МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Г.С. Ветрова, Л.А. Яковлева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Кемерово 2004

УДК: 33 : 51 (075)

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Кемеровского технологического института пищевой промышленности.

Рецензенты:
- канд. техн. наук, доцент кафедры вычислительной техники и информационных технологий ГУ Кузбасского государственного технического университета В.В. Крюкова;
- канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной техники и информационных технологий Кемеровского института Московского государственного университета коммерции В.С. Черкасов.

Ветрова Г.С., Яковлева Л.А. Математические модели в экономике: Учебное пособие. – Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово: 2004.– 80 с.

ISBN 5-89289-233-6

В учебное пособие включены: краткий конспект лекций, темы лабораторных и контрольных работ и задания для их выполнения, вопросы к зачёту. Теоретическая часть включает описание классической постановки задачи линейного программирования, пример построения модели. Описан графический и симплексный методы решения задачи линейного программирования. Рассмотрена теория двойственности, включая постановку сопряжённой задачи. Описано решение задач линейного программирования с помощью стандартного средства Excel Поиска решения. Изложение материала ориентировано на практическую работу студентов. Теоретическая часть снабжена иллюстрациями и примерами.

Ил. – 13. Табл – 29. Библ. назв. – 11.

$$\mathbf{М}\frac{1602110000}{\mathbf{У}50(03)-04}$$

ISBN 5-89289-233-6

ВВЕДЕНИЕ

Математическое программирование возникло из практических потребностей в тридцатых-сороковых годах. Наиболее развитой и законченной областью этой дисциплины является линейное программирование. Первыми работами в этом направлении были работы Леонида Витальевича Канторовича. В этих работах приведены математические методы решения таких задач, как задача повышения эффективности работы транспорта, определения оптимальных производственных режимов и оптимального состава смеси, рационального раскроя промышленных материалов и т.п.

В зависимости от функции, экстремум которой необходимо найти, и ограничений выделяют задачи линейного и нелинейного программирования. Если переменные могут принимать только целые значения, то говорят, что имеем задачу целочисленного программирования. Если есть параметр, от которого зависят некоторые величины, то имеем задачу параметрического программирования. Существуют другие частные классы задач.

В самом общем виде суть таких задач состоит в том, что при известных условиях из множества возможных решений необходимо выбрать одно. Простейший метод простого перебора вариантов для таких задач нереален из-за большого количества допустимых решений. Использовать классические математические методы также не всегда удаётся, т.к. либо возникают проблемы с производными, либо требуется решить десятки тысяч систем линейных уравнений.

Необходимость решения таких задач привела к созданию новых специальных методов.

Модели математического программирования имеют разнообразные экономические интерпретации.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ»

Цель изучения дисциплины

Целью данного курса является изучение современного математического аппарата планирования и получения практических навыков решения конкретных экономических задач. При изучении студент должен овладеть:

- теоретическими и практическими знаниями системного моделирования;
- методологией и методикой построения экономико-математических моделей;
- навыками и умением самостоятельного использования моделей в практической деятельности.

Изучив дисциплину, студент должен уметь:

- формализовать экономическую задачу;
- определять тип полученной модели;
- решать задачи, сформулированные как задачи линейного или нелинейного программирования;
- делать выводы и принимать решения по результатам, полученным в результате анализа модели.
- обладать знанием построения типовых моделей задач;
- сформулировать сущность проблемы в виде экономико-математической модели;

- проанализировать на модели наиболее существенные связи различных показателей;
- получить оптимальное решение из множества возможных и показать, к каким, качественно новым выводам можно прийти, используя модели.

Для освоения курса студенты необходимы знания по таким разделам математики как линейная алгебра, математический анализ, математическая статистика. Необходимы знания по информатике: алгоритмизация и программирование вычислительных процессов, выполнение расчётов в Excel.

Для того чтобы осознанно относиться к примерам, лучше понимать их смысл, давать экономическую трактовку, необходимо знание основных экономических показателей.

Содержание дисциплины

ТЕМА 1. Основы математического моделирования экономических задач. Классификация экономико-математических моделей и методов.

Этапы подготовки и решения задач с помощью экономико-математических методов, краткий обзор развития математических методов количественного анализа экономических явлений. Сущность экономико-математического моделирования.

Общие сведения об основных математических методах и их применение в моделировании: математическое программирование, теория массового обслуживания, теория графов, сетевое планирование и управление, теория игр. Математическое программирование включает: линейное, нелинейное, выпуклое, параметрическое, целочисленное, стохастическое, динамическое.

ТЕМА 2. Линейное программирование. Графический метод решения линейных программ.

Общая задача математического программирования: постановка задачи, экономическая и графическая интерпретация. Основные определения. Множество планов, опорные планы и их свойства, оптимальный план. Решение линейной программы в случае одной или двух переменных.

ТЕМА 3. Решение задач линейного программирования симплексным методом.

Прямой алгоритм симплексного метода. Выбор начального базиса и начального опорного плана. Постановка М-задачи. Критерий оптимальности. Критерий неограниченности линейной формы. Правила пересчёта симплексных таблиц.

ТЕМА 4. Теория двойственности.

Понятие о двойственности в линейных программах. Постановка сопряженной задачи. Пары двойственных условий. Теоремы двойственности. Использование соотношений двойственности для решения задач. Экономическая интерпретация двойственных оценок.

ТЕМА 5. Поиск оптимальных решений средствами Excel.

Решение задач линейного программирования в среде Excel. Использование стандартного средства поиск решения. Анализ оптимального решения.

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

Постановка общей задачи линейного программирования

В 1947 году Данцигом и Вудом была сформулирована первая экономическая задача:

Предприниматель имеет в своём распоряжении m производственных ресурсов, характеризуемых вектором $B = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m)$. С помощью этих ресурсов он может производить n различных товаров в количествах $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ при норме расхода i–го ресурса на j–й продукт a_{ij}. Прибыль от реализации единицы товара определяется вектором $C = (c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$. Основная задача предпринимателя состоит в определении вектора X, дающего максимальную прибыль.

Прибыль, которую необходимо максимизировать, может быть получена как сумма произведений прибыли от реализации одного изделия на количество таких изделий. То есть $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Количество сырья первого вида, которое будет израсходовано, не должно превышать имеющийся запас, то есть $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$. Такие же ограничения следует записать по всем остальным видам сырья.

Исходя из постановки задачи, следует, что неизвестные величины могут принимать только положительные значения, то есть $x_j \geq 0$.

Запишем математическую модель рассматриваемой задачи:

Максимизировать $L(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

при ограничениях:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{cases}$$

Получили задачу линейного программирования.

$$\max L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничениях по ресурсам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots,\ m) \tag{2}$$

и условиях неотрицательности переменных

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

Введением ослабляющих переменных (их значения будут определять количество неиспользованного сырья) задача (1) – (3) может быть приведена к так называемой канонической форме:

Оптимизировать линейную форму

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4}$$

при ограничениях:
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{5}$$

Эту же задачу можно записать в матричном виде:

Оптимизировать линейную форму

$$L(x) = CX \tag{6}$$

при условиях

$$\begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Здесь C – n мерный вектор-строка;
X – n мерный вектор-столбец;
B – m мерный вектор-столбец;
A – матрица, размерности mxn.

Основные определения

Вектор X, удовлетворяющий ограничением задачи, называется *планом.*

План, обращающий в экстремум линейную форму, называется *оптимальным.*

Вектор C называется *вектором цен* или *целевым вектором.*

Вектор A_j из ограничения $\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B$ называется *вектором условий* или *вектором затрат*.

Вектор B называется *вектором запасов.*

План X, обращающий в равенство не менее чем n ограничений задачи, называется *опорным планом*.

Всякий опорный план содержит не более чем m положительных компонент.

Опорный план, содержащий ровно m положительный компонент называется *невырожденным*.

Множество, которому вместе с любыми двумя его точками принадлежит отрезок их соединяющий, называется *выпуклым*.

Множество называется *замкнутым*, если ему принадлежит и граница.

Множество называется *ограниченным*, если его можно поместить в сферу конечного радиуса.

Выпуклым многогранником называется замкнутое ограниченное выпуклое множество с конечным числом крайних точек, называемых *вершинами.*

Приведём без доказательства основные теоремы теории линейного программирования:

ТЕОРЕМА № 1

Множество всех планов задачи линейного программирования является *выпуклым*.

ТЕОРЕМА № 2

Область определения задачи линейного программирования имеет конечное число крайних точек.

ТЕОРЕМА № 3

Линейная форма достигает своего экстремума в вершинах множества планов. Если экстремум достигается в нескольких вершинах, то он достигается и на всем множестве, порождённом этими вершинами.

Система линейно-независимых векторов условий, соответствующих положительным компонентам опорного плана, называется *базисом* этого плана.

При решении задачи линейного программирования возможны следующие случаи:

1. задача имеет единственный оптимальный план;
2. задача имеет множество оптимальных планов;
3. линейная форма задачи не ограничена;
4. задача не имеет ни одного плана.

Графический метод решения задач линейного программирования

Графически могут решаться задачи, содержащие не более двух переменных. Все остальные задачи могут быть решены графически, если есть возможность привести их к задаче, содержащей две неизвестные величины. Решение задачи графически выполняется в два этапа: построение множества планов (области допустимых решений) и нахождение оптимального плана. При построении области допустимых решений могут встретиться три случая:

- множество планов пусто;
- множество планов представляет собой выпуклый ограниченный многоугольник;
- множество планов есть выпуклый неограниченный многоугольник.

В первом случае задача не имеет решения, так как система ограничений несовместна. Во втором случае задача всегда имеет оптимальное решение. Может быть, единственное решение, совпадающее с одной из вершин области или бесчисленное множество решений, то есть все точки отрезка, соединяющего две вершины.

В третьем случае, в зависимости от градиента, задача может иметь или не иметь решение. Последнее связано с неограниченным возрастанием ($L_{max} \to \infty$) или убыванием ($L_{min} \to -\infty$) функции L в области допустимых решений. Говорят: линейная форма не ограничена сверху или снизу на множестве планов.

Пример 1. Решить графически задачу максимизации:

$L(x)=2x_1+3x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 56 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Областью решения линейного неравенства с двумя переменными является полуплоскость, лежащая по одну сторону от граничной прямой; уравнение этой прямой можно получить, если знак неравенства заменить на знак равенства.

Первое ограничение рассмотрим как уравнение прямой: $-x_1 + 2x_2 = 6$. Как известно, через две точки можно провести единственную прямую. Находим любые две точки, принадлежащие данной прямой. Пусть $x_1 = 0$, тогда $x_2 = 3$, и пусть $x_2 = 0$, тогда $x_1 = 6$. Через полученные точки проводим прямую. Для того чтобы определить расположение соответствующей полуплоскости относительно граничной прямой, подставляем координаты какой-либо точки (проще ваять начало координат) в левую часть неравенства. Так, например, при подстановке значений $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ получаем $0 \le 6$. Следовательно, область решений этого неравенства включает начало координат. Аналогично строим второе ограничение. Построив третье ограничение и подставив в неравенство $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ видим, что неравенство не выполняется ($0 \ge 4$?). Следовательно, соответствующая полуплоскость располагается по отношению к граничной прямой по другую сторону, нежели начало координат. Четвертое и пятое ограничения соответствуют полуплоскостям, лежащим справа от оси ординат и над осью абсцисс (то есть, первый квадрант). Таким образом, получили область, ограниченную граничными линиями, а именно: выпуклый ограниченный пятиугольник *ABCDE* (рис. 1).

Так как линейная форма достигает своего экстремума в вершинах множества планов, то достаточно найти координаты всех вершин, подставить в функцию и вычислить. Из найденных значений выбрать максимальное.

