

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КЕМЕРОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Кафедра прикладной математики и информатики

Г.Е. Иванец, О.А. Ивина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Для студентов вузов

Кемерово 2013

УДК 519.711.3(07)

ББК.-22.1в6

И18

Рецензенты

Н.А. Кучер, зав. кафедрой «Дифференциальные уравнения» Кемеровского государственного университета, д-р физ. – мат. наук, профессор

П.Т. Петрик, зав. кафедрой «Процессы, машины и аппараты химических производств» Кузбасского государственного технического университета, д-р техн. наук, профессор

*Рекомендовано редакционно-издательским советом
Кемеровского технологического института
пищевой промышленности*

Иванец Г.Е., Ивина О.А.

И18 Математическое моделирование: учебное пособие / Иванец Г.Е., Ивина О.А.; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. - Кемерово, 2013. – 107с.

ISBN

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 260000 «Технология продовольственных продуктов и потребительских товаров», изучающих курс математического моделирования; может быть полезно для преподавателей при подготовке лекций и проведении практических занятий и лабораторных работ.

УДК 519.711.3(07)

ББК.-22.1в6

ISBN © КемТИПП, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА	6
1.1. Интерполирование функций	6
1.1.1. Пример выполнения задания 1 в MS Excel	8
1.1.2. Пример выполнения задания 2 в MS Excel	13
1.1.3. Пример выполнения задания 3 в MS Excel	16
1.2. Математическая обработка результатов эксперимента	18
1.2.1. Выбор вида аналитической формулы для аппроксимации экспериментальной зависимости	19
1.2.2. Определение параметров теоретической зависимости МНК ...	19
1.2.3. Матричный метод определения коэффициентов линейной зависимости	21
1.2.4. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости линейной функцией МНК	23
1.2.5. Матричный метод определения коэффициентов линейной зависимости	26
1.2.6. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости показательной функцией МНК	28
1.2.7. Матричный метод определения коэффициентов показательной зависимости	30
1.2.8. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости экспоненциальной функцией МНК ³²	34
1.2.9. Матричный метод определения коэффициентов экспоненциальной зависимости	34
1.2.10. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости степенной функцией МНК.	37
1.2.11. Матричный метод определения коэффициентов степенной зависимости	39
2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	44
2.1. Элементы теории факторного эксперимента	46
2.2. Полный факторный эксперимент	48
2.3. Свойства матрицы планирования	51

2.4. Вывод коэффициентов уравнения регрессии МНК	52
2.5. Матричный способ нахождения коэффициентов уравнения регрессии	54
2.6. Проверка коэффициентов уравнения регрессии на статистическую значимость по критерию Стьюдента	58
2.7. Проверка математической модели на адекватность	60
2.8. Разработка многофакторных математических моделей на основе пассивного эксперимента.....	68
2.9. Вывод коэффициентов линейной множественной регрессии матричным методом.	69
2.10. Проведение регрессионного анализа в модуле Multiple Regressions прикладной программы Statistica.....	75
3. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ВИДЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ.	82
3.1. Основные сведения о случайных процессах..... и их характеристиках	83
3.2. Стационарный случайный процесс и некоторые его свойства.....	86
3.3. Экспериментальное определение характеристик эргодического стационарного процесса.	91
3.4. Алгоритм обработки случайного стационарного процесса.	93
3.5. Выбор математической зависимости для описания корреляционной функции.	96
3.6. Демонстрационный пример обработки стационарного случайного процесса на VBA	99
ЛИТЕРАТУРА	107

Введение

В настоящем пособии рассматриваются вопросы математического моделирования, основанного на экспериментальных данных. В пособии выделено три раздела. В первом разделе рассматриваются методы аппроксимации экспериментальных функций: интерполирование и описание эмпирических зависимостей типовыми аналитическими формулами. Анализ результатов моделирования проводится в системе MS Excel. Предлагаются два метода: интерполирование функций по формулам Ньютона и Лагранжа, аппроксимация типовыми функциями - методом наименьших квадратов (МНК) и матричным способом

Во второй части учебного пособия рассматриваются математические модели, разработанные по результатам экспериментальных данных, полученных на основе активного и пассивного экспериментов. В этом разделе достаточно подробно освещены теоретические аспекты планирования многофакторного эксперимента, приведена методика получения и анализа математических моделей, представленных в виде уравнения множественной регрессии. Определение коэффициентов многофакторной модели производится двумя методами: матричным и методом наименьших квадратов. Рассмотрена методика анализа множественной регрессии в программе Statistica .

В третьем разделе учебного пособия предлагается рассмотрение вопросов математического моделирования, основанного на использовании корреляционных функций. Как известно, многие физические процессы по своим свойствам относятся к стационарным случайным процессам, а корреляционная функция характеризует степень однородности и стабильности таких процессов. В этом разделе рассматривается алгоритм обработки случайного стационарного процесса и предлагаются типовые функции для аппроксимации корреляционных зависимостей. Анализ проводится с использованием объектно-ориентированного языка VBA и прикладной программы Statistica.

1. Методы аппроксимации функций и обработки результатов эксперимента

1.1 .Интерполирование функций

В инженерной практике нередко возникает задача нахождения по таблице экспериментальных значений определенных параметров в точках, отличных от точек эксперимента. В математике эта задача называется задачей интерполирования функций. Она состоит в том, чтобы для функции $f(x)$, заданной в отдельных точках отрезка $[x_0, x_n]$ - узлах интерполяции $y_0 = f(x_0) \dots y(n) = f(x_n)$, найти ее приближенное значение во всех остальных точках этого отрезка. Решение достигается построением интерполяционного полинома, дающего приближенное аналитическое выражение для этой функции на отрезке $[x_0, x_n]$ и принимающего в точках x_0, x_1, \dots, x_n значения y_0, y_1, \dots, y_n . Геометрически задача интерполирования (рис1.1) означает построение кривой $F(x)$, проходящей через точки с координатами $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$.

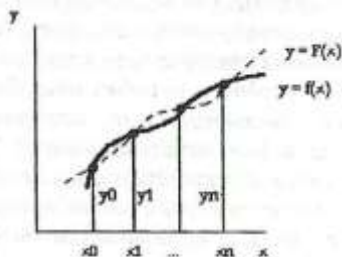


Рис.1.1. Геометрическая интерпретация задачи интерполирования функций

Исходя из соображений удобства построения и использования, интерполяционный многочлен может иметь различный вид.

Одним из наиболее часто используемых является полином Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x-x_i)(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)} \right] \quad (1.1)$$

Для удобства вычисления разности удобно расположить следующим образом :

$$\begin{array}{cccc} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \dots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 & \dots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & x-x_2 & \dots & x_2-x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \dots & x-x_n \end{array}$$

Если произведение элементов строк обозначить через D_i ($i=0,1,..,n$), а произведение элементов главной диагонали - через $\Pi_{n+1}(x)$, то полином Лагранжа преобразуется:

$$P_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n y_i / D_i \quad (1.2)$$

Интерполяционный многочлен дает возможность приближенно определять значения функции $f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполяции. Погрешность оценивается следующим образом:

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \left(\frac{\mu}{(n+1)!} \right) (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (1.3)$$

где $\mu = \max |f'(x)|$ - максимальное значение $(n+1)$ -й производной от заданной функции на отрезке $[a, b]$.

ЗАДАНИЕ 1. Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в неравностоящих узлах таблицы.

Исходные данные для выполнения задания представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные для выполнения задания 1

x	0.43	0.48	0.55	0.62	0.70	0.75
y	1.635	1.732	1.876	2.003	2.228	2.359

x p(x)=?

