласны платить за товар дороже. Это стимулирует повышение цены в течение торгового дня до уровня p_3 (точка **E**). На третий день повторяется та же ситуация, что и в первый день, и т.д.

Геометрическое изображение этого процесса (ломаная сходящаяся спираль) напоминает паутину, поэтому такая модель установления равновесия часто называется **паутинообразной**. Можно доказать, что процесс колебаний является сходящимся, если всюду в диапазоне цен между p_2 и p_1 выполняется условие

$$S' \leq |D'|. \quad (3.111)$$

Это значит, что реакция производителя на изменение цены не должна быть столь же сильной, что и реакция покупателя. В случае, когда производитель реагирует на изменение цены сильнее, чем покупатель, спираль начнет раскручиваться в обратном порядке и достижение равновесия по указанной модели невозможно. В истории известны случаи подобного "раскачивания" рынка – колебания цен с постепенно увеличивающейся амплитудой.

В этом случае процесс описывается сходной паутинообразной моделью, но рассматривается процесс, происходящий в обратной последовательности:

1) Исходная цена на момент начала первого торгового дня определяет уровень спроса D_1 .

2) Если спрос не удовлетворен (предложение мало), происходит повышение цены, стимулирующее производителей увеличить предложение.

3) На следующий день производители предлагают большее количество товара, которое оказывается превышающим спрос, соответствующий установившейся накануне высокой цене. Цена снижается и т.д.

Если же кривые спроса и предложения таковы, что

$$S' = |D'|. \quad (3.112)$$

то возникает ситуация **свиного** цикла, когда спираль "закольцовывается" и достижение равновесия оказывается невозможным. Цена будет день ото дня устойчиво колебаться с постоянной амплитудой, между двумя повторяющимися значениями. Для выхода из такой ситуации необходимо регулирование цен.

Для иллюстрации применения паутинообразной модели воспользуемся примером 3.10, слегка дополнив его.

Пример 3.16. Фирма производит сельскохозяйственные машины, Расчет возможных издержек показал, что их зависимость от предполагаемого объема выпуска y можно описать функцией

$$C(y) = 2000 + 350y + 5y^{1.5}, \text{ (тыс. руб.)}.$$

Оптимальный объем выпуска машин по цене p в этом случае определяется с помощью формулы (3.98):

$$y_{\text{предл}} = \left(\frac{p - 350}{5 \cdot 1.5} \right)^{\frac{1}{0.5}}, \text{ (штук)}.$$

Эта формула определяет функцию предложения. Допустим, что анализ рынка показал: спрос на машины в зависимости от цены (функция спроса) задается формулой

$$y_{\text{спр}} = \frac{10000}{\sqrt{p}}.$$

Тогда основное уравнение равновесия (3.110) примет вид

$$\left(\frac{p - 350}{7.5} \right)^{\frac{1}{0.5}} = \frac{10000}{\sqrt{p}}.$$

Разрешим это уравнение относительно цены p в левой части:

$$\frac{p - 350}{7.5} = \frac{100}{\sqrt[4]{p}},$$

$$p = \frac{750}{\sqrt[4]{p}} + 350.$$

Эта формула позволяет определить цену следующего торгового дня по цене текущего

$$p_{i+1} = \frac{750}{\sqrt[4]{p_i}} + 350.$$

Результаты расчетов сведем в таблицу 3.1.

Таблица 3.1

Результаты расчетов задачи

i	p_i	p_{i+1}
1	600,00	501,54
2	501,54	508,48
3	508,48	507,94
4	507,94	507,98
5	507,98	507,98

Видно, что цена колеблется, постепенно приближаясь к равновесному уровню 507, 98 тыс. руб. Величину равновесного объема продаж можно найти из выражений функций спроса или предложения, подставив в формулу значение равновесной цены:

$$y = \frac{10000}{\sqrt{507,98}} = 443,69, (\text{машин}).$$

Поскольку число машин получилось дробным, его следует округлить до целого в сторону уменьшения (чтобы получить незначительный отрицательный избыточный спрос).

3.6.5. Достижение равновесия на рынке одного товара в условиях регулирования цен. Модели «нащупывания»

При расчетах с помощью паутинообразной модели цена день ото дня испытывает колебания с постепенно уменьшающейся амплитудой. Возможен такой вариант процесса достижения равновесной цены, когда цена меняется строго монотонно. Он называется "нащупыванием". В процессе нащупывания важную роль играет централизованное регулирование цен.