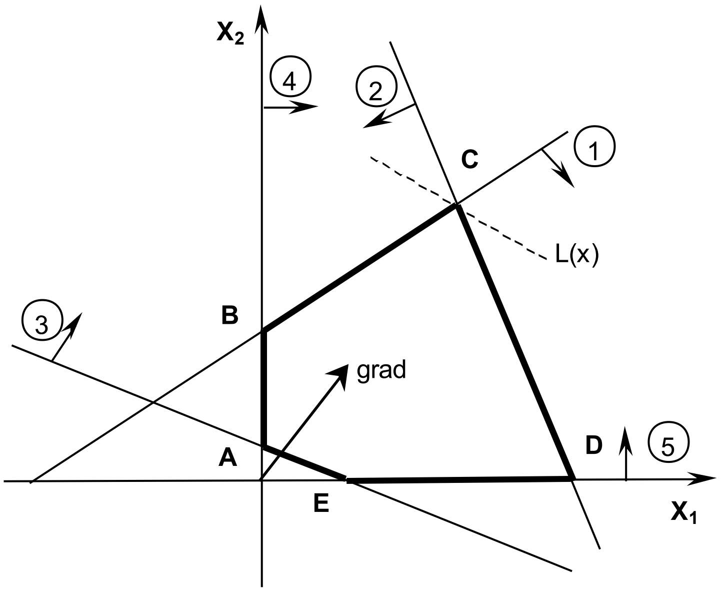


Рис. 1

Можно поступить иначе. Известно, что градиент показывает направление возрастания функции. Так как функция линейна, то достаточно провести прямую, перпендикулярную градиенту, и перемещать её над множеством планов в направлении градиента. Точка первого касания прямой с множеством планов будет точкой минимума, точка последнего касания - точкой максимума. Напомним, что компоненты вектора градиента соответствуют частным производным функции. Но так как функция линейна, то компоненты совпадают с коэффициентами C_1 и C_2. Для нашего примера *grad L = (2, 3)*. Строим соответствующую точку и из начала координат проводим вектор в эту точку. Затем прямую, перпендикулярную построенному градиенту, перемещаем над множеством планов. Точка последнего касания – т. *C*. Её координаты и будут оптимальным планом.

Точка *C* получается пересечением первой и второй прямых. Для нахождения координат т. *C* достаточно решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 6 \\ 9x_1 + 4x_2 = 56 \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, получаем:

$11x_1 = 44$ или $x_1 = 4$

Подставляя найденное значение в первое уравнение, получаем: $2x_2 = 10$ или $x_2 = 5$. Соответствующее значение функции $2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$

Ответ: $X_{опт} = (4; 5); L_{max} = 23$

<u>Пример 2.</u>

$max\ L(x) = -x_1 + 2x_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ \quad x_2 \leq 2 \\ x_1 \quad \leq 1 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

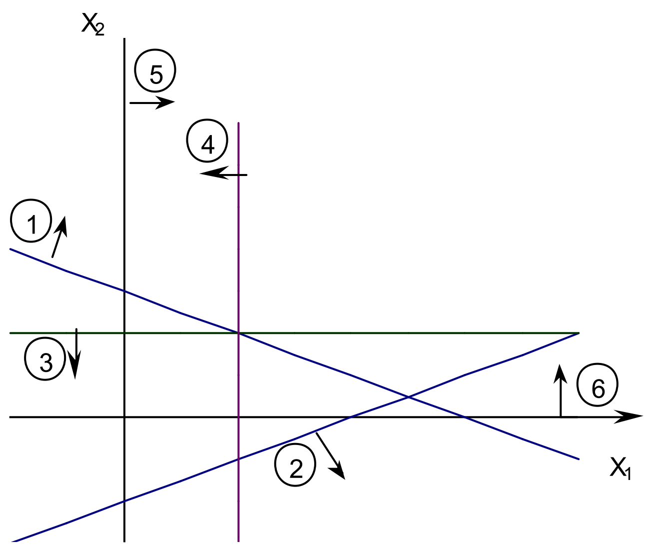


Рис. 2

<u>*Решение*</u>. Строим полуплоскости, соответствующие ограничениям задачи. Общей области нет, то есть система ограничений противоречива или несовместна. Задача не имеет решения.

Пример 3. Найти максимальное и минимальное значения функции $L(x) = 3x_1 - x_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq -6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

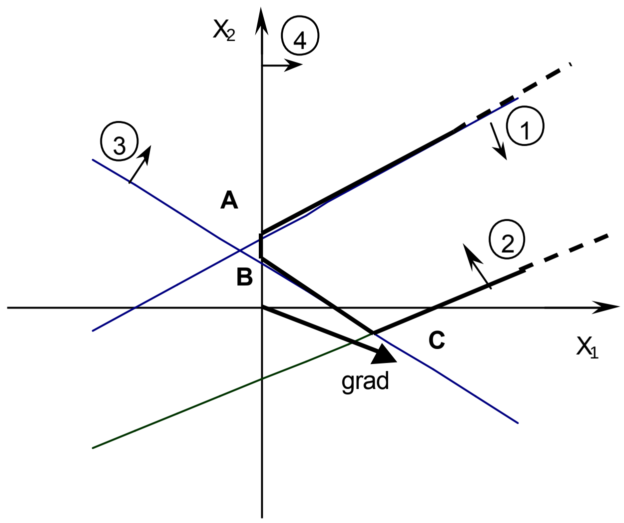


Рис. 3

Решение. Строим множество планов. Получили выпуклый неограниченный многоугольник. Точка первого касания множества планов прямой, перпендикулярной градиенту, есть т. *A*. Её координаты будут оптимальным планом для задачи минимизации. То есть X = $(0, 2)$. $L(x) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$.

Точку последнего касания прямой с множеством планов определить нельзя, так как в этом случае $x_1, x_2 \to \infty$ и $L(x) \to \infty$.

Говорят, что линейная форма не ограничена сверху на множестве планов.

Ответ: 1. $L_{max} \to \infty$

2. $X_{onm} = (0, 2)$; $L_{min} = -2$

<u>Пример 4</u>. Найти максимальное и минимальное значения функции $L(x) = x_1 - x_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

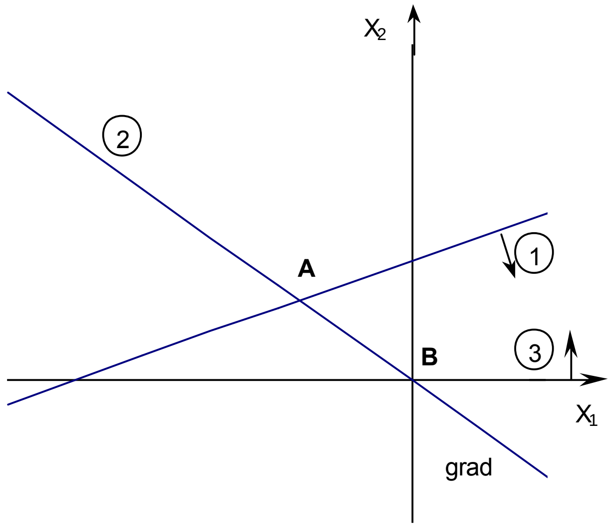


Рис. 4

<u>Решение</u>. Строим область допустимых решений задачи. Первое и третье ограничения описывают полуплоскости, а второе уравнение - прямую. То есть второму ограничению удовлетворяют точки соответствующей прямой. Для всех трех ограничений получаем общую область в виде отрезка *AB*.

Градиент рассматриваемой функции совпадает с прямой, соответствующей ограничению 2.

Координаты т. *A* - оптимальный план для задачи минимизации, координаты т. *B* - оптимальный план для задачи максимизации.

Ответ: 1. $X_{опт} = (0; 0); L_{max} = 0$

2. $X_{опт} = (-5/3; 5/3); L_{min} = -10/3$.

<u>Пример 5</u>. Найти минимальное и максимальное значение функции $L(x) = x_1 + x_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

Решение. Строим полуплоскости, соответствующие ограничениям. Получили выпуклый неограниченный многоугольник, который является множеством планов данной задачи. Градиент перпендикулярен лучу BC и, следовательно, оптимальными планами для задачи минимизации, будут все точки этого луча.

Если рассматривать задачу максимизации, то линейная форма не ограничена сверху.

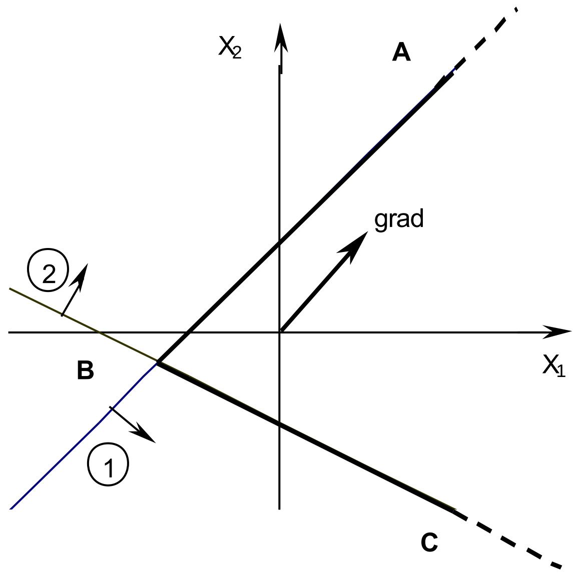


Рис. 5

Ответ: 1. $X_{опт}$ все точки луча BC; $L_{min} = -2$

2. $L_{max} \to \infty$

Симплексный метод

Симплексный метод используется для решения оптимизационных задач, в которых все связи между оптимизируемыми переменными являются линейными функциями относительно этих переменных. Как уже отмечалось выше, к таким задачам относятся многие задачи экономики: максимизация прибыли от выпуска продукции при наличии ограничений на используемые ресурсы, задача о наиболее дешёвом кормовом рационе при обеспечении полноценного питания, задача о назначении исполнителей для выполнения работ, задача о перевозке груза от поставщика к потребителю и т.п.

Симплекс-метод является универсальным алгоритмом для решения задач линейного программирования. Впервые симплекс-метод был предложен американским математиком Д. Данцигом в 1947 году, однако идеи метода были разработаны советским учёным Л.В. Кантаровичем в 1939 г.

В основе симплексного метода лежит идея последовательного улучшения решения (направленного перебора опорных планов).

Ранее были рассмотрены основные теоремы линейного программирования, из которых следует, что если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно соответствует хотя бы одной угловой точке многогранника решений и является одним из допустимых базисных решений системы ограничений. Один из вариантов поиска оптимального решения – перебрать конечное число допустимых базисных решений системы ограничений и выбрать среди них то, на котором функция цели принимает экстремальное значение.

Геометрически это соответствует перебору всех угловых точек многогранника решений. Такой перебор в итоге приведёт к оптимальному решению (если оно существует), однако практическое осуществление перебора связано со значительными трудностями, так как для реальных задач число допустимых базисных решений хотя и конечно, но может быть чрезвычайно велико. Число перебираемых допустимых базисных решений можно сократить, если производить перебор не беспорядочно, а с учётом изменения целевой функции, то есть чтобы каждое следующее решение было "лучше" (или "не хуже"), чем предыдущее. Такой перебор позволяет сократить число шагов при отыскании оптимума. Это и является идеей симплексного метода, а именно позволяет, отправляясь от известного опорного плана задачи за конечное число шагов получить её решение (оптимальный план). Симплексный метод, позволяющий решить любую задачу линейного программирования имеет ряд модификаций и используется как для решения вручную так и для компьютерных расчётов.

Для использования симплексного метода задача линейного программирования должна быть приведена к каноническому виду, то есть система ограничений должна быть представлена в виде уравнений и все переменные должны нести условие неотрицательности.

Рассмотрим прямой алгоритм симплексного метода.

1. Выбор начального опорного плана.

1.1. Проверяем, все ли свободные члены положительны. Если какая-то величина b_i отрицательная ($b_i < 0$), то умножаем соответствующее ограничение на -1.

1.2. Проверяем, все ли переменные несут условие неотрицательности. Если какая-либо переменная несёт условие отрицательности, то рассматриваем её с противоположным знаком ($x_j = -x_j$). Если какая-либо переменная изменяет своё значение от $-\infty$ до $+\infty$, то заменяем её на разность двух положительных величин ($x_j = x'_j - x''_j$).

1.3. Переходим от системы неравенств к равенствам с помощью ослабляющих переменных.

1.4. Находим единичные вектора условий, их количество должно быть равно m. Если единичных векторов условий меньше m, то переходим к искусственному базису, иначе говоря, составляем M-задачу. Вводим дополнительные (искусственные) переменные, чтобы получить недостающие единичные вектора условий. Дополнительные переменные всегда входят в ограничения с коэффициентом +1. В функцию цели они входят с коэффициентом +M для задачи минимизации, с коэффициентом -M для задачи максимизации. M – это большое число, при ручных расчётах считаем M = ∞.