1.1.1. Пример выполнения задания 1 в MS Excel

Результат выполнения задания 1 представлен в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Результат выполнения задания 1 в числовом варианте

	A	B	C	D	E	F
1	x=	0,74				
2	x	y				
3	0,43	1,635		-53547,7		
4	0,48	1,732		228871,7		
5	0,55	1,876		-559733		
6	0,62	2,003		874869,2		
7	0,7	2,228		-1562851		
8	0,75	2,359		-2100249		
9						
10						
11	0,31	-0,05	-0,12	-0,19	-2,7	-3,2
12	0,05	0,26	-0,07	-0,14	-0,22	-0,27
13	0,12	0,07	0,19	-0,07	-0,15	-0,2
14	0,19	0,14	0,07	0,12	-0,08	-0,13
15	0,27	0,22	0,15	0,08	0,04	-0,05
16	0,32	0,27	0,2	0,13	0,05	-0,01
17						
18	p(x)=2,332118					

В режиме отображения формул (Сервис - Параметры - Вид - Формула) задание выглядит следующим образом (таблица 1.3):

Таблица 1.3

Результат выполнения задания 1 в формульном варианте

	A	B	C	D	E	F
1	x=	0,74				
2	x	y				
3	0,43	1,635		$B3/(A11*B11*C11*D11*E11*F11)$		
4	0,48	1,732		$B4/(A12*B12*C12*D12*E12*F12)$		
5	0,55	1,876		$B5/(A13*B13*C13*D13*E13*F13)$		
6	0,62	2,003		$B6/(A14*B14*C14*D14*E14*F14)$		
7	0,7	2,228		$B7/(A15*B15*C15*D15*E15*F15)$		
8	0,75	2,359		$B8/(A16*B16*C16*D16*E16*F16)$		
9						
10						
11	B1-A3	A3-A4	A3-A5	A3-A6	A3-A7	A3-A8
12	A4-A3	B1-A4	A4-A5	A4-A6	A4-A7	A4-A8
13	A5-A3	A5-A4	B1-A5	A5-A6	A5-A7	A5-A8
14	A6-A3	A6-A4	A6-A5	B1-A6	A6-A7	A6-A8
15	A7-A3	A7-A4	A7-A5	A7-A6	B1-A7	A7-A8
16	A8-A3	A8-A4	A8-A5	A8-A6	A8-A7	B1-A8
17						
18	$p(x)=(A11*B12*C13*D14*E15*F16)*SUM(D3:D8)$					

В столбец A3:A8 записываются значения аргумента функции (узлы интерполяции), в столбец B3:B8 - экспериментальные значения функции.. В диапазон ячеек A11:F16 вносятся разности интерполяционной формулы Лагранжа. Для удобства расчета и компактной записи формулы Лагранжа формируем столбец D3:D8 (в ячейку D3 записываем формулу $=B3/(A11*B11*C11*D11*E11*F11)$) и копируем её до ячейки D8. В ячейке B18 записываем полином Лагранжа.

В таблице 1.4. приведены варианты к выполнению индивидуальных заданий.

Таблица 1.4

Варианты к заданию 1

X	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	0,3
Y	1,023	1,095	1,147	1,214	1,301	1,409
Вариант	1	2	3	4	5	6
X	0,102	0,114	0,125	0,203	0,154	0,186
X	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64
Y	2,739	2,3	1,968	1,787	1,595	1,343
Вариант	7	8	9	10	11	12
X	0,526	0,453	0,482	0,552	0,436	0,361
X	0,68	0,73	0,8	0,88	0,93	0,99
Y	0,808	0,894	1,029	1,209	1,341	1,523
Вариант	13	14	15	16	17	18
X	0,896	0,812	0,774	0,955	0,715	0,691
X	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,4
Y	9,054	6,616	4,691	3,351	2,739	2,365
Вариант	19	20	21	22	23	24
X	0,314	0,235	0,332	0,275	0,186	0,146

При постоянном шаге между узлами интерполирования обычно используют полиномы Ньютона с коэффициентами, выражаемыми через конечные разности:

первого порядка $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i=0, n-1)$

второго порядка $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - y_i \quad (i=0, n-2)$

третьего порядка $\Delta^3 y = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i=0, n-3)$

Обычно конечные разности записываются в виде таблицы (таблица 1.5.).

Таблица 1.5

Табличное представление конечных разностей.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2		
x_3	y_3			

Первая интерполяционная формула Ньютона для интерполирования функции $y = f(x)$ в точках, близких к x_0 , т.е. в начале таблицы, имеет вид:

$$P_n(x) = y_0 + g\Delta y + g(g-1)\Delta^2 y / 2! + \dots + (g(g-1)\dots(g-n+1))\Delta^n y / n! \quad (1.4)$$

где $g = (x - x_0)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$ - постоянный шаг интерполирования. Степень многочлена n желательно выбирать

так, чтобы разности Δy были примерно равными. Погрешность вычисления по данной формуле оценивается следующим образом: $|R_n(x)| \leq (M h g(g-1)\dots(g-n))/(n+1)!$, где $M = \max|f(x)|$ - максимум $(n+1)$ -й производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Вторая интерполяционная формула Ньютона предназначена для интерполирования назад, т.е. для значений аргумента, лежащих в конце таблицы. Эта формула имеет вид:

$$P_n(x) = y_n + g\Delta y_{n-1} + g(g+1)\Delta^2 y_{n-2} / 2! + \dots + (g(g+1)\dots(g+n-1))\Delta^n y_0 / n! \quad (1.5)$$

где $g = (x-x_n)/h$

Погрешность вычислений по данной формуле оценивается следующим образом:

$$|R_n(x)| \leq (M h g(g+1)\dots(g+n)) / (n+1)! \quad (1.6)$$

где $M = \max|f(x)|$ - максимум $(n+1)$ -й производной функции на отрезке $[a, b]$.

ЗАДАНИЕ 2. Используя первую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значение функции при заданном значении аргумента.

Исходные данные для выполнения задания 2 представлены в таблице 1.6.

Таблица 1.6

Исходные данные для выполнения задания 2

x	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
y	0,8607	0,8187	0,7788	0,7408	0,7046	0,6703	0,6376	0,6065

$x=0,1511$ $p(x)=?$

1.1.2. Пример выполнения задания 2 в MS Excel

Результат выполнения задания 2 представлен в таблице.1.7.

Таблица 1.7

Результат выполнения задания 2 в числовом варианте

	A	B	C	D	E
1	аргумент	функция	конечные разности		
2	x	y	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка
3	0,15	0,8607	-0,042	0,0021	-0,0002
4	0,2	0,8187	-0,0399	0,0019	-0,0001
5	0,25	0,7788	-0,038	0,0018	-0,0001
6	0,3	0,7408	-0,0362	0,0019	-0,0003
7	0,35	0,7046	-0,0343	0,0016	0
8	0,4	0,6703	-0,0327	0,0016	-0,0001
9	0,45	0,6376	-0,0311	0,0015	
10	0,5	0,6065	-0,0296		
11	0,55	0,5769			
12					
13	p(x)=	0,8598			
14	x=	0,1511			
15	g=	0,022			

В режиме отображения формул (Сервис - Параметры - Вид - Формула) задание выглядит следующим образом. (таблица 1.8):

Таблица 1.8

Результат выполнения задания 2 в формульном варианте

	A	B	C	D	E
1	аргумент	функция	конечные разности		
2	x	y	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка
3	0,15	0,8607	B4-B3	C4-C3	D4-D3
4	0,2	0,8187	B5-B4	C5-C4	D5-D4
5	0,25	0,7788	B6-B5	C6-C5	D6-D5
6	0,3	0,7408	B7-B6	C7-C6	D7-D6
7	0,35	0,7046	B8-B7	C8-C7	D8-D7
8	0,4	0,6703	B9-B8	C9-C8	D9-D8
9	0,45	0,6376	B10-B9	C10 - C9	
10	0,5	0,6065	B11-B10		
11	0,55	0,5769			
13	$p(x)= B3+B15*C3+B15*(B15-l)*D3/2+B15*(B15-l)*(B15-2)*E3/6$				
14	x=				
15	g= (B14 - A3)/0.05□				

В столбец A3:A11 записываем значения аргумента (узлы интерполяции), в столбец B3:B11 записываем значения функции. Конечные разности 1 - го, 2 -го и 3 -го порядка записываются в соответствующие столбцы C3:C10, D3:D9, E3:E8. Ячейки C3, D3, E3 заполняются формулами =B4-B3, =C4-C3, =D4-D3 соответственно. С помощью маркеров заполнения каждая из этих формул копируется до ячеек C10, D9, E8, соответственно. Значение аргумента, при котором необходимо определить значение функции, записано в ячейке B14. Формула для определения параметра g - в ячейке B15. Для заданного аргумента принимаем $x_0=0.15$ (ячейка A3). В ячейку B13 записываем первую интерполяционную формулу Ньютона.

Таблица 1.9

Варианты к заданию 2

X	1,415	1,42	1,425	1,43	1,435	1,44
Y	0,8885	0,8895	0,8906	0,8916	0,8926	0,8936
Вариант	1	2	3	4	5	6
X	1,4161	1,4179	1,4263	1,4135	1,4124	1,41
X	0,101	0,106	0,111	0,116	0,121	0,126
Y	1,2618	1,2764	1,2912	1,3061	1,3213	1,3366
Вариант	7	8	9	10	11	12
X	0,1026	0,1035	0,1074	0,099	0,096	0,1006
X	0,18	0,185	0,19	0,195	0,2	0,205
Y	5,6154	5,4669	5,3263	5,193	5,0664	4,946
Вариант	13	14	15	16	17	18
X	0,1811	0,1827	0,1873	0,175	0,1776	0,1783
X	3,5	3,55	3,6	3,65	3,7	3,75
Y	33,1154	34,8133	36,5982	38,4747	40,4473	42,5211
Вариант	19	20	21	22	23	24
X	3,522	3,543	3,575	3,475	3,488	3,45

ЗАДАНИЕ 3. Используя вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значение функции при заданном значении аргумента.