Одной из моделей процесса нащупывания является **модель Самуэльсона** (П. Э. Самуэльсон (1915-2009) – американский экономист, лауреат Нобелевской премии 1970 г. по экономике). В этой модели изменение цены на начало нового торгового дня пропорционально величине избыточного спроса, имевшего место накануне

$$p_{i+1} = p_i + aE_i = p_i + a[D(p_i) - S(p_i)], (a > 0). \quad (3.113)$$

Установлением цены занимается некий регулирующий орган или лицо – **арбитр**. По итогам торгов дня арбитр оценивает величину остаточного спроса и на основе этой оценки объявляет цену следующего торгового дня. Участники торгов обязаны следовать его указаниям. В результате производители, соотносясь с объявленной ценой, обеспечивают предложение товара, определяемое функцией предложения. Покупатели, ориентируясь на указанную цену, обеспечивают в течение торгового дня спрос на товар, определяемый функцией спроса. Разница спроса и предложения определяет избыточный спрос и, с помощью (3.113), цену товара на новый день.

Коэффициент ***a*** называется **параметром настройки**. Его выбор играет большую роль. При слишком малых значениях параметра процесс приближения к равновесной цене затягивается надолго. При чересчур больших значениях параметра процесс может утратить сходимость и не привести к искомому равновесию. Для правильного выбора параметра настройки арбитр должен предварительно проанализировать примерный вид функций спроса и предложения и выбрать подходящее значение парамет-

ра. По ходу торгового процесса значение параметра может быть скорректировано.

В приведенной ниже таблице 3.2 показано применение модели Самуэльсона для поиска равновесной цены на сельскохозяйственные машины из примера, рассмотренного выше. Параметр настройки выбран равным 0,1. При больших значениях параметра процесс теряет устойчивость, и рынок начинает "раскачиваться" – цена испытывает колебания с постепенно увеличивающейся амплитудой.

Таблица 3.2

Применение модели Самуэльсона для поиска равновесной цены

i	p_i	$D(p)$	$S(p)$	$E(p)$	p_{i+1}
1	600,00	408,25	1111,11	-702,86	529,71
2	529,71	434,49	574,17	-139,68	515,75
3	515,75	440,33	488,39	-48,05	510,94
4	510,94	442,40	460,48	-18,08	509,13
5	509,13	443,18	450,19	-7,01	508,43

На рис. 3.26 приведены графики изменения цены по торговым дням в паутинообразной модели и модели Самуэльсона для рассмотренного примера, построенные по результатам расчетов, приведенных в таблицах для этих моделей.

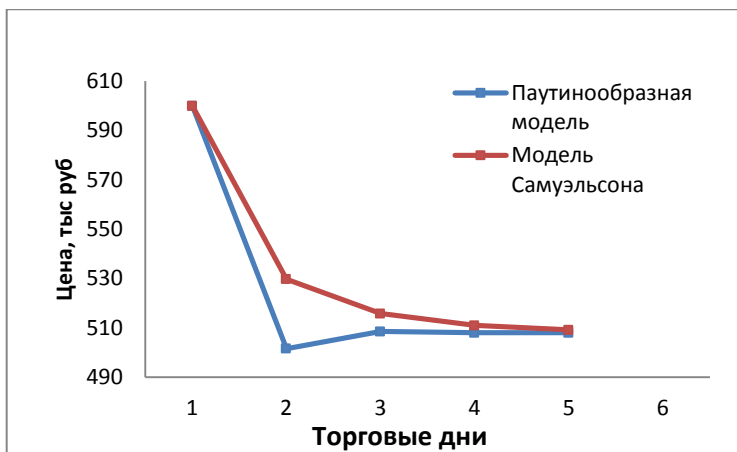


Рис. 3.26. Установление рыночного равновесия в паутинообразной модели и модели Самуэльсона

3.6.6. Достижение равновесия на многотоварном рынке

В случае, если на рынке присутствуют одновременно несколько взаимозаменяемых товаров, установление равновесия происходит аналогично случаю одного товара.