Теорема № 4

Если в оптимальном плане M-задачи искусственные переменные равны нулю, то все остальные составляют оптимальный план исходной задачи.

Теорема № 5

Если в оптимальном плане M-задачи хотя бы одна из искусственных переменных не равна 0, то исходная задача не имеет решения.

1.5. Записываем начальный базис $Б_0$, в который включаем единичные вектора условий, и соответствующий начальный опорный план X_0.

2. Проверка плана на оптимальность.

Критерием оптимальности является величина Δ_j, так как с переходом от одного опорного плана к другому (новому), значение линейной формы (целевой функции) определяется как

$$L(X_{нов}) = L(X_{пред.\ пл.}) = \Theta\Delta_j$$

где $X_{нов}$ – новый опорный план;

$L(X_{нов})$ – значение линейной формы от нового опорного плана;

$X_{пред.\ пл.}$ – предыдущий план;

$L(X_{пред.\ пл.})$ – значение линейной формы от предыдущего опорного плана;

Θ – положительная величина (компонента нового опорного плана).

а) Если задача на минимум и есть хотя бы одно положительное значение Δ_j ($\Delta_j > 0$), то новое значение линейной формы $L(X_{нов})$ будет меньше старого $L(X_{пред.\ пл.})$. При задаче на минимум у оптимального плана все $\Delta_j \le 0$ (отрицательные или равны нулю).

б) Если решается задача максимизации целевой функции (линейной формы) у оптимального плана все $\Delta_j \ge 0$, и, если есть хотя бы одно $\Delta_j < 0$, то план не оптимален.

Таким образом, для задачи минимизации оптимальным будет тот план, для которого все $\Delta_j \le 0$, а для задачи максимизации оптимальным будет тот план, для которого все $\Delta_j \ge 0$.

Величина Δ_j определяется по формуле $\Delta_j = z_j - c_j$,
где c_j – коэффициенты функции цели (линейной формы);

$$z_j = \sum_{i \in Б} c_i z_{ij}$$

c_i – коэффициенты линейной формы, соответствующие векторам базиса;

z_{ij} – коэффициенты разложения векторов-условий по векторам базиса.

Если план не оптимален, то переходим к формированию нового опорного плана.

3. Получение нового опорного плана.

3.1. Выбираем вектор, подлежащий вводу в базис (обычно в базис вводят вектор, у которого значение Δ_j равно $max|\Delta_j|$).

Для задачи минимизации план не оптимален, если есть хотя бы одно положительное значение Δ_j. Тогда среди них выбираем максимальное, например Δ_j*, и следовательно, вектор A_j* должен быть введён в базис.

Для задачи максимизации в базис вводим тот вектор, у которого $max\,/\Delta_j/$ среди отрицательных значений.

3.2. Выбор вектора, подлежащего выводу из базиса. Из базиса выводят тот вектор, которому соответствует минимальное значение Θ среди отношений x_i на z_{ij*}

$$\Theta = \min_{z_{ij*}>0} \frac{x_i}{z_{ij*}}$$

где x_i – компоненты опорного плана (все они ≥ 0);

Θ – значение элемента нового опорного плана (причём оно ≥ 0).

3.3. Получение значений нового опорного плана. Определяем вектора нового базиса. Определяем главную строку и главный столбец, а на их пересечении – главный элемент. Главный столбец – тот, который соответствует вектору, вводимому в базис. Главная строка – та строка, которая соответствует вектору, выводимому из базиса. Затем пересчитываем элементы строк так, чтобы вектор, введённый в базис, стал единичным, то есть, исключаем базисную переменную из остальных строк (уравнений). После выполнения этих преобразований переходим к последней части – к проверке плана на оптимальность.

При решении задач линейного программирования вручную удобно при расчётах использовать симплексные таблицы. Рассмотрим их применение на примерах.

Пример 1. Для изготовления трёх видов продукции P_1, P_2 и P_3 используют три вида сырья (ресурса) S_1, S_2, и S_3. Запасы сырья, а также количество его единиц, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса (сырья)	Запас сырья	Норма расхода сырья, на изготовление единицы продукции		
		P_1	P_2	P_3
S_1	6	1	2	0
S_2	9	0	1	1
S_3	3	2	2	0

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1, P_2 и P_3 составляет 2, 1 и 3 тыс. руб. соответственно.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от её реализации будет максимальной.

Решение:

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим через x_1, x_2 и x_3 – количество планируемых единиц продукции вида P_1, P_2 и P_3 соответственно. Для их изготовления потребуется $1{\cdot}x_1 + 2{\cdot}x_2$ единиц ресурса S_1, $1{\cdot}x_2 + 1{\cdot}x_3$ единиц ресурса S_2, $2{\cdot}x_1 + 2{\cdot}x_2$ – ресурса S_3. Использование сырья S_1, S_2, S_3 для производства продукции не должно превышать запасов, 6, 9 и 3 единиц соответственно. Связь между потреблением ресурсов и их запасами выразим системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 9 \\ x_2 + x_3 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 3 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные x_1, x_2 и x_3 могут быть только положительными или равными нулю, то есть должны нести условие неотрицательности: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

Суммарная прибыль L составит $2{\cdot}x_1$ тыс. руб. от реализации продукции P_1, $1{\cdot}x_2$ тыс. руб. от реализации продукции P_2 и $3{\cdot}x_3$ от P_3, и должна быть максимальной.

В итоге получаем:

$max\, L(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Получили математическая модель, которая называется задачей линейного программирования.

Будем искать решение (ответ) с помощью симплексных таблиц. Выполняем действия алгоритма.

1. Выбираем начальный опорный план.
   1.1. Все свободные члены имеют положительные значения, поэтому никаких преобразований не делаем.
   1.2. Так как все переменные несут условие неотрицательности, замену не делаем.
   1.3. Переходим от неравенств к равенствам с помощью ослабляющих переменных x_4, x_5, x_6

$$\max L(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad = 9 \\ \quad + x_2 + x_3 \quad + x_5 \quad = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + x_6 = 3 \\ x_j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., 6 \end{cases}$$

1.4. Находим единичные вектора условий, которые войдут в базис.

Из записанной выше системы ограничений видно, что есть 4 единичных вектора. В базисе их должно быть 3 (m = 3). Вектора A_3, A_4, A_5, A_6 – единичные.

$$A_3, A_4, A_5, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть начальный базис $Б_0 = \{A_3, A_4, A_6\}$. Соответствующий начальный опорный план $X_0 = (0, 0, 6, 9, 0, 3)$.

Заполняем первую симплексную таблицу.

C_i \ C_j	$Б_0$	X_0	2	1	3	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	A_4	9	1	2	0	1	0	0
3	A_3	6	0	1	1	0	1	0
0	A_6	3	2	2	0	0	0	1
Z_j		18	0	3	3	0	3	0
Δ_j			-2	2	0	0	3	0

Порядок заполнения:

1. В первой строке записываем коэффициенты линейной формы.
2. Переносим коэффициенты векторов условий (элементы a_{ij}) в среднюю часть таблицы (заполняем вектора A_j). В последующих таблицах здесь получаются значения величин z_{ij}.

3. Во втором столбце записываем вектора базиса, в первом столбце – соответствующие им коэффициенты линейной формы.
4. Заполняем третий столбец симплексной таблицы X_0, в который запишем компоненты опорного плана. Для первой симплексной таблицы они совпадают со свободными членами b_i.
5. Находим значение $L(X_0)=\sum_{i\in Б} c_i x_i$ Получили 18.
6. Заполним предпоследнюю строку таблицы, найдём значения

$$z_j = \sum_{i\in Б} c_i z_{ij}$$

   Для вектора A_1 $z_1 = 0\cdot 1 + 3\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0.$
7. Заполняем последнюю строку симплексной таблицы. Значения Δ_j определяются как разность элементов значений предпоследней и первой строки, то есть $\Delta_j = z_j - c_j$.
8. Делаем вывод об оптимальности полученного решения. План X_0 не оптимален, так как есть значения $\Delta_j < 0$ (задача на максимум).
9. Определяем вектор, который будем вводить в базис. Так как только $\Delta_1 < 0$, то вводим первый и пометим его стрелочкой или выделим цветом.
10. Определяем вектор, который будем выводить из базиса, для этого находим значение величины Θ:

$$\Theta = \min\left(\frac{9}{1}; \frac{3}{2};\right) = 1{,}5$$

Так как значение Θ получили по третьей строке, то выводить из базиса будем A_6, помечаем его. Тогда главной строкой будет третья, главным столбцом первый, а главный элемент – на их пересечении +2.

11. Находим новый опорный план X_1, для этого заполняем вторую симплексную таблицу. Первые 2 строки таблицы (шапка таблицы) запишем без изменений. Во втором столбце – новый базис. Соответственно другие значения в первом столбце.

C_i \ C_j	$Б_1$	X_1	2	1	3	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	A_4	4,5	0	1	0	1	0	-0,5
3	A_3	9	0	1	1	0	1	0
2	A_1	1,5	1	1	0	0	0	0,5
Z_j		30	2	5	3	0	3	1
Δ_j			0	4	0	0	3	1

Находим новые значения третьей строки (была главной). Делим старые значения на главный элемент. Например, 3/2 = 1,5; 2/2 = 1; и т.д.; 1/2 = 0,5. Заполняем первую строку: от старых значений вычитаем соответствующие значения полученной третьей строки, причём третью строку предварительно следует умножить на соответствующий элемент главного столбца. Это элемент на пересечении первой строки и главного столбца +1. Элементы второй строки переписываем без изменения, так как в главном столбце соответствующий элемент равен нулю.

12. Находим величины z_j и Δ_j.

13. Делаем вывод об оптимальности полученного решения. План X_1 оптимален, так все $\Delta_j \geq 0$. Задача решена.

Ответ: $L_{max} = 30$, $X_{опт} = (1,5;\ 0;\ 9)$

То есть следует выпускать 1,5 единиц продукции первого вида и 9 единиц третьего, продукцию второго вида не выпускать. При этом будет получена максимальная прибыль 30 тыс. руб. Получили $x_4 = 4,5$ (значение ослабляющей переменной). Это говорит о том, что первый вид сырья при оптимальном плане будет использован не полностью, остаток = 4,5.

<u>Пример 2.</u> Дана математическая модель:

$$\max L(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + 0,5x_4 = 1 \\ \quad + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Задача записана в каноническом виде. Есть два (m = 2) единичных вектора. Начальный базис $Б_0 = \{A_1,\ A_2\}$. Соответствующий начальный опорный план $X_0 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$. Проверяем план на оптимальность, для этого заполняем симплексные таблицы и ведём пересчёт по рассмотренному выше алгоритму. Если X_0 не оптимален, то получаем следующий опорный план, вновь проверка на оптимальность и т.д. до получения оптимального плана, или возможен вывод о том, что функция цели не ограничена.

№ итерации	C_i \ C_j	Б	X	1	2	2	1
				A_1	A_2	A_3	A_4
0	1	A_1	1	1	0	-1	0,5
	2	A_2	1	0	1	1	-1
	Z_j		3	1	2	1	-1,5
	Δ_j			0	0	-1	-2,5
1	1	A_4	2	2	0	-2	1
	2	A_2	3	2	1	-1	0
	Z_j		8	6	2	-4	1
	Δ_j			5	0	-6	0

Полученный план X_1 не оптимален, так как $\Delta_3 < 0$. В базис следует ввести вектор A_3. Но все его элементы отрицательны ($z_{ij} < 0$). Поэтому прекращаем расчёты и делаем вывод, что линейная форма не ограничена сверху.

Ответ: $L_{max} \to \infty$

Пример 3. Дана математическая модель:

$$\min L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Задача записана в каноническом виде и нет единичных векторов условий. Поэтому переходим к искусственному базису или ставим М-задачу. Вводим искусственные переменные x_5 и x_6. Получаем:

$$\min L(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + Mx_4 + Mx_5$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

Начальный базис $Б_0 = \{A_4, A_5\}$. Соответствующий начальный опорный план $X_0 = (0, 0, 0, 2, 1)$. Проверяем план на оптимальность, для этого заполняем симплексные таблицы и ведём пересчёт по рассмотренному выше правилу.