Исходные данные для выполнения задания 3 представлены в таблице 1.10.

Таблица 1.10

Исходные данные для выполнения задания 3

x	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y	0,2588	0,342	0,4226	0,5	0,5736	0,6428	0,7071	0,776	0,8182

x=54 p(x)=?

1.1.3. Пример выполнения задания 3 в MS Excel

Результат выполнения задания 3 представлен в таблице.1.11

Таблица 1.11

Результат выполнения задания 3 в числовом варианте

	A	B	C	D	E
1	аргумент	функция		конечные разности	
2	X	Y	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка
3	15	0.2588	0.0832	-0.0026	- 0.0006
4	20	0.342	0.0806	-0.0032	- 0.0006
5	25	0.4226	0.0774	-0.0038	-0.0006
6	30	0.5	0.0736	-0.0044	-0.0005
7	35	0.5736	0.0692	-0.0049	-0.0005
8	40	0.6428	0.0643	-0.0054	-0.0013
9	45	0.7071	0.0589	-0.0067	
10	50	0.766	0.0522		
11	55	0.8182			
13	p(x)=	0,8083584			
14	x=	54			
15	g=	-0,2			

В режиме отображения формул (Сервис - Параметры - Вид - Формула) задание выглядит следующим образом :

Таблица 1.12

Результат выполнения задания 3 в формульном варианте

	A	B	C	D	E
1	аргумент	функция	конечные разности		
2	X	Y	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка
3	15	0.2588	B4-B3	C4-C3	D4-D3
4	A3+5	0.3420	B5-B4	C5-C4	D5-D4
5	A4+5	0.4226	B6-B5	C6-C5	D6-D5
6	A5+5	0.5000	B7-B6	C7-C6	D7-D6
7	A6+5	0.5736	B8-B7	C8-C7	D8-D7
8	A7+5	0.6428	B9-B8	C9-C8	D9-D8
9	A8+5	0.7071	B10-B9	C10-C9	
1	A9+5	0.7660	B11-B10		
11	A10+5	0.8182			
13	P(x)=	B11+B15*C10+B15*(B15+1)/2*D9+B15*(B15+1)*(B15+2)*E8/6			
14	x=	54			
15	g=		(B14-A11)/5		

В столбец A3:A11 записываем узлы интерполяции (в ячейку A3 - 1-ое значение аргумента, в ячейку A4 - формулу =A3+5, столбец A5:A11 получаем с помощью копирования формулы =A3+5). В столбец B3:B11 записываем значения функции . Конечные разности 1-го, 2-го и 3-го порядка записываются в соответствующие столбцы C3:C10 , D3:D9, E3:E8. Формируются столбцы с помощью команды копирования (в ячейку C3 записываем разность =B4 - B3, затем, копируем формулу до ячейки C10, в ячейку D3 - разность =C4 - C3, затем, копируем формулу до ячейки D9, в ячейку E3 - разность =D4 - D3 и копируем формулу до ячейки E8). Заданное значение аргумента записываем в ячейку B14 формулу для определения параметра g - в ячейку B15. Для заданного значения аргумента принимаем

$x_n=55$ (ячейка A11). Вторая интерполяционная формула Ньютона записывается в ячейку B13

Таблица 1.13

Варианты к заданию 3

X	0,115	0,12	0,125	0,13	0,135	0,14
Y	8,6572	8,2932	7,9582	7,6489	7,3623	7,0961
Вариант	1	2	3	4	5	6
X	0,141	0,142	0,143	0,144	0,1451	0,1452
X	1,34	1,345	1,35	1,355	1,36	1,365
Y	4,2556	4,3532	4,4552	4,5618	4,6734	4,7903
Вариант	7	9	8	10	11	12
X	1,367	1,361	1,632	1,363	1,364	1,3645
X	0,01	0,06	0,11	0,16	0,21	0,26
Y	0,9918	0,9519	0,9136	0,8769	0,8416	0,8077
Вариант	13	14	15	16	17	18
X	0,2117	0,2278	0,2345	0,2435	0,2567	0,2598

1.2. Математическая обработка результатов эксперимента

В инженерной практике нередко возникает задача описания полученной экспериментальной зависимости аналитической формулой. В этом случае задача описания экспериментальной зависимости отлична от задачи интерполирования. График интерполяционного многочлена должен проходить через все экспериментальные точки (X_i, Y_i) . График же теоретической зависимости может не проходить через каждую экспериментальную точку, но должен быть близок к системе экспериментальных точек. Во многих случаях аналитическая формула, сглаживающая разброс экспериментальных точек, является предпочтительнее интерполяционных многочленов, повторяющих все ошибки эксперимента и имеющих громоздкий и сложный вид. Описание эмпирической зависимости аналитической формулой включает три этапа:

- выбор общего вида этой формулы;
- определение ее параметров;
- оценку правомерности описания.

1.2.1. Выбор вида аналитической формулы для аппроксимации экспериментальной зависимости

В инженерной практике выбор вида аналитической (теоретической) формулы зависит от степени изученности исследуемого процесса. Если характер зависимости между экспериментальными значениями неизвестен, то выбор аналитического выражения для аппроксимации эмпирической зависимости осуществляется по виду графика экспериментальных точек на координатной плоскости. Предпочтение отдается достаточно простым и хорошо изученным элементарным функциям, содержащим ограниченное число (обычно не более 2-х,3-х) подлежащих определению параметров. Обычно используют следующие элементарные функции:

-линейную $y = a + bx$ (1.7)

-показательную $y = ab^x$ (1.8)

-экспоненциальную $y = ae^{bx}$ (1.9)

-степенную $y = ax^b$ (1.10)

-гиперболическую $y = a + \frac{b}{x}$ (1.11)

1.2.2. Определение параметров теоретической зависимости МНК

Определение параметров аппроксимирующей зависимости осуществляется, как правило, по методу наименьших квадратов, суть которого сводится к выполнению условия:

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i^{(эксп)} - Y_i^{(теор)})^2 \rightarrow \min \quad (1.12)$$

т.е. сумма квадратов отклонений экспериментальных значений от теоретических (рассчитанных по аналитическому выражению) должна быть минимальной. Решая систему уравнений, полученную на основе этого условия, получаем формулы для определения параметров a и b линейной зависимости $y = a + bx$:

$$b = \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) * \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - n \sum_{i=1}^n y_i * x_i \right) / \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \quad (1.13)$$

$$a = \left(\sum_{i=1}^n y_i - b * \sum_{i=1}^n x_i \right) / n \quad (1.14)$$

Эти формулы используются для определения параметров нелинейных аппроксимирующих зависимостей, которые предварительно линеаризируются (как правило логарифмированием).

Для показательной функции $y = ab^x$ параметры a и b определяются по следующим зависимостям:

$$b = \exp \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i * \sum_{i=1}^n \ln y_i - n \sum_{i=1}^n x_i * \ln y_i \right) / \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right) \quad (1.15)$$

$$a = \exp \left(\left(\sum_{i=1}^n \ln y_i - (\ln b) * \sum_{i=1}^n x_i \right) / n \right) \quad (1.16)$$

Для экспоненциальной зависимости $y = ae^{bx}$ формулы, определяющие коэффициенты a и b , имеют вид:

$$b = \left(\sum_{i=1}^n x_i * \sum_{i=1}^n \ln y_i - n \sum_{i=1}^n x_i * \ln y_i \right) / \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \quad (1.17)$$

$$a = \exp \left(\left(\sum_{i=1}^n \ln y_i - b * \sum_{i=1}^n x_i \right) / n \right) \quad (1.18)$$

Для степенной зависимости $y = ax^b$ расчетные формулы параметров a и b имеют следующий вид :

$$b = \left(\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln y_i \right) - n \sum_{i=1}^n (\ln x_i) * (\ln y_i) \right) / \left(\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 \right) \quad (1.19)$$

$$a = \exp \left(\left(\sum_{i=1}^n \ln y_i - b * \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) / n \right) \quad (1.20)$$