Допустим, что к началу 1-го торгового дня установилась некая система цен $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1K})$. Она определяет уровень предложений $S_{1k}, (k=1, 2, \dots, K)$ для совокупности из K товаров. В течение дня все предложенные товары распродаются в полных объемах, но уже по тем ценам, которые согласны платить покупатели. Это порождает для следующего торгового дня новую систему цен p_2 , которые можно определить, решая систему уравнений

$$D_k(p_2) = S_{1k}, \quad (3.114)$$

где D_k — функция спроса на k -товар. Согласно теории потребительского поведения она определяется системой цен на все взаимозаменяемые товары.

Возможно и применение модели "нащупывания", которая в случае многих товаров имеет вид

$$p_{i+1,k} = \max[0; p_{i,k} + a_k(D_{i,k} - S_{i,k})], \quad (3.115)$$

где a_k – параметры настройки.

3.6.7. Равновесие в системе с ограниченными ресурсами. Задача выпуклого программирования

Рассмотренная задача описывает процесс производства товаров с помощью функций предложения, на которые не накладывается существенных ограничений. Для того, чтобы рассмотреть более сложную экономическую систему, учитывающую возможную ограниченность ресурсов производства, необходимо предварительно ознакомиться с новым классом математических задач оптимизации.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования. Ее формулировка такова:

Требуется максимизировать вогнутую функцию N переменных

$$f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N) \rightarrow \max$$

при следующих условиях:

- 1) все переменные $x_j \geq 0$;
- 2) выполняются неравенства $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, M$);
- 3) все функции g_i – вогнутые.

Напомним, что **вогнутыми** называются функции, у которых во всей области их определения отрицательна вторая производная (для функций нескольких переменных – вторые производные по всем аргументам).

Необходимые и достаточные условия существования решения этой задачи определяет **теорема Куна-Таккера**:

Для того чтобы точка (вектор) $x^ = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ являлась решением задачи выпуклого программирования, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка (вектор) $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_i, \dots, u_M)$, чтобы пара точек x^*, u^* образовывала неотрицательную седловую точку функции Лагранжа*

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^M u_i g_i(x). \quad (3.116)$$

Это означает, что при отклонении любой составляющей вектора $\mathbf{x}$ от данной точки функция $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ уменьшается, а при отклонении любой составляющей вектора $\mathbf{u}$ от этой же точки – увеличивается:

$$L(x, u^*) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x^*, u). \quad (3.117)$$

Для нахождения седловой точки функции Лагранжа применяются различные итерационные алгоритмы (алгоритмы последовательных приближений). В экономическом моделировании используется алгоритм (модель) **Эрроу-Гурвица** (К. Эрроу (род. 1921) и Л.Гурвиц(1917-2008) –американские экономисты, лауреаты Нобелевской премии по экономике 1972 и 2007 г соответственно). Процесс осуществляется по шагам, причем на каждом $(l+1)$ -шаге значения неизвестных $\mathbf{x}_j$ и параметров $\mathbf{u}_i$ определяются через предыдущие значения этих величин (на l -шаге) с помощью формул:

$$(x_j)_{l+1} = \max \left\{ 0; (x_j)_l + \alpha_j \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_l + \sum_{i=1}^M (u_i)_l \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_l \right] \right\}, \quad (3.118)$$

$$(u_i)_{l+1} = \max \{ 0; (u_i)_l - \beta_i g_i(x_l) \}. \quad (3.119)$$

Положительные параметры α_j и β_i называются параметрами настройки и должны быть выбраны относительно малыми, иначе процесс поиска потеряет устойчивость. Окончание поиска происходит, когда отличие найденных значения неизвестных $\mathbf{x}_j$ и параметров $\mathbf{u}_i$ от предыдущих становится достаточно малым. Основные варианты условия окончания:

$$\sum_{j=1}^N \left[(x_j)_{l+1} - (x_j)_l \right]^2 < \varepsilon \quad (3.120)$$

или

$$\max_j \left| (x_j)_{l+1} - (x_j)_l \right| < \varepsilon \quad (3.121)$$

где ε – заранее выбранная малая величина.

Полученный в ходе решения вектор x определяет решение задачи, а компоненты вектора u характеризуют сравнительную важность ограничений задачи.

Можно отметить, что для рассматриваемой задачи алгоритм Эрроу-Гурвица представляет собой алгоритм "нащупывания" оптимального решения.

Рассмотрим сложную экономическую систему, состоящую из потребительского сектора, производственного сектора и сектора ресурсов.