№ итерации	C_j / C_i	Б	X	1	-2	3	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	**M**	A_4	2	-2	1	3	1	0
	M	A_5	1	2	3	4	0	1
	Z_j		3M	0	4M	7M	M	M
	Δ_j			-1	4M+2	7M-3	0	0
1	M	A_4	1,25	-3,5	-1,25	0	1	-1
	3	A_3	0,25	0,5	0,75	1	0	0,333
	Z_j		$\frac{5M+3}{4}$	$\frac{3-7M}{2}$	$\frac{9-5M}{4}$	3	M	0,99-M
	Δ_j			$\frac{1-7M}{2}$	$\frac{17-5M}{4}$	0	0	0,99-2M

Полученный план X_1 оптимален, так как все $\Delta_j \leq 0$. Но получили оптимальный план для М-задачи. $X^M_{опт} = (0; 0; 0,25; 1,25; 0)$. На основании теоремы 5 (искусственная переменная x_4 в оптимальном плане не равна нулю) делаем вывод, что исходная задача не имеет решения или множество планов пусто.

Ответ: $|X| = \varnothing$

Пример 4. Дана математическая модель:

$$\max L(x) = x_1 + 4x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 7 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le -9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Выбираем начальный базис и начальный опорный план. Для этого умножаем второе ограничение на -1и так как x_1 не несёт условие неотрицательности, то делаем замену: $x_1 = x'_1 - x''_1$.

$$\max L(x) = x'_1 - x''_1 + 4x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x'_1 - 2x''_1 + x_2 + 3x_3 \le 7 \\ 4x'_1 - 4x''_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge 9 \\ x'_1 - x''_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x'_1 \ge 0,\ x''_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Переходим от неравенств к равенствам с помощью ослабляющих переменных x_4 и x_5. Но так как в итоге получаем канонический вид задачи только с одним единичным вектором, то ставим М-задачу. Вводим искусственные переменные x_6 и x_7. Получаем модель:

$$\max L(x) = x'_1 - x''_1 + 4x_2 - 3x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} 2x'_1 - 2x''_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ 4x'_1 - 4x''_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_5 + x_6 = 9 \\ x'_1 - x''_1 + 2x_2 - x_3 + x_7 = 2 \\ x'_1 \ge 0,\ x''_1 \ge 0,\ x_j \ge 0,\ j = 2, 3, \ldots, 7 \end{cases}$$

Начальный базис $Б_0 = \{A_4, A_6, A_7\}$. Соответствующий начальный опорный план $X_0 = (0, 0, 0, 0, 7, 0, 9, 2)$.Решаем задачу, заполняя симплексные таблицы.

№ итерации	С	Б	Х	1	-1	4	-3	0	0	-М	-М
				A'_1	A''_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	0	A_4	7	2	-2	1	3	1	0	0	0
	-М	A_6	9	4	-4	-3	-2	0	-1	1	0
	-М	A_7	2	1	-1	2	-1	0	0	0	1
	Z_j		-11М	-5М	5М	М	3М	0	М	-М	-М
	Δ_j			-5М-1	5М+1	М-4	3М+3	0	М	0	0
1	0	A_4	3	0	0	-3	5	1	0	0	-2
	-М	A_6	1	0	0	-11	2	0	-1	1	-4
	1	A'_1	2	1	-1	2	-1	0	0	0	1
	Z_j		-М+2	1	-1	11М+2	-2М-1	0	М	-М	4М+1
	Δ_j			0	0	11М-2	-2М+2	0	М	0	5М+1
2	0	A_4	0,5	0	0	24,5	0	1	2,5	-2,5	8,0
	-3	A_3	0,5	0	0	-5,5	1	0	-0,5	0,5	-2,0
	1	A'_1	2,5	1	-1	-3,5	0	0	-0,5	0,5	-1,0
	Z_j		1	1	-1	13,0	-3	0	1	-1	5
	Δ_j			0	0	9	0	0	1	М-1	М+5

Полученный план X_2 оптимален, так как все $\Delta_j \geq 0$. Но получили оптимальный план для М-задачи. $X^М_{опт}$ = (2,5; 0; 0; 0,5; 0,5; 0; 0; 0). На основании теоремы 4 делаем вывод, что исходная задача имеет решение (искусственные переменные x_6 и x_7 в оптимальном плане равны нулю). С учётом замены $x_1 = x'_1 - x''_1 = 2,5 - 0 = 2,5$.

Ответ: $L_{max} = 1$, $X_{опт} = (2,5;\ 0;\ 0,5)$

В зависимости от требований заказчика задачи, можно указать значения ослабляющих переменных. В нашем примере $x_4 = 0{,}5$. Показывает количество неиспользованного сырья.

Двойственные задачи

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу, называемую сопряженной. Вместе они образуют пару двойственных задач.

Так, если прямая задача заключается в нахождении вектора $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$\text{I. } min\ L = CX \qquad \text{II. } max\ L = CX$$
$$AX = B \qquad\qquad AX = B$$
$$X \geq 0 \qquad\qquad X \geq 0$$

То, сопряженная задача сводится к нахождению вектора $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$

$$\text{I. } max\ L^* = B^T Y \qquad \text{II. } min\ L^* = B^T Y$$
$$A^T Y \leq C^T \qquad\qquad A^T Y \geq C^T$$

Замечание 1. Двойственные переменные y_i могут нести условие неотрицательности, могут и не иметь его.

Определение. Парой двойственных условий (или соответствующих ограничений) называются ограничения вида

$$\begin{cases} x_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Замечание 2. Если какая-то переменная прямой задачи не несет условие неотрицательности, то соответствующее ей ограничение сопряженной задачи выполняется как строгое равенство.

Из вышесказанного ясно, что для того, чтобы правильно записать сопряженную задачу, достаточно ограничения по ресурсам прямой задачи записать в виде равенств (с помощью так называемых ослабляющих переменных). Размерность матрицы A равна m x n. Это определяет размерность сопряженной задачи, так как в ней A^T, то будет n ограничений и m неизвестных.

Примеры записи сопряженных задач

1. Дана прямая задача:

$$min\ L(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Вводим ослабляющие переменные и получаем:

$$min\ L(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 7 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, ..., 4 \end{cases}$$

Так как в прямой задаче 2 ограничения и 4 неизвестных, то в сопряженной задаче будет 4 ограничения и 2 неизвестных.

$$\max L(y) = 5y_1 + 7y_2$$

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 \le 2 \\ -2y_1 + 5y_2 \le 3 \\ -y_1 \le 0 \\ y_2 \le 0 \end{cases}$$

Пары двойственных условий:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ y_1 - 3y_2 \le 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \ge 0 \\ -2y_1 + 5y_2 \le 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 5 \\ -y_1 \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \le 7 \\ y_2 \le 0 \end{cases}$$

2. Прямая задача:

$$\max L(x) = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

В первое ограничение введём ослабляющую переменную x_3 с коэффициентом -1. Размерность матрицы *A* будет 2 х 3. В сопряженной задаче будет 2 неизвестных и 3 ограничения.

$$\min L(y) = 5y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ 3y_1 - y_2 \ge -2 \\ -y_1 \ge 0 \end{cases}$$

Пары двойственных условий:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ y_1 + 2y_2 \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \geq 0 \\ 3y_1 - y_2 \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ -y_1 \geq 0 \end{cases}$$

3. Прямая задача:

$$max\ L(x) = 3x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ \quad x_1 \leq 0 \end{cases}$$

Вводим ослабляющие переменные x_3 и x_4, размерность матрицы A становится 2 x 4. Получаем сопряженную задачу:

$$min\ L(y) = 3y_1 + 5y_2$$

$$\begin{cases} \quad y_1 - 2y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 = -1 \\ -y_1 \geq 0 \\ \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Так как в прямой задаче $x_1 \leq 0$, то соответствующее ограничение записываем с противоположным знаком. Так как x_2 не несет условие неотрицательности, то второе ограничение выполняется как равенство (ставим знак равно).

Пары двойственных условий:

$$\begin{cases} x_1 \le 0 \\ y_1 - 2y_2 \le 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ -y_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ограничения в форме равенств остаются без пары. Количество пар двойственных условий совпадает с количеством ограничений неравенств.

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Первая теорема двойственности

Если одна из двойственных задач разрешима, то разрешима и вторая задача, при этом экстремальные значения линейных форм совпадают. Если линейная форма одной из задач не ограничена, то другая задача вообще не имеет планов.

Вторая теорема двойственности

Если обе задачи разрешимы, то при оптимальных планах в каждой паре двойственных условий одно свободное (выполняется как неравенство), а второе закрепленное (выполняется как равенство).

РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

При решении двойственных задач имеет место один из двух случаев:

1) обе задачи имеют оптимальные планы;

2) планы имеет только одна задача, причем её линейная форма не ограничена.

Для того чтобы решить пару двойственных задач, достаточно решить одну из них. Обычно решают ту, которую легче решить.

Если одна из двойственных задач может быть решена графически, то решение второй задачи может быть найдено с помощью второй теоремы двойственности.

Замечание. При вырожденных планах вторая теорема двойственности эффекта не даёт.

Если одна из двойственных задач решена симплексным методом, то решением второй задачи будут величины z_j, соответствующие начальному базису и взятые из последней таблицы.

Примеры решения пары двойственных задач

1. $\min L(x) = x_1 + 4x_3 + x_4 + 4x_5$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, ..., 5) \end{cases}$$

Запишем сопряженную задачу:

$\max L(y) = 7y_1 + 7y_2$

$$\begin{cases} y_1 \leq 1 \\ 6y_1 - 3y_2 \leq 0 \\ y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ 2y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_2 \leq 4 \end{cases}$$

Так как в сопряженной задаче только две неизвестных величины, то ее можно решить графически.

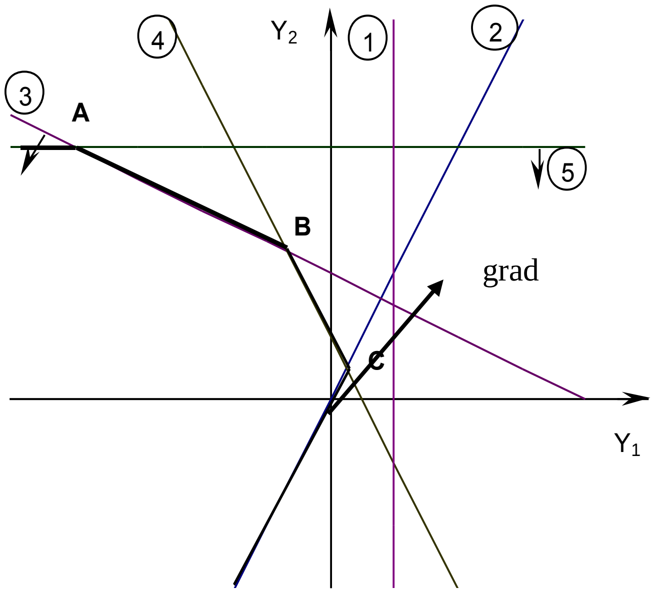


Рис. 6

Множество планов задачи представляет собой выпуклый неограниченный многоугольник. Оптимальный план - т. *B* с координатами *(-2/3, 7/3)*, то есть $Y_{опт} = (-2/3,\ 7/3)$, при этом *max* $L(y) = 35/3$.

Выписываем пары двойственных условий:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ y_1 \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \geq 0 \\ 6y_1 - 3y_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \geq 0 \\ y_1 + 2y_2 \leq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 \geq 0 \\ 2y_1 + y_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 \geq 0 \\ y_2 \leq 4 \end{cases}$$

Определяем знаки ограничений сопряженной задачи при $Y_{опт}$. Затем по II теореме двойственности проставляем знаки в соответствующих ограничениях прямой задачи.

Так $y_1 = -2/3$, что меньше нуля, тогда $x_1 = 0$ и т.д.

Мы видим, что $x_1 = x_2 = x_5 = 0$.

Для нахождения x_3 и x_4 рассматриваем систему:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_3 &= 7/3 \\ x_4 &= 7/3 \end{aligned}$$

По I теореме двойственности $min\ L(x) = max\ L(y) = 35/3$.