Параметры a и b гиперболической зависимости определяются по формулам:

$$b = \left[\left(\sum_{i=1}^n 1/x_i \right) * \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - n \sum_{i=1}^n (y_i/x_i) \right] / \left[\sum_{i=1}^n (1/x_i)^2 - n \sum_{i=1}^n (1/x_i) \right] \quad (1.21)$$

$$a = \left(\sum_{i=1}^n y_i - b * \sum_{i=1}^n (1/x_i) \right) / n \quad (1.22)$$

Оценку правомерности аппроксимации экспериментальной функции можно провести с помощью дисперсии адекватности, характеризующей меру разброса экспериментальных значений относительно теоретических:

1.2.3. Матричный метод определения коэффициентов линейной зависимости

По результатам экспериментальных измерений можно составить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a + bx_1 \\ y_2 = a + bx_2 \\ y_3 = a + bx_3 \\ y_n = a + bx_n \end{cases} \quad (1.23)$$

В матричном виде система (1.23) будет выглядеть следующим образом:

$$X \cdot A = Y, \quad (1.24)$$

$$\text{где } x = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_n \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_n \end{vmatrix}$$

Умножив систему (1.24) на транспонированную матрицу x^T слева, получим систему:

$$x^T \cdot x \cdot A = x^T \cdot y \quad (1.25)$$

$$\text{где } x^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_n \end{vmatrix}, \quad x^T \cdot x = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix},$$

$$x^T \cdot y = \left| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \end{array} \right|$$

После определения обратной матрицы $(x^T \cdot x)^{-1}$ и домножения системы (1.25) слева на $(x^T \cdot x)^{-1}$, получим:

$$(x^T \cdot x)^{-1} \cdot (x^T \cdot x) \cdot A = (x^T \cdot x)^{-1} \cdot x^T \cdot y \quad (1.26)$$

В результате получим решение системы:

$$A = \left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right| = (x^T \cdot x)^{-1} \cdot (x^T \cdot y) \quad (1.27)$$

Если экспериментальная зависимость описывается нелинейной зависимостью, последнюю линеаризируют либо логарифмированием, либо вводом специальных обозначений (для гиперболической функции).

В матричный вывод коэффициентов нелинейных зависимостей вносятся соответствующие коррективы. В экспериментальной части выполнения задания эти коррективы четко выделены в таблицах определения коэффициентов аппроксимирующей зависимости.

1.2.4. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости линейной функцией МНК.

Исходные данные и результаты их обработки МНК показаны на рис.1.2 и рис.1.3.

Экспериментальные значения X_i , Y_i записываются в диапазоны A2:A11, B2:B11, соответственно. Диапазон A3:A11 можно сформировать с помощью команды копирования (в ячейку A2 записывается значение X_1 , в ячейку A3 - формула $=A2+0,2$, затем устанавливаем курсор на маркер заполнения ячейки A3 и «протягиваем» мышью до ячейки A11). Диапазоны C2:C11 и D2:D11 формируются следующим образом: в ячейку C2 записываем формулу $=A2*B2$, в ячейку D2 - формулу $=A2^2$, выделяем диапазон C2:D2, устанавливаем курсор на маркер заполнения ячейки D2 и «протягиваем» мышью до строки 11. Для упрощения записи расчетных формул параметров A и B в ячейках B13, B14, B15, B16 записываем суммы столбцов: $=СУММ(A2:A11)$, $=СУММ(B2:B11)$, $=СУММ(C2:C11)$, $=СУММ(D2:D11)$, соответственно. В ячейку E14 записываем формулу для расчета коэффициента B, в ячейку E15 - расчетную формулу коэффициента A. Расчетные значения функции записываем в диапазон E2:E11. В ячейку E2 вносим формулу $=\$E\$15+\$E\$14*A2$. В диапазон F2:F11 записываются квадраты отклонений экспериментальных значений функции от рассчитанных по выбранной аналитической формуле. В ячейку F2 вносим формулу $=(B2-E2)^2$. Выделяем диапазон E2:F2, устанавливаем курсор в маркер заполнения ячейки F2 и «протягиваем» мышью до строки 11. Расчетная формула дисперсии адекватности записывается в ячейку E16.

	A	B	C	D	E	F
1	X	Уэксп	X*Уэксп	X^2	Урасч	(Уэксп-Урасч)^2
2	0,3	1	0,3	0,09	0,955	0,002
3	0,5	1,6	0,8	0,25	1,529	0,005
4	0,7	2	1,4	0,49	2,104	0,011
5	0,9	2,8	2,52	0,81	2,678	0,015
6	1,1	3,1	3,41	1,21	3,253	0,023
7	1,3	3,8	4,94	1,69	3,827	0,001
8	1,5	4,4	6,6	2,25	4,402	0,000
9	1,7	4,9	8,33	2,89	4,976	0,006
10	1,9	5,6	10,64	3,61	5,551	0,002
11	2,1	6,2	13,02	4,41	6,125	0,006
12						
13	ΣX=	12	Вид зависимости Y=A+B*X			
14	ΣУэксп=	35,4		B=	2,87	
15	ΣX*Уэксп=	51,96		A=	0,09	
16	ΣX^2=	17,7		Дад.=	0,009	

Рис.1.2. Описание экспериментальной зависимости линейной функцией (числовой вид)

	A	B	C	D	E	F
1	X	Уэксп	X*Уэксп	X^2	Урасч	(Уэксп-Урасч)^2
2	0,3	1	=A2*B2	=A2^2	=SE\$15+SE\$14*A2	=(B2-E2)^2
3	=A3+0,2	1,6	=A3*B3	=A3^2	=SE\$15+SE\$14*A3	=(B3-E3)^2
4	=A4+0,2	2	=A4*B4	=A4^2	=SE\$15+SE\$14*A4	=(B4-E4)^2
5	=A5+0,2	2,8	=A5*B5	=A5^2	=SE\$15+SE\$14*A5	=(B5-E5)^2
6	=A6+0,2	3,1	=A6*B6	=A6^2	=SE\$15+SE\$14*A6	=(B6-E6)^2
7	=A7+0,2	3,8	=A7*B7	=A7^2	=SE\$15+SE\$14*A7	=(B7-E7)^2
8	=A8+0,2	4,4	=A8*B8	=A8^2	=SE\$15+SE\$14*A8	=(B8-E8)^2
9	=A9+0,2	4,9	=A9*B9	=A9^2	=SE\$15+SE\$14*A9	=(B9-E9)^2
10	=A10+0,2	5,6	=A10*B10	=A10^2	=SE\$15+SE\$14*A10	=(B10-E10)^2
11	=A11+0,2	6,2	=A11*B11	=A11^2	=SE\$15+SE\$14*A11	=(B11-E11)^2
12						
13	ΣX=	=СУММ(A2:A11)				
14	ΣУэксп=	=СУММ(B2:B11)		B=	=(B13*B14-10*B15)/(B13^2-10*B16)	
15	ΣX*Уэксп=	=СУММ(C2:C11)		A=	=(B14-E14*B13)/10	
16	ΣX^2=	=СУММ(D2:D11)		Дад.=	=СУММ(F2:F11)/(10-2)	

Рис.1.3. Описание экспериментальной зависимости линейной функцией (формульный вид)

1.2.5. Матричный метод определения коэффициентов линейной зависимости

Исходные данные и результаты их обработки матричным методом показаны на рис. 1.4.

Матрица x		Вектор y	Матрица x^T				
1	x_1	y_1	1	1	1	...	1
1	x_2	y_2	x_1	x_2	x_3	...	x_n
1	x_3	y_3					
...					
1	x_n	y_n					
Матрица $x^T \cdot x$		Обратная матрица $(x^T \cdot x)^{-1}$	Вектор $x^T \cdot y$	Решение			
N	$\sum x_i$		$\sum y_i$	$a = (x^T \cdot x)^{-1} \cdot (x^T \cdot y)$			
$\sum x_i$	$\sum x_i^2$		$\sum x_i \cdot y_i$				
				$b =$			

Рис. 1.4. Матричный метод определения коэффициентов линейной зависимости

Транспонирование матрицы x

- 1) выделить диапазон ячеек, в котором будет размещаться транспонированная матрица x^T .

- 2) вызвать мастер функций, из окна «Категории» выбрать ссылки и массивы, из окна «Функции» выбрать функцию ТРАНСП().
- 3) в окне функции ТРАНСП() в поле «аргумент» ввести диапазон исходной матрицы x .
- 4) установить курсор в «Панели формул» и нажать одновременно три клавиши Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матриц x^T и x

- 1) выделить блок ячеек, где будет размещаться матрица $(x^T \cdot x)$;
- 2) вызвать мастер функций, выбрать «Математические функции» и соответственно функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести аргументы этой функции: диапазон матрицы x^T и x ;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Обращение матрицы $(x^T \cdot x)$.