Предположим, что на рынке обращается N товаров (благ). Набор этих благ $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N)$ описывается единой функцией полезности

$$U(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N).$$

Структура производственного сектора такова. Блага производятся каждое отдельным производителем в количестве y_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Уровень производства определяется производственной функцией

$$y_j = f_j(r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jK}), \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (3.122)$$

где r_{jk} – затраты k -ресурса ($k = 1, 2, \dots, K$) на производство j -продукта (блага).

Структура ресурсного сектора описывается набором объемов ресурсов R_k , предназначенных для использования в производственном секторе. На использование ресурсов накладываются очевидные ограничения

$$\sum_{j=1}^N r_{jk} \leq R_k, \quad (\text{для всех } k). \quad (3.123)$$

Состояние равновесия (в широком смысле) определяется как следующее соотношение между спросом x и предложением y одновременно для каждого товара:

$$x_j \leq y_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (3.124)$$

Требуется отыскать такие значения объемов потребления x_j , при которых функция полезности $U(x)$ окажется максимальной и будут выполнены как условия ограниченности ресурсов

(3.123), так и условия равновесия (3.124). С учетом (3.122) получаем следующую математическую запись задачи

$$U(x_1, x_2, \dots, x_N) \rightarrow \max \quad (3.125)$$

при условиях

$$f_j(r_j) - x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.126)$$

$$R_k - \sum_{j=1}^N r_{jk} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.127)$$

$$x_j \geq 0, \quad r_{jk} \geq 0. \quad (3.128)$$

Легко видеть, что данная задача представляет собой частный случай задачи выпуклого программирования. Роль целевой функции f в данном случае играет функция полезности U , а функциям ограничений g_i соответствуют выражения

$$\bar{g}_j = f_j(r_j) - x_j$$

и

$$\bar{\bar{g}}_k = R_k - \sum_{j=1}^N r_{jk}.$$

Тогда функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(x, p, w) = U(x) + \sum_{j=1}^N p_j [f_j(r_j) - x_j] + \sum_{k=1}^K w_k (R_k - \sum_{j=1}^N r_{jk}) \quad (3.129)$$

Эта функция содержит два вектора множителей Лагранжа. Компоненты вектора $p = (p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_N)$ имеют смысл оптимальных цен на различные виды продукции. Компоненты вектора $w = (w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_K)$ соответствуют оценкам используемых в производстве ресурсов – материальных, или сырьевых (тогда w_k – цена единицы сырья), трудовых, или человеческих (тогда w_k – ставка заработной платы), финансовых (тогда соответствующий параметр задает оценку стоимости услуг капитала – ставку банковского процента по кредитам) и т.п. Дополнительную группу вспомогательных неизвестных образуют значения r_{jk} – расходов k -ресурса на выпуск единицы j -товара.

Итерационные формулы для поиска оптимальных параметров рынка в этом случае имеют вид:

$$(x_j)_{l+1} = \max \left\{ 0; (x_j)_l + \alpha_j \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_l - (p_j)_l \right] \right\}, \quad (3.130)$$

$$(r_{jk})_{l+1} = \max \left\{ 0; (r_{jk})_l + \beta_{jk} \left[(p_j)_l \left(\frac{\partial f_j}{\partial r_{jk}} \right)_l - (w_k)_l \right] \right\}, \quad (3.131)$$

$$(p_j)_{l+1} = \max \left\{ 0; (p_j)_l - \gamma_j \left[(f_j(r_j))_l - (x_j)_l \right] \right\}, \quad (3.132)$$

$$(w_k)_{l+1} = \max \left\{ 0; (w_k)_l - \delta_k \left[R_k - \sum_{j=1}^N (r_{jk})_l \right] \right\}. \quad (3.133)$$

Данный итерационный процесс достаточно точно имитирует рыночный механизм достижения равновесия путем варьирования объемов спроса на блага (товары) и ресурсы, а также объемов соответствующих цен. Отдельные шаги итерационного процесса в этом случае соответствуют торговым дням.

Контрольные вопросы

1. Что определяет производственная функция в экономической системе?
2. Что понимается под спецификацией и параметризацией производственной функции?
3. В чем заключается закон убывающей эффективности?
4. Что представляет собой изокванта функции нескольких переменных?
5. Как меняется объем трудовых ресурсов в модели Мальтуса? При каких условиях эта модель адекватна?
6. Дайте определение величины капиталовооруженности.
7. Какая ситуация описывается золотым правилом накопления капитала в модели Солоу?
8. Как изменяется уровень потребления при изменении нормы сбережения до оптимального уровня в случае, если первоначально эта норма была выше оптимальной (соответствующей золотому правилу накопления капитала)? Как меняется уро-

вень потребления после изменения нормы сбережения, если первоначально она была ниже оптимальной?