Можно проверить: $min\ L(x) = 0 + 4*7/3 + 7/3 + 4*0 = 35/3$.

Ответ: $min\ L(x) = max\ L(y) = 35/3,$

$X_{опт} = (0, 0, 7/3, 7/3, 0),\quad Y_{опт} = (-2/3, 7/3).$

2. $max\ L(x) = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вместе с ослабляющими переменными размерность матрицы A становится 2 x 4, а в сопряженной задаче будет 4 x 2.

$min\ L(y) = 2y_1 + 4y_2$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2 \\ y_1 + y2 \ge 3 \\ -y_1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 \le 0 \\ -y_2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 \le 0 \end{cases}$$

Можно решить графически как прямую, так и сопряженную задачу. Решаем прямую задачу.

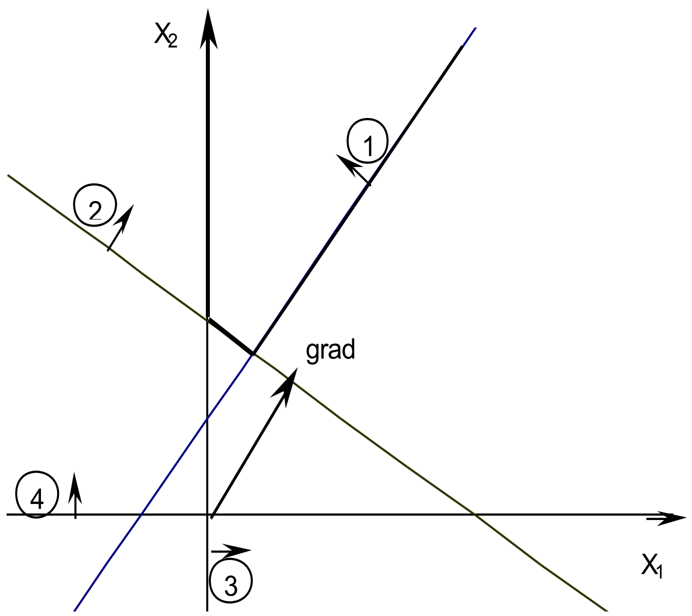


Рис. 7

Множество планов есть выпуклый неограниченный многоугольник. Строим градиент, видим, что линейная форма не ограничена сверху. По первой теореме двойственности сопряженная задача не имеет решения, то есть её система ограничений противоречива, несовместна. Решим ее графически.

Построив все ограничения, мы видим, что множество планов пусто, то есть подтвердился вывод, сделанный выше.

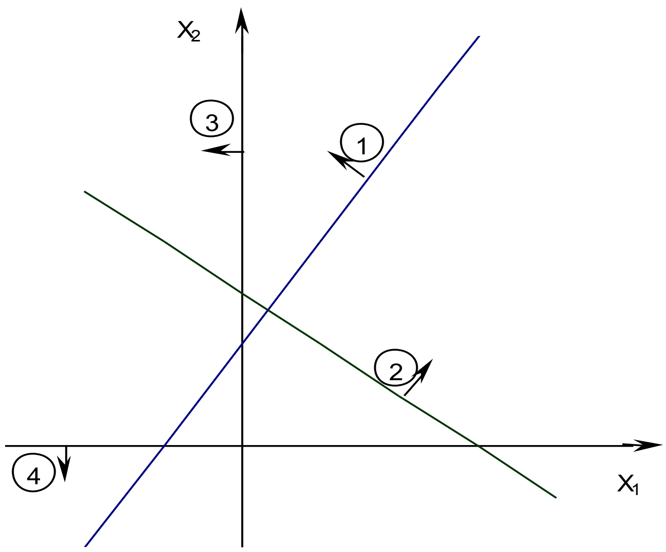


Рис. 8

Ответ: Для прямой задачи линейная форма не ограничена сверху, сопряженная не имеет планов.

3. $\min L(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 5 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -8 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Для того чтобы записать сопряженную задачу, вводим ослабляющие переменные x_4 и x_5. В сопряженной задаче будет 3 неизвестных и 5 ограничений.

$$\max L(y) = 6y_1 + 5y_2 - 8y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \le 3 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \le -1 \\ y_1 - 3y_2 + y3 \le 2 \\ y_1 \le 0 \quad -y_2 \le 0 \end{cases}$$

При решении прямой задачи симплексным методом придется оперировать с 3 ограничениями и 7 неизвестными, при решении сопряженной - с 3 ограничениями и 8 неизвестными. Будем решать прямую задачу. Для нахождения начального опорного плана умножаем третье ограничение на минус 1, затем вводим ослабляющие переменные x_4 и x_5 в первое и второе ограничения, дополнительные x_6 и x_7 во второе и третье. Начальный базис $Б_0 = \{A_4, A_6, A_7\}$ и начальный опорный план $X_0 = (0, 0, 0, 6, 0, 5, 8)$. Проверяем его на оптимальность. Для этого выполняем нулевую итерацию симплексного процесса. Здесь получили Δ_1 и $\Delta_2 > 0 \Rightarrow$ план X_0 не оптимален. В базис вводим вектор A_1, так как $\Delta_1 > \Delta_2$. Выйдет из базиса A_6.

№ итерации	С	Б	Х	3	-1	2	.	.	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	.	A_4	6	1	1	1	1	.	.	.
	M	A_6	5	2	-1	-3	.	-1	1	.
	M	A_7	8	1	2	-1	.	.	.	1
	Z_j		13M	3M	M	-4M	.	-M	M	M
	Δ_j			3M-3	M+1	-4M-2	.	-M	.	.
1	.	A_4	7/2	.	3/2	5/2	1	1/2	-1/2	.
	3	A_1	5/2	1	-1/2	-3/2	.	-1/2	1/2	.
	M	A_7	11/2	.	5/2	1/2	.	1/2	-1/2	1
	Z_j		(11M+15)/2	3	(5M-3)/2	(M-9)/2	.	(M-3)/2	(-M+3)/2	M
	Δ_j			.	(5M-1)/2	(M-13)/2	.	(M-3)/2	(-3M+3)/2	.
2	.	A_4	1/5	.	.	11/5	1	1/5	-1/5	-3/5
	3	A_1	18/5	1	.	-7/5	.	-2/5	2/5	1/5
	1	A_2	11/5	.	1	1/5	.	1/5	-1/5	2/5
	Zj		43/5	3	-1	-22/5	.	-7/5	7/5	1/5
	Δj			.	.	-32/5	.	-7/5	7/5-M	1/5-M

Получен новый опорный план $X_1 = (5/2, 0, 0, 7/2, 0, 0, 11/2)$, который не оптимален, так как Δ_2, Δ_3 и $\Delta_5 > 0$. Вводим в базис вектор A_2, тогда из базиса выйдет A_7. Выполняем очередную итерацию симплексного процесса, тем самым находим новый опорный план X_2, который проверяем на оптимальность. Он оптимален, так как все $\Delta_j \leq 0$. Задача имеет решение, так как в оптимальном плане дополнительные компоненты равны нулю. Записываем оптимальный план сопряженной задачи в соответствии с начальным базисом: начальный базис $Б_0 = \{A_4, A_6, A_7\}$, поэтому $y_1 = z_4 = 0, y_2 = z_6 = 7/5, y_3 = -z_7 = -1/5$.

Следует обратить внимание на то, что для решения прямой задачи третье уравнение умножали на -1, поэтому $y_3 = -z_7$.

Ответ: $min\ L(x) = max\ L(y) = 43/5$,

$X_{опт} = (18/5, 11/5, 0, 1/5, 0)$,

$Y_{опт} = (0, 7/5, -1/5)$.

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Пусть, например, прямая задача имеет следующую формулировку: сколько, и какой продукции x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях c_j $(j = 1, 2, ..., n)$ единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов b_i $(i = 1, 2, ..., m)$ максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении. Причём известна норма расхода сырья *i-го* типа на единицу *j-го* продукта, которая составляет a_{ij}.

Тогда сопряжённая задача может быть сформулирована так: какова должна быть цена y_i $(i = 1, 2, ..., m)$ единицы каждого из ресурсов, чтобы при заданных количествах b_i $(i = 1, 2, ..., m)$ и величинах стоимости единицы продукции c_j $(j = 1, 2, ..., n)$ минимизировать общую стоимость затрат.

Переменные сопряжённой задачи в экономической литературе называют объективно обусловленными или двойственными оценками. Иногда называют неявными или теневыми оценками ресурсов, а также косвенными оценками.

Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений прямой задачи на величину изменения функции цели.

Экономический смысл первой теоремы двойственности следующий. План производства X и набор оценок ресурсов $У$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от реализации продукции, найденная при заданных ценах продукции $c_1, c_2, ..., c_n$, равна затратам на ресурсы по определяемым из решения задачи ценам ресурсов $y_1, y_2, ..., y_m$. Для всех других планов X и $У$ обеих задач прибыль от продукции всегда меньше или равна стоимости затраченных ресурсов: $L(x) \leq L(y)$. То есть ценность всей выпущенной продукции не превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Из этого следует, что величина $L(y) - L(x)$ характеризует производственные потери в зависимости от рассматриваемой производственной программы и выбранных оценок ресурсов.

Экономический смысл первой теоремы двойственности можно интерпретировать так: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам и возместить от продажи минимальные затраты на ресурсы.

Из второй теоремы двойственности следует:

- если $y_i > 0$, то при оптимальном плане соответствующий вид ресурса использован полностью;
- если $y_i = 0$, то при оптимальном плане соответствующий вид ресурса использован не полностью;

- если j-*й* вид продукции вошёл в оптимальный план ($x_j > 0$), то он в оптимальных оценках не убыточен;
- если j-*й* вид продукции убыточен, то он не войдёт в оптимальный план, не будет выпускаться ($x_j = 0$).

Решение задач линейного программирования средствами Excel

Задача распределения ресурсов

Цех предприятия производит два вида продукции (например, сыр и брынзу). Следует рассчитать оптимальные объёмы производства этих продуктов (план выпуска) с точки зрения максимизации прибыли. Прибыль от реализации одной единицы сыра составляет 5 денежных единиц, брынзы – 2.

На предприятии действуют ограничения по сырью, трудовым ресурсам и транспортным расходам:

– для производства одной единицы сыра требуется 3 единицы сырья, брынзы – 6. Цех располагает 18 единицами сырья;
– для производства одной единицы сыра требуется 6 рабочих, брынзы – 4. В цехе 24 рабочих;
– транспортные расходы на перевозку одной единицы сыра составляют 2 денежных единицы, брынзы – 1. Эти затраты не могут быть менее 2 единиц (цена аренды одного автомобиля минимальной грузоподъёмности в течение дня). Полагая, что вся дневная продукция цеха может быть вывезена на одном грузовике.

Кроме того, очевидно, что ни одна из переменных (число единиц продукции) не может быть отрицательной.

Решение:

Обозначим через x_1 и x_2 – план выпуска сыра и брынзы соответственно.

Для удобства записи соотношений, из которых можно вычислить оптимальные объёмы производства сыра и брынзы, представим условие задачи компактно – в виде таблицы:

Вид ресурсов	Наименование продукта		Запас ресурсов
	сыр	брынза	
Сырьё	3	6	18
Трудовые ресурсы	6	4	24
Транспортные расходы	2	1	2
Прибыль	5	2	

Строим математическую модель:

$L(x) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ целевая функция

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 18 & \text{потребность в сырье} \\ 6x_1 + 4x_2 \le 24 & \text{трудовые ресурсы} \\ 2x_1 + 1x_2 \ge 2 & \text{транспортные расходы} \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 & \text{условия неотрицательности} \end{cases}$$

Итак, получили математическую модель, которая называется задачей линейного программирования.

Для решения рассмотренной задачи в среде Excel заполним ячейки исходными данными (в виде таблицы) и формулами математической модели.

Excel позволяет получить оптимальное решение без ограничения размерности системы неравенств и целевой функции.