- 1) выделить диапазон ячеек, где будет размещаться обратная матрица $(x^T \cdot x)^{-1}$;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МОБР();
- 3) в окне МОБР() задать диапазон матрицы $x^T \cdot x$;
- 4) установить курсор в «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матрицы x^T и вектора y .

- 1) выделить блок ячеек, где будет располагаться вектор $(x^T \cdot y)$;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ();

- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести ее аргументы: диапазон транспонированной матрицы x^T и диапазон вектора y ;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Получение решения, т.е. значений коэффициентов a и b .

- 1) выделить диапазон ячеек, где будут располагаться значения коэффициентов a и b ;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() в поле аргументы функции ввести диапазон обратной матрицы $(x^T \cdot x)^{-1}$ и вектора $(x^T \cdot y)$;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

1.2.6. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости показательной функцией МНК

Исходные данные и результаты математической обработки МНК представлены на рис.1.5 и рис.1.6.

Экспериментальные значения X_i, Y_i записываются в диапазоны A2 :A11, B2:B11, соответственно. Формирование диапазона C2:C11 (lnYэксп) - в ячейку C2 записываем формулу =ln(B2) и копируем её до ячейки C11. Формирование столбца D2:D11 ($X \cdot \ln Y_{\text{эксп}}$) - в ячейку D2 записываем формулу =A2*C2 и копируем её до ячейки D11. Заполнение диапазона E2:E11 - в ячейку E2 записываем формулу =A2^2 и копируем её до ячейки E11. В ячейки B13, B14, B15, B16 записываем суммы, необходимые для расчета параметров A и B - =СУММ(A2:A11), =СУММ(C2:C11), =СУММ(D2:D11), =СУММ(E2:E11). В ячейку

F14 вносим формулу, определяющую коэффициент В, в ячейку F15 - формулу для определения параметра А. Значения функции, рассчитанные по аналитической формуле, оформляются в диапазоне F2:F11. В ячейку F2 записывается формула $=\$F\$15*\$F\14^A2 и копируется до ячейки F11. Оформление диапазона G2:G11 (квадраты отклонений экспериментальных значений функций от теоретических, рассчитанных по аналитической формуле) - в ячейку G2 записываем формулу $=(B2-F2)^2$ и копируем её до ячейки G11. Дисперсия адекватности рассчитывается в ячейке F16.

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Уэксп	ln(Уэксп)	X*ln(Уэксп)	X^2	Урасч	(Уэксп-Урасч)^2
2	0,3	7,8	2,054	0,616	0,09	7,753	0,002
3	0,5	10,3	2,332	1,166	0,25	10,313	0,000
4	0,7	13,7	2,617	1,832	0,49	13,720	0,000
5	0,9	18,1	2,896	2,606	0,81	18,252	0,023
6	1,1	24,3	3,190	3,510	1,21	24,280	0,000
7	1,3	32,3	3,475	4,518	1,69	32,301	0,000
8	1,5	42,9	3,759	5,638	2,25	42,970	0,005
9	1,7	57,7	4,055	6,894	2,89	57,163	0,289
10	1,9	75,9	4,329	8,226	3,61	76,044	0,021
11	2,1	101	4,615	9,692	4,41	101,162	0,026
12							
13	ΣX=		12			Вид зависимости Y=A*B^X	
14	Σ ln(Уэксп)=	33,3237852				B=	4,17
15	Σ X*ln(Уэксп)=	44,697808				A=	5,05
16	Σ X^2=		17,7			Дад=	0,046

Рис.1.5. Описание экспериментальной зависимости показательной функцией (числовой вид)

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Уэксп	ln(Уэксп)	X*ln(Уэксп)	X^2	Урасч	(Уэксп-Урасч)^2
2	=0,3	7,8	=LN(B2)	=A2*C2	=A2^2	=F\$15*F\$14^A2	=(B2-F2)^2
3	=A2+0,2	10,3	=LN(B3)	=A3*C3	=A3^2	=F\$15*F\$14^A3	=(B3-F3)^2
4	=A3+0,2	13,7	=LN(B4)	=A4*C4	=A4^2	=F\$15*F\$14^A4	=(B4-F4)^2
5	=A4+0,2	18,1	=LN(B5)	=A5*C5	=A5^2	=F\$15*F\$14^A5	=(B5-F5)^2
6	=A5+0,2	24,3	=LN(B6)	=A6*C6	=A6^2	=F\$15*F\$14^A6	=(B6-F6)^2
7	=A6+0,2	32,3	=LN(B7)	=A7*C7	=A7^2	=F\$15*F\$14^A7	=(B7-F7)^2
8	=A7+0,2	42,9	=LN(B8)	=A8*C8	=A8^2	=F\$15*F\$14^A8	=(B8-F8)^2
9	=A8+0,2	57,7	=LN(B9)	=A9*C9	=A9^2	=F\$15*F\$14^A9	=(B9-F9)^2
10	=A9+0,2	75,9	=LN(B10)	=A10*C10	=A10^2	=F\$15*F\$14^A10	=(B10-F10)^2
11	=A10+0,2	101	=LN(B11)	=A11*C11	=A11^2	=F\$15*F\$14^A11	=(B11-F11)^2
12							
13	ΣX=	=СУММ(A2:A11)					
14	Σ ln(Уэксп)=	=СУММ(C2:C11)			B=	=EXP((B13*B14-10^B15)/(B13^2-10^B16))	
15	Σ X*ln(Уэксп)=	=СУММ(D2:D11)			A=	=EXP((B14-LN(F14)^B13)/10)	
16	Σ X^2=	=СУММ(E2:E11)			Дад=	=СУММ(G2:G11)/(10-2)	

Рис 1.6. Описание экспериментальной зависимости показательной функцией (формульный вид)

1.2.7. Матричный метод определения коэффициентов показательной зависимости

Исходные данные и результаты их обработки матричным методом показаны на рис.1.7.

Матрица x		Вектор y	Матрица x^T				
1	x_1	$\ln y_1$	1	1	1	...	1
1	x_2	$\ln y_2$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
1	x_3	$\ln y_3$					
...					
1	x_n	$\ln y_n$					
Матрица $x^T \cdot x$		Обратная матрица					
		$(x^T \cdot x)^{-1}$	$(x^T \cdot x)^{-1} \cdot (x^T \cdot y)$				
N	$\sum x_i$		$\sum \ln y_i$	A=			
$\sum x_i$	$\sum x_i^2$		$\sum x_i \cdot \ln y_i$	B=			
a=exp(A)		b=exp(B)					

Рис.1.7. Матричный метод определения коэффициентов показательной зависимости

Транспонирование матрицы x

- 1) выделить диапазон ячеек, в котором будет размещаться транспонированная матрица x^T .
- 2) вызвать мастер функций, из окна «Категории» выбрать ссылки и массивы, из окна «Функции» выбрать функцию ТРАНСП().

- 3) в окне функции ТРАНСП() в поле «аргумент» ввести диапазон исходной матрицы x .
- 4) установить курсор в «Панели формул» и нажать одновременно три клавиши Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матриц x^T и x

- 1) выделить блок ячеек, где будет размещаться матрица $(x^T \cdot x)$;
- 2) вызвать мастер функций, выбрать «Математические функции» и соответственно функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести аргументы этой функции: диапазон матрицы x^T и x ;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Обращение матрицы $(x^T \cdot x)$.

- 1) выделить диапазон ячеек, где будет размещаться обратная матрица $(x^T \cdot x)^{-1}$;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МОБР();
- 3) в окне МОБР() задать диапазон матрицы $x^T \cdot x$;
- 4) установить курсор в «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матрицы x^T и вектора y .

- 1) выделить блок ячеек, где будет располагаться вектор $(x^T \cdot y)$;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести ее аргументы: диапазон транспонированной матрицы x^T и диапазон вектора y ;

- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Получение решения, т.е. значений коэффициентов a и b .

- 1) выделить диапазон ячеек, где будут располагаться значения коэффициентов a и b ;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() в поле аргументы функции ввести диапазон обратной матрицы $(x^T \cdot x)^{-1}$ и вектора $(x^T \cdot y)$;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

1.2.8. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости экспоненциальной функцией МНК

Исходные данные и результаты их обработки методом наименьших квадратов показаны на рис.1.8, рис.1.9.