9. Какая экономическая система описывается моделью Леонтьева?

10. Что представляют собой элементы технологической матрицы (матрицы прямых затрат) в модели Леонтьева?

11. В каком случае модель Леонтьева называется продуктивной?

12. Что определяют элементы матрицы полных затрат в модели Леонтьева?

13. Что понимается под отношением слабого предпочтения в теории потребительского поведения? В каком случае между потребительскими наборами имеет место отношение безразличия? Отношение сильного предпочтения?

14. Что понимается под функцией полезности?

15. Что представляет собой кривая безразличия?

16. Какое свойство отдельных благ в потребительском наборе называется их взаимозамещением?

17. Какое свойство отдельных благ в потребительском наборе называется их взаимодополнением?

18. Что представляет собой предельная норма замещения блага? Каково ее математическое выражение?

19. Какой смысл имеет множитель Лагранжа при решении задачи оптимизации потребительского выбора набора из нескольких благ?

20. Какие товары (блага) называются нормальными?

21. Какие товары (блага) называются аномальными?

22. Охарактеризуйте виды аномальных товаров.

23. Дайте определение коэффициента эластичности функции $y(x)$ по независимой переменной x . Что характеризует коэффициент эластичности?

24. Какие товары называются ценными и малоценными?

25. Как меняется спрос на благо (товар), если цена на него повышается, но потребители получают компенсацию дохода в размере, уравнивающем это повышение цены?

26. Дайте определения основных характеристик технологического способа: ресурсоотдачи, ресурсоемкости, предельной продуктивности ресурса.

27. Что характеризует коэффициент замены одного ресурса другим?

28. Что такое изокоста?

29. Что определяет функция предложения?

30. Какие товары на рынке называются конкурирующими (с точки зрения производителя)?

31. Какие товары на рынке называются комплектными (с точки зрения производителя)?

32. При каком условии возникает рыночное равновесие?

33. Что такое инфляция спроса?

34. Что такое инфляция издержек?

35. Что представляют собой мгновенное, кратковременное и длительное нормальное равновесие на рынке при возникновении устойчивого спроса на товар? Как они достигаются?

36. Опишите паутинообразный процесс достижения рыночного равновесия.

37. Опишите процесс достижения рыночного равновесия по модели Самуэльсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов, Н.Н. Курс математической экономики / Н.Н.Данилов. – М.: Высшая школа, 2006. – 407 с.
2. Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для вузов / М.В. Грачева, Л.Н. Фадеева, Ю.Н. Черемных (ред.). – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 791 с.
3. Коробов, П.Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов / П.Н.Коробов. – СПб.: Издательство ДНК, 2006. – 376 с.
4. Кундышева, Е.С. Экономико-математическое моделирование: Учебник / Е.С.Кундышева. – М.: Дашков и К°, 2008. – 424 с.
5. Маркин, Ю.П. Математические методы и модели в экономике: Учебное пособие / Ю.П. Маркин. – М.: Высшая школа, 2007. – 422 с.
6. Моделирование экономических процессов: Учебник. / М.В. Грачева, Л.Н. Фадеева, Ю.Н. Черемных (ред.). – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 351 с.
7. Монахов, А.В. Математические методы анализа экономики / А.В.Монахов. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
8. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие. / И.В. Орлова, В.А. Половников. – М.: Вузовский учебник, 2007. – 365 с.
9. Решение экономических задач на компьютере / А.В.Каплан, В.Е.Каплан, М.В.Мащенко, Е.В.Овечкина. – СПб.: Питер, 2004. – 600 с.
- 10.Хачатрян, Н.К. Математическое моделирование экономических систем / Н.К. Хачатрян. – М.: Экзамен, 2008. – 158 с.
- 11.Шикин, Е.В. Математические методы и модели в управлении / Е.В.Шикин, А.Г.Чхартшвили. – М.: Дело, 2004. – 440 с.
- 12.Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие / С.И.Макаров (ред.). – М.: Кнорус, 2009. – 240 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Печерских Ирина Александровна
Семенов Андрей Германович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Для студентов вузов