Таблица в режиме чисел

	A	B	C	D	E	F	G
1			Сыр	Брынза	Вычисленные значения	Соотношения	Заданные ограничения
2	Объём выпуска, X						
3	Прибыль от 1 ед. продукции С и L(x)		5,0	2,0	0		
4	Вид ресурса	Сырьё	3	6	0	<=	18
5		Труд	6	4	0	<=	24
6		Транспорт	2	1	0	>=	2
7	Положительность переменных		1	0	0	>=	0
8			0	1	0	>=	0

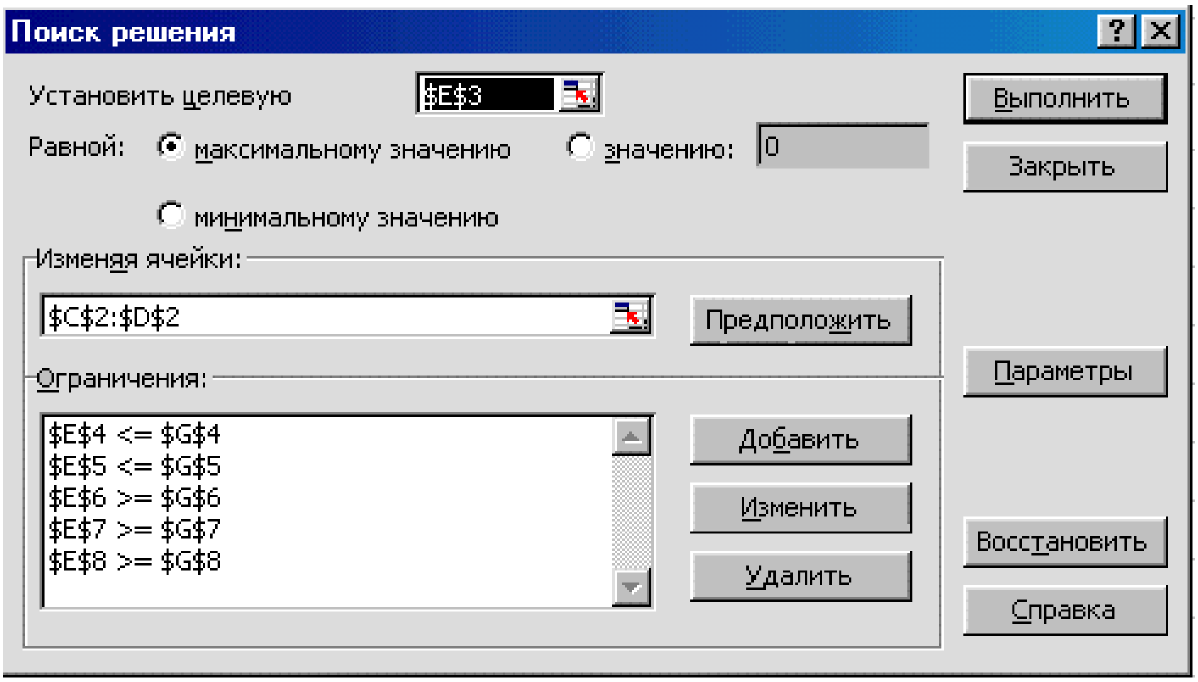
Таблица в режиме формул

	A	B	C	D	E	F	G
1			Сыр	Брынза	Вычисленные значения	Соотношения	Заданные ограничения
2	Объём выпуска, X						
3	Прибыль от 1 ед. продукции С и L(x)		5	2	=C3*$C$2+D3*$D$2		
4	Вид ресурса	Сырьё	3	6	=C3*$C$2+D4*$D$2	<=	18
5		Труд	6	4	=C5*$C$2+D5*$D$2	<=	24
6		Транспорт	2	1	=C6*$C$2+D6*$D$2	>=	2
7	Положительность переменных		1	0	=C7*$C$2+D7*$D$2	>=	0
8			0	1	=C8*$C$2+D8*$D$2	>=	0

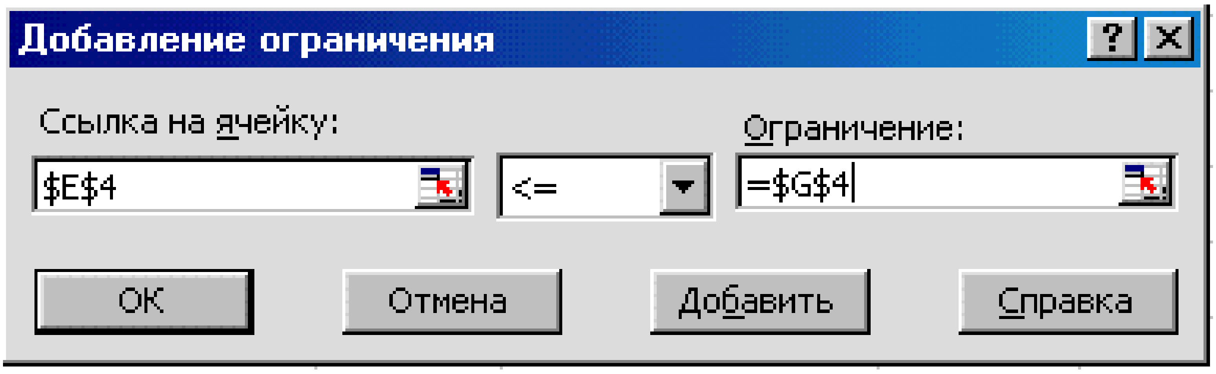
Здесь: C2:D2 – результат (оптимальное количество сыра и брынзы);
C3:D3 – коэффициенты целевой функции;
E3 – значение целевой функции;
C4:D6 – коэффициенты ограничений;
G4:G6 – правая часть ограничений;
E4:E6 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды меню **Сервис / Поиск решения**. Если в меню **Сервис** отсутствует команда **Поиск решения**, то для её установки необходимо выполнить команду **Сервис / Настройки / Поиск решения.**

Итак, делаем активной ячейку E3. Выполняем команду **Сервис / Поиск решения.** На экране появляется диалоговое окно **Поиск решения**.



В поле **Установить целевую** будет показана ссылка на активную ячейку, то есть на E3. Причём эта ссылка абсолютная (мы видим $E$3). В секции **Равной**: устанавливаем переключатель **максимальному значению**. Можно задать не только максимальное/минимальное значения, но и любую произвольную величину, введя её в специальное поле **значению** в секции **Равной**:. Ограничения устанавливаются с помощью кнопки **Добавить**, которая вызывает диалоговое окно их ввода **Добавление ограничения**.



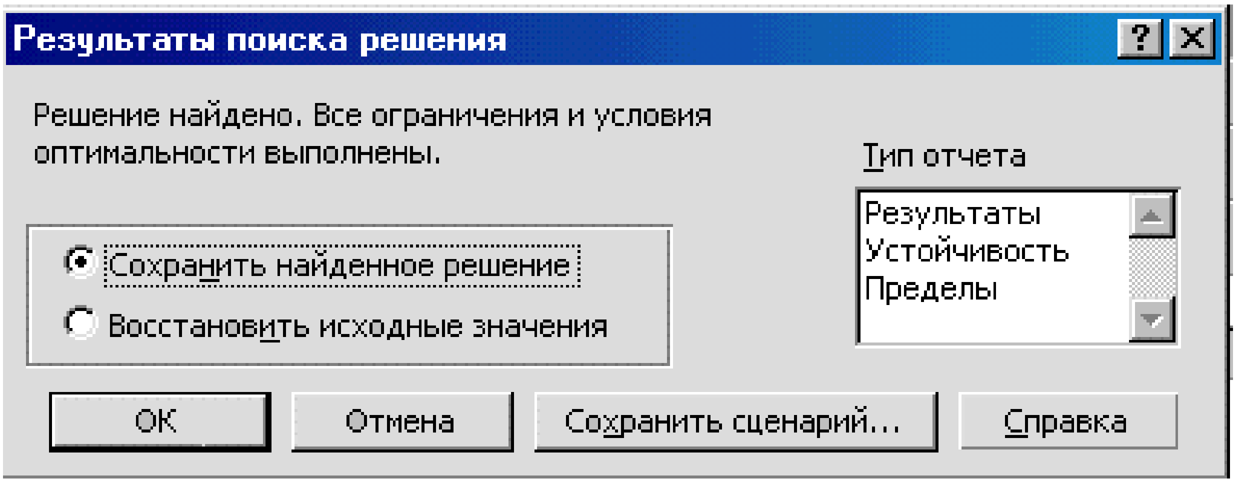
В поле ввода **Ссылка на ячейку**: указывается адрес ячейки, содержащей формулу левой части ограничения. Затем выбирается из списка знак соотношения. В поле **Ограничение**: указывается адрес ячейки, содержащей правую часть ограничения. Щёлкаем на кнопку **Добавить** и повторяем для следующего ограничения.

После ввода всех ограничений следует щёлкнуть кнопку **ОК**.

После этого произойдёт переключение в окно **Поиск решения**, в котором необходимо щёлкнуть кнопку **Выполнить** для решения поставленной задачи.

Excel предъявит окно **Результаты поиска решения** с сообщением о том, что решение найдено, или о том, что не может найти подходящего решения.

Если вычисления оказались успешными, Excel предъявит следующее окно итогов. Их можно сохранить или отказаться (**Восстановить исходные значения**). Кроме того, можно получить один из трёх видов отчётов (**Результаты, Устойчивость, Пределы**), позволяющие лучше осознать полученные результаты, в том числе, оценить их достоверность.



Так как решение найдено, то нам остаётся согласиться с предложенным действием **Сохранить найденное решение**, то есть щёлкнуть на кнопку ОК или нажать на клавиатуре Enter.

Результаты решения представлены в таблице:

	A	B	C	D	E	F	G
1			Сыр	Брынза	Вычисленные значения	Соотношения	Заданные ограничения
2	Объём выпуска, X		4,0	0			
3	Прибыль от 1ед. продукции C и L(x)		5,0	2,0	20,0		
4	Вид ресурса	Сырьё	3	6	12,0	<=	18
5		Труд	6	4	24,0	<=	24
6		Транспорт	2	1	8,0	>=	2
7	Положительность переменных		1	0	4,0	>=	0
8			0	1	0,0	>=	0

Выводы: Оптимальный план выпуска сыра при заданных ограничениях составит 4 единицы, брынзу выпускать не выгодно ($x_1 = 4$; $x_2 = 0$). При этом максимальная прибыль от реализации этих продуктов составит 20,0 единиц. Трудовые ресурсы для производства использованы полностью. Остаток сырья составит 6 единиц. Для вывоза продукции потребуется 8 денежных единиц, что удовлетворяет условию аренды автомобиля.

Представить исходные данные и провести диалог в окне **Поиск решения** можно несколько иначе. То есть заполнить исходные данные так, чтобы воспользоваться дополнительными возможностями стандартного средства Excel Поиск решения.