Экспериментальные значения X_i , Y_i записываются в диапазоны A2 :A11, B2:B11, соответственно. Формирование диапазона C2:C11 (lnYэксп) - в ячейку C2 записываем формулу =ln(B2) и копируем её до ячейки C11. Формирование столбца D2:D11 ($X \cdot \ln Y_{\text{эксп}}$) - в ячейку D2 записываем формулу =A2*C2 и копируем её до ячейки D11. Заполнение диапазона E2:E11 - в ячейку E2 записываем формулу =A2^2 и копируем её до ячейки E11. В ячейки B13, B14, B15, B16 записываем суммы, необходимые для расчета параметров A и B - =СУММ(A2:A11), =СУММ(C2:C11), =СУММ(D2:D11), =СУММ(E2:E11). В ячейку F14 вносим формулу, определяющую коэффициент B, в ячейку F15 - формулу для определения параметра A. Значения

функции, рассчитанные по аналитической формуле, оформляются в диапазоне F2:F11. В ячейку F2 записывается формула $=\$F\$15*\exp(\$F\$14*A2)$ и копируется до ячейки F11. Оформление диапазона G2:G11 (квадраты отклонений экспериментальных значений функций от теоретических, рассчитанных по аналитической формуле) - в ячейку G2 записываем формулу $=(B4-F4)^2$ и копируем её до ячейки G11. Дисперсия адекватности рассчитывается в ячейке F16.

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Yэксп	$\ln(Y_{\text{эксп}})$	$X*\ln(Y_{\text{эксп}})$	X^2	Yрасч	$(Y_{\text{эксп}}-Y_{\text{расч}})^2$
2	0,3	7,8	2,054	0,616	0,09	7,753	0,002
3	0,5	10,3	2,332	1,166	0,25	10,313	0,000
4	0,7	13,7	2,617	1,832	0,49	13,720	0,000
5	0,9	18,1	2,896	2,606	0,81	18,252	0,023
6	1,1	24,3	3,190	3,510	1,21	24,280	0,000
7	1,3	32,3	3,475	4,518	1,69	32,301	0,000
8	1,5	42,9	3,759	5,638	2,25	42,970	0,005
9	1,7	57,7	4,055	6,894	2,89	57,163	0,289
10	1,9	75,9	4,329	8,226	3,61	76,044	0,021
11	2,1	101	4,615	9,692	4,41	101,162	0,026
12							
13	$\sum X=$	12			вид зависимости $Y=A*\exp(B*X)$		
14	$\sum \ln(Y_{\text{эксп}})=$	33,3238			B=	1,43	
15	$\sum X*\ln(Y_{\text{эксп}})=$	44,6978			A=	5,05	
16	$\sum X^2=$	17,7			Дад.=	0,046	

Рис. 1.8. Описание экспериментальной зависимости экспоненциальной функцией (числовой вид)

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Yэксп	ln(Yэксп)	X*ln(Yэксп)	X^2	Yрасч	(Yэксп-Yрасч)^2
2	0,3	7,8	=LN(B2)	=A2*C2	=A2^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A2)	=(B2-F2)^2
3	=A2+0,2	10,3	=LN(B3)	=A3*C3	=A3^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A3)	=(B3-F3)^2
4	=A3+0,2	13,7	=LN(B4)	=A4*C4	=A4^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A4)	=(B4-F4)^2
5	=A4+0,2	18,1	=LN(B5)	=A5*C5	=A5^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A5)	=(B5-F5)^2
6	=A5+0,2	24,3	=LN(B6)	=A6*C6	=A6^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A6)	=(B6-F6)^2
7	=A6+0,2	32,3	=LN(B7)	=A7*C7	=A7^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A7)	=(B7-F7)^2
8	=A7+0,2	42,9	=LN(B8)	=A8*C8	=A8^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A8)	=(B8-F8)^2
9	=A8+0,2	57,7	=LN(B9)	=A9*C9	=A9^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A9)	=(B9-F9)^2
10	=A9+0,2	75,9	=LN(B10)	=A10*C10	=A10^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A10)	=(B10-F10)^2
11	=A10+0,2	101	=LN(B11)	=A11*C11	=A11^2	=SF\$15*EXP(SF\$14*A11)	=(B11-F11)^2
12							
13	ΣX=	=СУММ(A2:A11)					
14	Σ ln(Yэксп)=	=СУММ(C2:C11)			B=	=(B13*B14-10*B15)/(B13^2-10*B16)	
15	Σ X*ln(Yэксп)=	=СУММ(D2:D11)			A=	=EXP((B14-F14*B13)/10)	
16	Σ X^2=	=СУММ(E2:E11)			Дад. #	=СУММ(G2:G11)/10-2	

Рис.1.9. Описание экспериментальной зависимости экспоненциальной (формульный вид)

1.2.9. Матричный метод определения коэффициентов экспоненциальной зависимости

Исходные данные и результаты их обработки матричным методом показаны на рис. 1.10.

Матрица x		Вектор y	Матрица x^T			
1	x_1	$\ln y_1$	1	1	1	... 1
1	x_2	$\ln y_2$	x_1	x_2	x_3	... x_n
1	x_3	$\ln y_3$				
...				
1	x_n	$\ln y_n$				
Матрица $x^T \cdot x$		Обратная матрица	Вектор $x^T \cdot y$	Вектор		
		$(x^T \cdot x)^{-1}$		$(x^T \cdot x)^{-1} \cdot (x^T \cdot y)$		
N	$\sum x_i$		$\sum \ln y_i$	A=		
$\sum x_i$	$\sum x_i^2$		$\sum x_i \cdot \ln y_i$	B=		
a=exp(A)						

Рис. 1.10. Матричный метод определения коэффициентов экспоненциальной зависимости

Транспонирование матрицы x

- 1) выделить диапазон ячеек, в котором будет размещаться транспонированная матрица x^T .
- 2) вызвать мастер функций, из окна «Категории» выбрать ссылки и массивы, из окна «Функции» выбрать функцию ТРАНСП().
- 3) в окне функции ТРАНСП() в поле «аргумент» ввести диапазон исходной матрицы x .
- 4) установить курсор в «Панели формул» и нажать одновременно три клавиши Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матриц x^T и x

- 1) выделить блок ячеек, где будет размещаться матрица $(x^T \cdot x)$;
- 2) вызвать мастер функций, выбрать «Математические функции» и соответственно функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести аргументы этой функции: диапазон матрицы x^T и x ;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Обращение матрицы $(x^T \cdot x)$.

- 1) выделить диапазон ячеек, где будет размещаться обратная матрица $(x^T \cdot x)^{-1}$;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МОБР();
- 3) в окне МОБР() задать диапазон матрицы $x^T \cdot x$;
- 4) установить курсор в «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матрицы x^T и вектора y .

- 1) выделить блок ячеек, где будет располагаться вектор $(x^T \cdot y)$;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести ее аргументы: диапазон транспонированной матрицы x^T и диапазон вектора y ;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Получение решения, т.е. значений коэффициентов a и b .

- 1) выделить диапазон ячеек, где будут располагаться значения коэффициентов a и b ;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ();
- 3) в окне функции МУМНОЖ() в поле аргументы функции ввести диапазон обратной матрицы $(x^T \cdot x)^{-1}$ и вектора $(x^T \cdot y)$;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

1.2.10. Демонстрационный пример аппроксимации экспериментальной зависимости степенной функцией МНК.

Исходные данные и результаты их обработки методом наименьших квадратов показаны на рис.1.11, рис.1.12.

Экспериментальные значения X_i , Y_i записываются в диапазоны A2 :A11, B2:B11, соответственно. Формирование диапазона C2:C11 ($\ln(x)$) - в ячейку C2 записываем формулу =ln(A2) и копируем её до ячейки C11. Формирование столбца D2:D11 ($\ln Y_{\text{экс}}$) - в ячейку D2 записываем формулу ln(B2) копируем её до ячейки D11. Заполнение диапазона E2:E11 ($\ln X \cdot \ln Y_{\text{экс}}$) - в ячейку E2 записываем формулу =C2*D2 и копируем её до ячейки E11. Заполнение диапазона F2:F11 ($\ln X)^2$) - в ячейку F2 записываем формулу =C2^2 и копируем её до ячейки F11. В ячейки B13, B14, B15, B16 записываем суммы, необходимые для расчета параметров A и B - =СУММ(C2:C11), =СУММ(D2:D11), =СУММ(E2:E11), =СУММ(F2:F11). В ячейку G14 вносим формулу, определяющую коэффициент B, в ячейку G15 - формулу для определения параметра A. Значения функции, рассчитанные по аналитической формуле, оформляются в диапазоне G2:G11. В ячейку G2 записывается формула =\$G\$15*\$G\$14^A2 и копируется до ячейки G11.