Таблица в режиме чисел

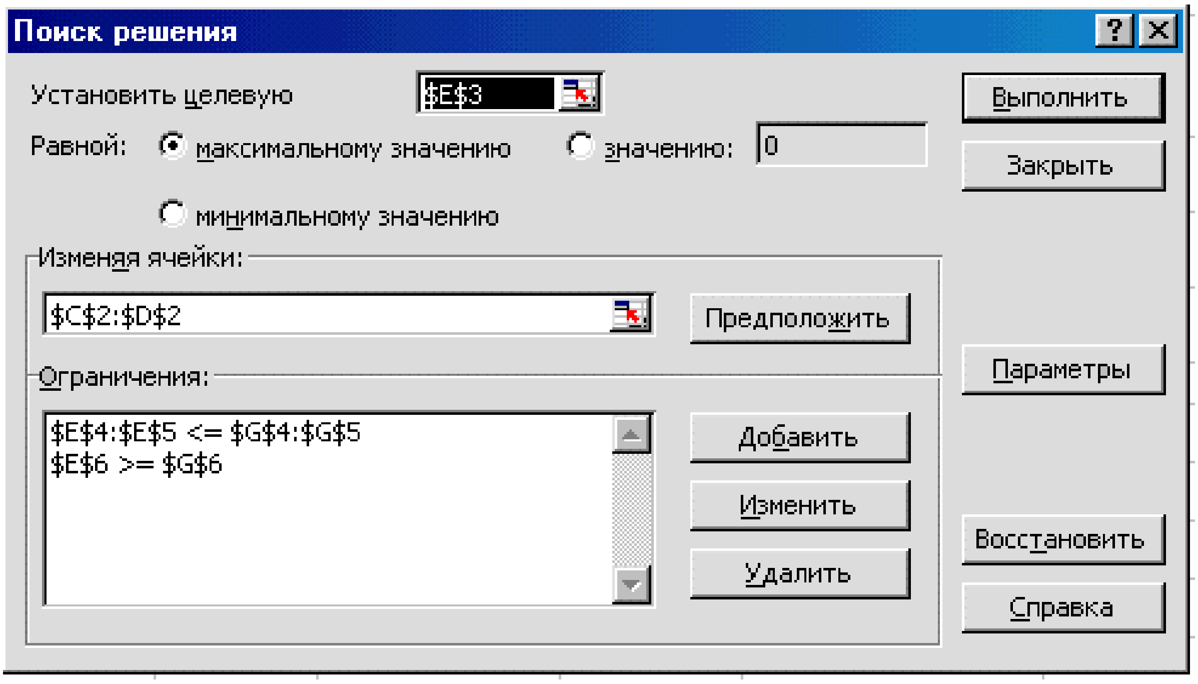
	A	B	C	D	E	F	G
1			Сыр	Брынза	Вычисленные значения	Соотношения	Заданные ограничения
2	Объём выпуска, X						
3	Прибыль от 1ед. продукции C и L(x)		5,0	2,0	0		
4	Вид ресурса	Сырьё	3	6	0	<=	18
5		Труд	6	4	0	<=	24
6		Транспорт	2	1	0	>=	2

Таблица в режиме формул

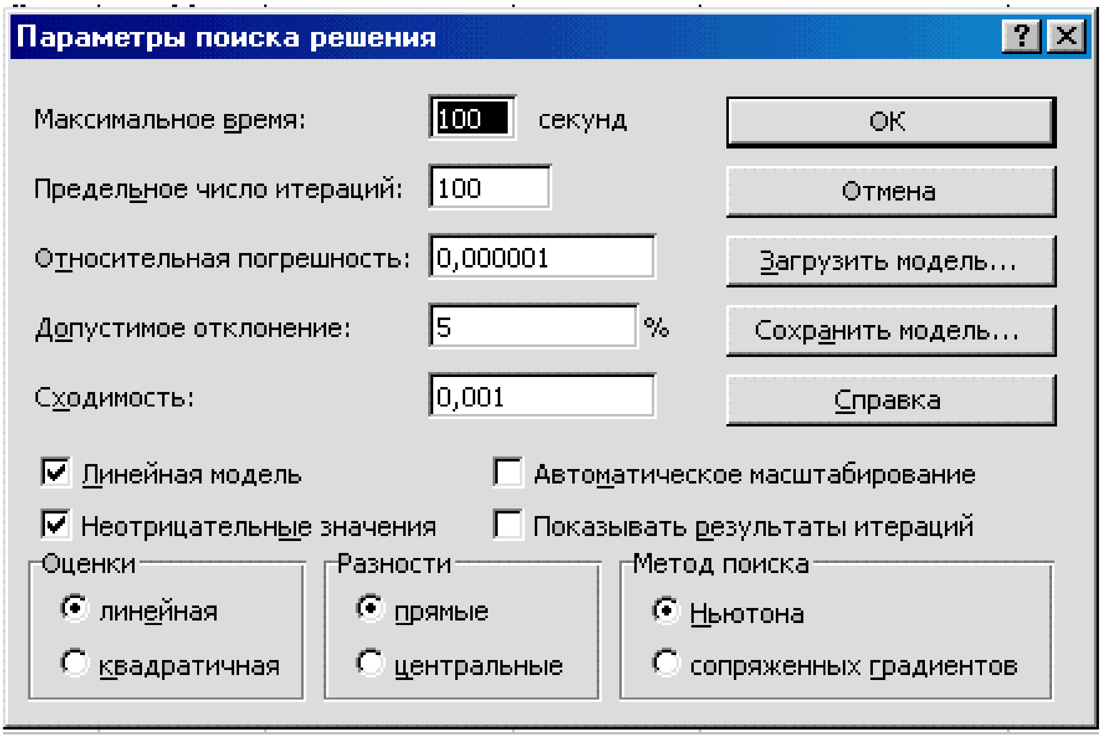
	A	B	C	D	E	F	G
1			Сыр	Брынза	Вычисленные значения	Соотношения	Заданные ограничения
2	Объём выпуска, X		4	0			
3	Прибыль от 1ед. продукции C и L(x)		5	2	=СУММПРОИЗВ(C3:D3;$C$2:$D$2)		
4	Вид ресурса	Сырьё	3	6	=СУММПРОИЗВ(C4:D4;$C$2:$D$2)	<=	18
5		Труд	6	4	=СУММПРОИЗВ(C5:D5;$C$2:$D$2)	<=	24
6		Транспорт	2	1	=СУММПРОИЗВ(C6:D6;$C$2:$D$2)	>=	2

Здесь условия на положительность переменных отсутствуют. Их можно указать через диалоговое окно **Поиск решения**. Вычисленные значения ограничений представлены формулами с использованием стандартной функции Excel СУММПРОИЗВ( ), которая возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов.

Решим задачу с помощью команды меню **Сервис / Поиск решения.** Появится соответствующее диалоговое окно. Ограничения задаем через кнопку **Добавить**. Так как первые два ограничения имеют одинаковый знак соотношения (≤), то их можно задать диапазоном.



Так как все переменные несут условие неотрицательности, то их положительность задаём через кнопку **Параметры** в окне диалога **Поиск решения**. После щелчка на ней, на экране окно **Параметры поиска решения**.



Устанавливаем флажки **Линейная модель** и **Неотрицательные значения,** соглашаясь с остальными установками по умолчанию.

Щёлкаем на кнопке **ОК**. Вновь возвращаемся в окно **Поиск решения** и щёлкаем на кнопке **Выполнить**. Результаты решения представлены в таблице:

	A	B	C	D	E	F	G
1			Сыр	Брынза	Вычисленные значения	Соотношения	Заданные ограничения
2	Объём выпуска, X		4	0			
3	Прибыль от 1ед. продукции C и L(x)		5,0	2,0	20		
4	Вид ресурса	Сырьё	3	6	12	<=	18
5		Труд	6	4	24	<=	24
6		Транспорт	2	1	8	>=	2

Рассмотрим сохранение результатов с созданием отчётов. Рассмотрим, например, отчёт **Результаты**, который выбираем в поле **Тип отчёта**. После нажатия кнопки **ОК** создаётся дополнительный лист **Отчёт по результатам**.

	B	C	D	E	F	G
1	**Microsoft Excel 8.0 Отчет по результатам**					
2	**Рабочий лист: [Поиск решен..xls]И.д. 2**					
3	**Отчет создан: 23.03.03 10:55:10**					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходно	Результат		
8	$E$3	продукции С и L(x)	0	20		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходно	Результат		
13	$C$2	Объём выпуска, Х Сыр	0	4		
14	$D$2	Объём выпуска, Х Брынза	0	0		
15						
16						
17	Ограничения					
18	Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
19	$E$4	Сырьё	12	$E$4<=$G$4	не связан.	6
20	$E$5	Труд	24	$E$5<=$G$5	связанное	0
21	$E$6	Транспорт	8	$E$6>=$G$6	не связан.	6

В представленном отчёте содержится информация:

B8:E8 – адрес целевой ячейки, её смысловое содержание, исходное значение и полученный результат:

B13:E14 – адрес изменяемых ячеек, их смысловое содержание, исходные значения и полученный результат:

B19:G21 – адрес ограничений, их смысловое содержание, вычисленные значения, формулы, по которым проводились вычисления, статус и разница. Где статус показывает результат выполнения ограничения при оптимальном плане. Связанное – ограничение при оптимальном плане выполняется как строгое равенство, не связанное – как неравенство. Разница – разность между заданным и вычисленным значением ограничений, по которой можно определить количество неиспользованных ресурсов. В рассмотренном примере G19 = 6 показывает остаток сырья. Для G21 = 6 – превышение затрат на транспорт относительно заданного значения. И G20 = 0 означает, что трудовые ресурсы лимитируют, то есть, использованы полностью.

ТЕМЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Постановка задачи линейного программирования и построение математической модели.
2. Решение задач линейного программирования графическим методом.
3. Решение задач линейного программирования симплексным методом.
4. Решение пары двойственных задач.
5. Решение задач линейного программирования стандартным средством Excel Поиск решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М., Высшая школа, 1986.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций: В 3 кн. М., 1973.
3. Воронин В.Г., Денискин В.В. Экономико-математические методы планирования на предприятиях пищевой промышленности. М.: Лёгкая и пищевая промышленность, 1981.
4. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в линейном программировании и ее приложения. М., Наука, 1971.
5. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М., Наука, 1969.
6. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. М., Советское радио, 1966.
7. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М., Наука, 1967.
8. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. М., Высшая школа, 1967.
9. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М., Высшая школа, 1980.
10. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2 кн. М., Мир, 1985.
11. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М., Наука, 1969.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Методические указания

Задачи для контрольной работы следует выбирать в соответствии с двумя последними цифрами своего шифра (номера зачётной книжки) по следующему правилу: последняя цифра номеров задач должна совпадать с последней цифрой шифра. Если предпоследняя цифра шифра чётная, то номер задачи выбирается из первых десяти вариантов (если номер задачи однозначный, то перед ним надо поставить ноль, ноль является чётным числом). Если же предпоследняя цифра шифра нечётная, то и предпоследняя цифра номера задачи должна быть также нечётной, то есть номер задачи выбирается из последних десяти. Например, при последних цифрах 76 студент должен решать задачи, у которых последняя цифра номера 6, а предпоследняя цифра номера нечетная (как и цифра 7), следовательно, это задачи № 16 для всех заданий. При последних цифрах шифра 06 (26, 46 и т.д.) студент должен решать задачи, у которых последняя цифра номера 6, а предпоследняя – четная, следовательно, это задачи № 6 для всех заданий.

В соответствии с указанным правилом каждый студент должен решить две задачи.

Решения задач надо излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия.

Задания к контрольной работе

ЗАДАНИЕ № 1

Используя графический метод решения линейных программ, найти максимальное и минимальное значения линейной функции на одном и том же множестве планов.

1. $L = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

2. $L = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

3. $L = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16 \\ -x_1 + 3x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 9 \\ x_1 \ge 1 \end{cases}$$

4. $L = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 40 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

5. $L = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 27 \\ x_2 \le 7 \end{cases}$$

6. $L = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 = 4/3 \end{cases}$$

7. $L = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x1 + 2x_2 \le 14 \end{cases}$$

8. $L = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 11 \end{cases}$$

$$3x_1 - 5x_2 \le 5 \qquad -x_1 + 3x_2 \le 1$$

$$5x_1 + 3x_2 \ge 21 \qquad 2x_1 + 7x_2 \ge 7$$

$$x_1 = 3$$

9. $L = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 28 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

10. $L = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \le 4 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$$

11. $L = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

12. $L = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 20 \\ x_1 \ge 2 \end{cases}$$

13. $L = x1 + x_2$

$$\begin{cases} 8x1 - 5x2 \le 16 \\ -x1 + 3x2 \le 2 \\ 2x1 + 7x2 \ge 9 \\ x2 \ge 1 \end{cases}$$

14. $L = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 40 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

15. $L = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 27 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$$

16. $L = 2x= + x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 4/3 \end{cases}$$

17. $L = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 21 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

18. $L = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 11 \\ -x_1 + 3x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

19. $L = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 27 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ x_1 \le 5/2 \\ x_2 \ge 3/2 \end{cases}$$

20. $L = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \ge 11 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 19 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ № 2

Построить математическую модель задачи и решить её средствами Excel. Записать сопряжённую задачу. Провести анализ и сделать выводы по полученным результатам.

1. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции приведены в таблице. В ней показаны прибыль от реализации единицы изделия и общее количество сырья, которое может быть использовано предприятием.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на единицу изделия		Запас сырья
	A	B	
Сырьё 1	1,2	4	300
Сырьё 2	5	4	120
Сырьё 3	3	12	252
Прибыль от реализации единицы изделия	30	40	

Требуется составить такой план выпуска изделий, при котором прибыль предприятия от их реализации будет максимальной.

2. На звероферме могут выращиваться лисицы и песцы, для питания которых используется два вида кормов. В таблице приведено количество корма, которое ежедневно должны получать лисицы и песцы, а также общее количество корма и прибыль от реализации одной шкурки.

Вид корма	Количество ежедневной порции корма		Общее количество корма
	лисица	песец	
А	2	3	180
Б	4	1	240
В	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать, чтобы получить максимальную прибыль от реализации их шкурок.

3. Для производства двух видов изделий А и В используется три вида оборудования. Нормы затрат времени для каждого из видов оборудования на одно изделие приведены в таблице, в которой также указан общий фонд рабочего времени и прибыль.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия	14	18	

Найти план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

4. Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья. В таблице указаны нормы расхода сырья, его общее количество и прибыль от реализации пряжи каждого вида.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на единицу изделия		Количество сырья
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	0,5	0,2	600
Капрон	0,1	0,6	650
Акрил	0,4	0,5	610
Прибыль от реализации пряжи	1100	900	

Требуется составить такой план производства, при котором прибыль предприятия от реализации пряжи будет максимальной.

5. В цехе площадью 74 кв. м необходимо установить станки, на приобретение которых отпущено 42 тыс. руб.

Существуют два типа станков. Станок первого типа, стоимостью 6 тыс. руб., требующий 12 кв. м. производственных площадей, обеспечивает изготовление 70 изделий в смену. Аналогичные характеристики станка второго типа составляют соответственно 4 тыс. руб., 6 кв. м, 40 изделий в смену.

Найти оптимальный вариант приобретения станков, обеспечивающих максимальное производство изделий в цехе.

6. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и В, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В таблице приведены нормы расхода ингредиентов и прибыль от реализации 1 т. чая сорта А и В.

Ингредиенты	Норма расхода		Объем запасов
	А	В	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации одной тонны продукции	3200	2900	

Требуется составить план производства чая с целью максимизации суммарной прибыли.

7. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 37 тыс. руб. Его предполагается разместить на площади 45 кв. м. Участок может быть оснащен оборудованием трех видов:

– машинами стоимостью 6 тыс. руб. (все показатели приводятся на единицу оборудования), размещающимися на площади 9 м^2, производительностью 8 тыс. единиц продукции за смену;

– машинами стоимостью 3 тыс. руб., занимающими площадь 4 м^2, производительностью 2 тыс. единиц;

– машинами стоимостью 4 тыс. руб., занимающими площадь 5 м^2, производительностью 5 тыс. единиц продукции.

Определить план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную производительность всего участка.

8. Перед проектировщиками автомобиля поставлена задача сконструировать самый дешевый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу. Основные характеристики материалов представлены в таблице.

Общая поверхность кузова (вместе с дверями и окнами) должна составлять 14 м^2, из них не менее 4 м^2 и не более 5 м^2 следует отнести под стекло. Вес кузова не должен превышать 150 кг.

Сколько металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший проект?

Характеристики	Материалы		
	металл	стекло	пластмасса
Стоимость 1 м^2	25	20	40
Вес 1 м^2	10	15	3

9. Известно, что откорм животных экологически выгоден при условиях, когда каждое животное получает в дневном рационе не менее 6 единиц питательного вещества A, не менее 12 единиц питательного вещества B, не менее 9 единиц питательного вещества C. Для откорма животных используются два вида кормов. Содержание каждого питательного вещества в килограмме каждого вида корма указано в таблице.

Питательные вещества	Виды кормов	
	Вид 1	Вид 2
A	2	3
B	3	6
C	4	2

Цена единицы корма	5	6

Определить количество корма каждого вида в дневном рационе скота с учетом минимума затрат на их приобретение.

10. Имеется три вида сырья – А, В, С, которое используется для производства двух видов продуктов – Р1 и Р2. В распоряжении находятся 500 единиц сырья А, 750 единиц сырья В и 200 единиц сырья С. На единицу продукта Р1 расходуется 3 единицы сырья А и 2 единицы сырья В. На единицу продукта Р2 - 2 единицы сырья А и 5 единиц сырья С. Прибыль от производства одной единицы продукта Р1 составляет 4 руб., а одной единицы продукта Р2 – 5 руб.

Определить план производства данных продуктов, обеспечивающий его максимальную прибыль.

11. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует различные ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина 1 вида	0,2	0,1	40
Древесина 2 вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость	1,2	1,5	371,1

Прибыль от реализации одного изделия	6	9	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует выпускать, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

12. Для рытья котлована объемом 1380 м^3 строители получили три экскаватора. Мощный экскаватор производительностью 22,5 м^3/ч расходует в час 10 л бензина. Аналогичные характеристики среднего экскаватора – 10 м^3/ч и 4 л/ч, малого – 5 м^3/ч и 3 л/ч. Экскаваторы могут работать все одновременно, не мешая друг другу. Запас бензина у строителей ограничен и равен 580 литров. Если рыть котлован только малым экскаватором, то бензина заведомо хватит, но это будет очень долго. Каким образом следует использовать имеющуюся технику, чтобы выполнить работу как можно быстрее?

13. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью, то есть число кормовых единиц не менее 30, и содержать не менее 1 кг белка, не менее 100 г кальция и не менее 80 г фосфора.

В таблице приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и себестоимости этих продуктов.

Компоненты	Продукты	
	Сено свежее	Силос
Кормовые единицы	0,5	0,5

Белок	40	10
Кальций	1,55	2,5
Фосфор	2	1
Себестоимость	1,2	0,8

Определить оптимальный рацион из условия минимума себестоимости.

14. Для приготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три различных вида сырья. Норма расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие			Общее количество сырья
	A	B	C	
Сырьё 1	18	15	12	360
Сырьё 2	6	4	3	192
Сырьё 3	5	3	3	180
Цена одного изделия	9	10	16	

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях, но производство ограничено выделенными предприятию запасами сырья каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

15. На предприятии намечен выпуск двух видов костюмов: мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат, на мужской костюм требуется 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1,5 человеко-дней трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат.

Предусмотрен выпуск не менее 110 костюмов, причем необходимо обеспечить прибыль не менее 14000 руб.

Требуется определить оптимальное число костюмов каждого вида, обеспечивающее максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 100 руб., а от мужского 200 руб.

16. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки питательных веществ (В): В1 – не менее 4 единиц, В2 – не менее 6 единиц, В3 – не менее 9 единиц, В4 –не менее 6 единиц. Имеется два вида диетического питания: Д1 и Д2. Если питаться по диете Д1, то в 1 кг пищи содержится: В1 – 2 единицы, В2 – 6 единиц, В3 – 1 единица, В4 – 3 единицы. В 1 кг пищи по диете Д2 содержится: В1 – 1 единица, В2 – 3 единицы, В3 – 3 единицы, В4 – 2 единицы. 1 кг пищи диеты Д1 стоит 30 денежных единиц, 1 кг пищи диеты Д2 – 20. Требуется так организовать питание, чтобы стоимость его была наименьшей, а организм получал бы суточную норму питательных веществ, указанную выше.

17. Для кондитерской фабрики требуется рассчитать оптимальный план выпуска карамели. Весь ассортимент выпускаемой карамели сгруппирован в три однородные группы М1, М2 и М3.

На производство карамели требуются три вида основного сырья: сахарный песок, патока, пюре фруктовое. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольшом количестве, не учитываются.

Удельные нормы расхода сырья на производство единицы каждого вида карамели, общий запас сырья и уровень прибыли представлены в таблице.

Виды основного сырья	Расход сырья на 1 т карамели			Общий запас сырья
	М1	М2	М3	
Песок сахарный	0,7	0,7	0,7	700

Патока	0,3	0,3	0,2	300
Пюре фруктовое	-	0,2	0,3	150
Уровень прибыли на 1 т продукции	1000	1100	1200	

Критерием оптимальности плана служит максимальная сумма прибыли, полученная от реализации продукции.

18. Фабрика выпускает кожаные брюки, куртки и пальто. В процессе изготовления изделия проходят три производственных участка – дубильный, раскройный и пошивочный. Фабрика имеет практически неограниченную сырьевую базу, однако сложная технология предъявляет высокие требования к квалификации рабочих.

Численность их в рамках планируемого периода ограничена.

Время обработки изделий на каждом участке, их плановая себестоимость, оптовая цена предприятия приведены в таблице.

Показатели	Брюки	Куртки	Пальто
Время обработки на дубильном участке	0,3	0,4	0,6
Время обработки на раскройном участке	0,4	0,4	0,7
Время обработки на пошивочном участке	0,5	0,5	0,8
Прибыль на 1 изделие	912	1410	2100

Фонд времени для дубильного, раскройного и пошивочного участков составляет соответственно 3360, 2688 и 5010 час.

Необходимо определить план с учетом максимума прибыли от реализации продукции.

19. Для изготовления двух видов изделия A1 и A2 завод использует в качестве сырья алюминий и медь. На изготовление изделий заняты токарные и фрезерные станки (часы работы). Исходные данные приведены в таблице.

Показатели	Объем ресурсов	Нормы расходов на одно изделие	
		Изделие A1	Изделие A2
Алюминий	370	10	70
Медь	420	20	50
Токарные станки	5600	300	400
Фрезерные станки	3400	200	100
Прибыль на 1 изделие		3	8

Определить план выпуска изделий, при котором прибыль максимальна.

20. Рацион стада крупного рогатого скота из 250 голов включает пищевые добавки A, B, C, Д, E. В сутки одно животное должно съедать не менее 2 кг A; 2,5 кг B; 0,9 кг C; 3 кг Д и 1,8 кг E. В чистом виде эти добавки не производятся. Они содержатся в концентратах К1, К2, К3, чья цена составляет соответственно 0,5; 0,4; 0,9 руб. за килограмм. Процентное соотношение указанных добавок в килограмме концентрата приведено в таблице.

Концентраты	Продукты				
	A	B	C	Д	E

К1	15	22	-	-	4
К2	19	17	-	14	7
К3	5	12	25	5	3

Необходимо определить, какое количество концентратов надо приобрести, чтобы затраты на их покупку были минимальными.

ЗАДАНИЕ № 3

Решить симплексным методом (с использованием симплексных таблиц) одну из пары двойственных задач **задания № 2**. Обосновать выбор модели для применения симплесного метода. Записать ответы для обеих задач. Провести анализ и сделать выводы по полученным результатам.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

1. Предмет «Математические модели в экономике» и его роль в решении экономических, управленческих и коммерческих задач.
2. Классификация экономико-математических моделей и методов.
3. Математическое моделирование. Определения, основные требования и свойства.
4. Общие сведения об основных математических методах и их применение в моделировании.
5. Этапы математического моделирования. Примеры.
6. Задачи линейного программирования (ЛП). Постановка, экономическая и геометрическая интерпретация.
7. Примеры задач экономики, бизнеса и управления, сводящиеся к моделям ЛП.
8. Определение плана, опорного плана, оптимального плана, базиса.
9. Приведение линейных программ к канонической форме.
10. Графический метод решения задач ЛП. Пример.
11. Случаи, возникающие при решении задачи ЛП.
12. Симплексный метод решения задач линейного программирования. Идея метода.
13. Выбор начального опорного плана. Постановка М-задачи.
14. Критерий оптимальности, критерий неограниченности линейной формы.
15. Выбор вектора подлежащего вводу в базис и выводу из базиса.
16. Понятие о двойственности в линейных программах.
17. Постановка сопряженной задачи линейного программирования.

18. Основные теоремы двойственности.
19. Решение пары двойственных задач симплексным методом.
20. Использование II теоремы двойственности для решения пары двойственных задач.
21. Экономическая интерпретация двойственных оценок.
22. Решение задач линейного программирования в среде Excel.
23. Анализ оптимального решения.
24. Содержание и назначение отчётов, выдаваемых Поиском решения (Excel).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Галина Степановна Ветрова
Любовь Анатольевна Яковлева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Редактор Л.Г. Барашкова
Художественный редактор Л.П. Токарева

Подписано в печать 25.09.03
Формат 60x84x16. Уч.-изд. л. 5. Тираж 800 экз.
Цена 20 р. Заказ № 173.

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 650056, г. Кемерово, б. Строителей, 47

Отпечатано в лаборатории множительной техники КемТИППа,
650010, г. Кемерово, ул. Красноармейская, 52.