Оформление диапазона Н2:Н11 (квадраты отклонений экспериментальных значений функций от теоретических, рассчитанных по аналитической формуле) - в ячейку Н2 записываем формулу =(В2-Г2)^2 и копируем её до ячейки Н11. Дисперсия адекватности рассчитывается в ячейке Г16.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1	X	Уэксп	ln x	ln(Уэксп)	lnX*ln(Уэксп)	(lnX)^2	Урасч	Уэксп-Урасч)^2
2	0,5	0,7	-0,693	-0,357	0,247	0,480	0,687	0,000
3	0,75	1,7	-0,288	0,531	-0,153	0,083	1,690	0,000
4	1	3,1	0,000	1,131	0,000	0,000	3,200	0,010
5	1,25	5,2	0,223	1,649	0,368	0,050	5,250	0,003
6	1,5	7,8	0,405	2,054	0,833	0,164	7,868	0,005
7	1,75	11,1	0,560	2,407	1,347	0,313	11,077	0,001
8	2	15	0,693	2,708	1,877	0,480	14,896	0,010
9	2,25	19,5	0,811	2,970	2,409	0,658	19,348	0,023
10	2,5	24,8	0,916	3,211	2,942	0,840	24,444	0,127
11	2,75	30,04	1,012	3,403	3,442	1,023	30,201	0,026
12								
13	Σ lnX=	3,639				Вид зависимости Y=A*X^B		
14	Σ ln(Уэксп)=	19,707				B=	2,22	
15	Σ lnX*ln(Уэксп)=	13,312				A=	3,20	
16	Σ (lnX)^2=	4,092				Дад.=	0,026	

Рис.1.11. Описание экспериментальной зависимости функций вида $Y=A \cdot X^B$ (числовой вид)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Yэксп	ln(X)	ln(Yэксп)	ln(X)*ln(Yэксп)	(lnX)^2	Yрасч	(Yэксп-Yрасч)^2
2	0,5	0,7	=LN(A2)	=LN(B2)	=C2*D2	=C2^2	=(\$G\$5*A2*\$G\$14)	=B2-G2)^2
3	=A2+0,25	1,7	=LN(A3)	=LN(B3)	=C3*D3	=C3^2	=(\$G\$5*A3*\$G\$14)	=B3-G3)^2
4	=A3+0,25	3,1	=LN(A4)	=LN(B4)	=C4*D4	=C4^2	=(\$G\$5*A4*\$G\$14)	=B4-G4)^2
5	=A4+0,25	5,2	=LN(A5)	=LN(B5)	=C5*D5	=C5^2	=(\$G\$5*A5*\$G\$14)	=B5-G5)^2
6	=A5+0,25	7,8	=LN(A6)	=LN(B6)	=C6*D6	=C6^2	=(\$G\$5*A6*\$G\$14)	=B6-G6)^2
7	=A6+0,25	11,1	=LN(A7)	=LN(B7)	=C7*D7	=C7^2	=(\$G\$5*A7*\$G\$14)	=B7-G7)^2
8	=A7+0,25	15	=LN(A8)	=LN(B8)	=C8*D8	=C8^2	=(\$G\$5*A8*\$G\$14)	=B8-G8)^2
9	=A8+0,25	19,5	=LN(A9)	=LN(B9)	=C9*D9	=C9^2	=(\$G\$5*A9*\$G\$14)	=B9-G9)^2
10	=A9+0,25	24,8	=LN(A10)	=LN(B10)	=C10*D10	=C10^2	=(\$G\$5*A10*\$G\$14)	=B10-G10)^2
11	=A10+0,25	30,04	=LN(A11)	=LN(B11)	=C11*D11	=C11^2	=(\$G\$5*A11*\$G\$14)	=B11-G11)^2
12								
13	$\sum \ln X =$	=СУММ(C2:C11)						
14	$\sum \ln(Y_{эксп}) =$	=СУММ(D2:D11)				B=	=(B13*B14-10^B15)/(B13^2-10^B16)	
15	$\sum \ln X * \ln(Y_{эксп}) =$	=СУММ(E2:E11)				A=	=EXP((B14-G14*B13)/10)	
16	$\sum (\ln X)^2 =$	=СУММ(F2:F11)				Дад.=	=СУММ(H2:H11)/(10-2)	

Рис.1.12. Описание экспериментальной зависимости функцией вида $Y=A * X^B$ (формульный вид)

1.2.11. Матричный метод определения коэффициентов степенной зависимости

Исходные данные и результаты их обработки матричным методом показаны на рис. 1.13.

Матрица x		Вектор y	Матрица x^T			
1	$\ln x_1$	$\ln y_1$	1	1	1	... 1
1	$\ln x_2$	$\ln y_2$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$... $\ln x_n$
1	$\ln x_3$	$\ln y_3$				
...				
1	$\ln x_n$	$\ln y_n$				
Матрица $x^T \cdot x$		Обратная матрица $(x^T \cdot x)^{-1}$	Вектор $x^T \cdot y$	Вектор $(x^T \cdot x)^{-1} \cdot (x^T \cdot y)$		
N	$\sum_{i=1}^N \ln x_i$		$\sum \ln y_i$	A=		
$\sum_{i=1}^N \ln x_i$	$\sum_{i=1}^N (\ln x_i)^2$		$\sum (\ln x_i) \cdot (\ln y_i)$	B=		
$a = \exp(A)$						

Рис.1.13. Матричный метод определения коэффициентов степенной зависимости .

Транспонирование матрицы x

- 1) выделить диапазон ячеек, в котором будет размещаться транспонированная матрица x^T .
- 2) вызвать мастер функций, из окна «Категории» выбрать ссылки и массивы, из окна «Функции» выбрать функцию ТРАНСП().
- 3) в окне функции ТРАНСП() в поле «аргумент» ввести диапазон исходной матрицы x .
- 4) установить курсор в «Панели формул» и нажать одновременно три клавиши Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матриц x^T и x

- 1) выделить блок ячеек, где будет размещаться матрица $(x^T \cdot x)$;

- 2) вызвать мастер функций, выбрать «Математические функции» и соответственно функцию МУМНОЖ());
- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести аргументы этой функции: диапазон матрицы x^T и x ;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Обращение матрицы ($x^T \cdot x$).

- 1) выделить диапазон ячеек, где будет размещаться обратная матрица $(x^T \cdot x)^{-1}$;
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МОБР());
- 3) в окне МОБР() задать диапазон матрицы ($x^T \cdot x$);
- 4) установить курсор в «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Перемножение матрицы x^T и вектора u .

- 1) выделить блок ячеек, где будет располагаться вектор ($x^T \cdot u$);
- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ());
- 3) в окне функции МУМНОЖ() ввести ее аргументы: диапазон транспонированной матрицы x^T и диапазон вектора u ;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

Получение решения, т.е. значений коэффициентов a и b .

- 1) выделить диапазон ячеек, где будут располагаться значения коэффициентов a и b ;

- 2) вызвать мастер функций, в окне «Категории» выбрать «Математические», в окне «Функции» выделить функцию МУМНОЖ());
- 3) в окне функции МУМНОЖ() в поле аргументы функции ввести диапазон обратной матрицы $(x^T \cdot x)^{-1}$ и вектора $(x^T \cdot y)$;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и одновременно нажать три клавиши: Shift + Ctrl + Enter.

ЗАДАНИЕ 4. По результатам экспериментальных исследований (табл. 1.14) построить график экспериментальной зависимости $Y=f(X)$, по виду графика выбрать аналитическую формулу для описания экспериментальной зависимости. Параметры выбранной аппроксимирующей зависимости (a и b) определить МНК и матричным методом. Оценить правомерность описания с помощью дисперсии адекватности.

Таблица 1.14

Экспериментальные значения X и Y

В/т	Экспериментальные значения X и Y										
1	X	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1
	Y	5,7	7,8	10,8	14,7	20,1	27,5	37,3	51,6	70,7	96,8
2	X	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1
	Y	4,7	6,6	9,4	13,1	18,4	25,9	36,1	51,2	71,9	101,1
3	X	0,2	0,35	0,5	0,65	0,80	0,95	1,10	1,25	1,40	1,55
	Y	4,3	5,7	7,6	10,2	13,6	18,3	24,7	32,9	44,1	59,1
4	X	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75
	Y	0,7	1,9	3,7	6,2	9,5	13,7	18,6	24,7	32,0	39,7
5	X	0,35	0,5	0,65	0,80	0,95	1,10	1,25	1,40	1,55	1,70

	Y	6,6	9,0	12	16,5	22,5	30,2	40,9	55,3	74,9	101,4
6	X	0,1	0,15	0,2	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
	Y	3,8	5,2	7,0	9,6	13	18	24,9	33,7	46,2	63,2
7	X	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
	Y	5,2	7,2	10	13,9	19,2	26,3	36,8	51,1	70,8	98,2
8	X	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1
	Y	3,2	4,5	6,3	8,9	12,4	17,6	24,8	34,8	49,1	69,1
9	X	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1
	Y	7,8	10,3	13,7	18,1	24,3	32,3	42,9	57,7	75,9	101
10	X	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
	Y	2,9	4,1	6,0	8,6	12,5	18,2	26,0	37,3	51,6	78,9
11	X	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75
	Y	0,3	1,0	2,3	4,6	8,0	12,7	19,0	27,4	38,1	50,5
12	X	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
	Y	58,4	34,9	27	23	20,8	19,1	17,9	17,1	16,2	15,9

Контроль по теме

- 1) В чем отличие интерполяции от аппроксимации функции?
- 2) Как выбирается аналитическое выражение для описания экспериментальной зависимости?
- 3) В чем заключается суть метода наименьших квадратов?
- 4) В чем заключается физический смысл дисперсии адекватности?
- 5) Какие методы используются для аппроксимации экспериментальных зависимостей?

2. Разработка математических моделей на основе полного факторного эксперимента.

В процессе решения практических задач моделирования, при создании как детерминированных, так и стохастических моделей, большую роль играют экспериментальные исследования. Так, при разработке детерминированных математических моделей, обычно представляемых в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений или в частных производных, для определения неизвестных констант, входящих в систему дифференциальных уравнений и проверки адекватности модели процесса, проводится эксперимент.

При разработке стохастических математических моделей проводится функциональное изучение объекта: в ходе эксперимента, фиксируют его входные и выходные параметры.

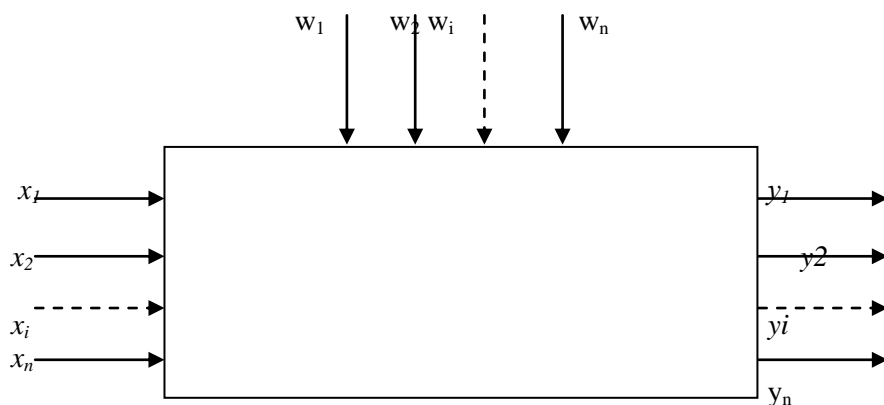


Рис. 2.1. Функциональная система объекта.

$x_1 \dots x_n$ - входные параметры объекта

$w_1 \dots w_n$ - неконтролируемые (случайные) параметры, "шум" объекта

$y_1 \dots y_n$ - выходные параметры.

Комплекс параметров $x_1 \dots x_n$ называют основным, он

определяет условия эксперимента.

В качестве выходных параметров рассматривают любой технологический или экономический показатель процесса.

В качестве случайных рассматриваются обычно параметры, которые по тем или иным причинам невозможно (или трудно) учесть.

Математической моделью (2.1) служит функция отклика, связывающая выходной параметр (параметр оптимизации), характеризующий результаты эксперимента, с переменными параметрами, которыми варьируют при проведении опытов:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

Принято называть независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n факторами, координатное пространство с координатами x_1, x_2, \dots, x_n факторным пространством, а геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве - поверхностью отклика.

При использовании статистических методов математическая модель чаще всего представляется в виде полинома - отрезка ряда Тейлора, в который разлагается неизвестная функция :

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^K \beta_j \cdot x_j + \sum_{u,j=1}^K \beta_{uj} \cdot x_u \cdot x_j + \sum \beta_{jj} \cdot x_j^2 + \dots, (2.2),$$

где

$$\beta_j = \frac{\partial y}{\partial x_j}; \beta_{uj} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_u \cdot \partial x_j}; \beta_{jj} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}$$

Поскольку в реальном процессе всегда существуют неуправляемые и неконтролируемые переменные, изменение y носит случайный характер, поэтому при обработке экспериментальных данных получают выборочные коэффициенты регрессии b_0, b_j, b_{uj}, b_{jj} , являющиеся оценками

теоретических коэффициентов $\beta_0, \beta_j, \beta_{ij}, \beta_{jj}$.

Уравнение регрессии, полученное на основании опыта, запишется следующим образом:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^K b_j \cdot x_j + \sum_{u,j=1}^K b_{uj} \cdot X_u \cdot X_j + \sum_{j=1}^K b_{jj} \cdot x_j^2 + \dots (2.3),$$

где K – количество факторов.

В силу названных выше причин, математическая модель (2.3) является стохастической. Коэффициент b_0 называют свободным членом уравнения регрессии, b_j – линейными эффектами, b_{ij} – эффектами парного взаимодействия, b_{jj} – квадратичными эффектами.

2.1. Элементы теории факторного эксперимента

Рассмотрим исследуемый объект с позиции "черного ящика", т.е. будем измерять векторы входа x и выхода y (рис.2.1), не принимая во внимание структуру системы. К измеряемым компонентам вектора $x = (x_1 \dots x_n)$, соответствующим возможным воздействиям на объект, предъявляются следующие требования: измеримость, независимость между собой (отсутствие корреляции), совместимость.

Условно факторы можно классифицировать:

а) по отношению к объекту - режимные и конструктивные;

б) по отношению к возможностям исследователя - активные и пассивные, иногда различают также количественные и качественные.

Режимные факторы определяют состояние объекта выбранной конструкции, в пищевых аппаратах к ним относятся: расход, температура, давление, концентрация и другие. Конструктивными могут быть размеры, число секций аппарата т.п.

К активным относятся факторы, значения которых могут

устанавливаться самим экспериментатором, например, расход сырья, пара и др.

Значения пассивных факторов не зависят от желания экспериментатора, он их только контролирует, например, температура и давление окружающего воздуха, состав первичного сырья и т.д.

В зависимости от состава этих факторов эксперимент называется активным или пассивным.

В дальнейшем будем рассматривать активный эксперимент.

Множество значений факторов X образуют, как говорилось выше, факторное пространство X . Если исследуются два фактора и оба фактора количественные, то пространство - плоскость, для трех факторов - трехмерное пространство.

Эксперимент, состоящий из N опытов, представляет собой множество точек в факторном пространстве, $X \{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N)}\}$

План эксперимента из N опытов должен содержать:

- а) координаты точек в факторном пространстве, соответствующие различным опытам
- б) число опытов в каждой точке
- в) иногда очередность проведения опытов.

К выходному параметру y предъявляются следующие требования:

- а) он должен соответствовать цели исследования
- б) быть количественным
- в) должен характеризовать состояние объекта.

Факторным называется эксперимент, при котором одновременно (от опыта к опыту) варьируют всеми факторами.

Перед экспериментом для каждого фактора X_i , задают перечень значений, которые он будет принимать в ходе проведения опытов, их называют уровнями варьирования. Обозначим число уровней варьирования i -го фактора через K_i . Например, X_1 - температура T изменяется от 10°C до 20°C через 5°C . В этом случае фактор X_1 , имеет уровни варьирования 10°C , 15°C , 20°C и $K_1=3$.

2.2. Полный факторный эксперимент

Полным факторным экспериментом (ПФЭ) называется такой эксперимент, при котором опыты ставятся для всех возможных комбинаций уровней факторов. Число опытов при ПФЭ определяется по формуле (без дублирования опытов в одной точке)

$$N = \prod_{i=1}^n K_i \quad (2.4)$$

или, если $K_1=K_2=\dots=K_n$ $N=K^n$,

где K - количество уровней, n - число факторов.

Выделим для дальнейшего рассмотрения 3 уровня:

- нулевой или базовый - центр области исследования

$$X^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)^T \quad (2.5)$$

$$\text{-нижний } X^H = (X_1^H, X_2^H, \dots, X_n^H)^T \quad (2.6)$$

$$\text{-верхний } X^B = (X_1^B, X_2^B, \dots, X_n^B)^T \quad (2.7)$$

Уровни факторов (нижний и верхний) представляют собой границы исследуемой области по данному технологическому параметру.

Например, изучается влияние на выход продукта (y , %) температуры (X_1), в диапазоне 100 - 200°C и давления (X_2) 2-6*10⁵Па. Верхний уровень по температуре $X_1^B = 200^\circ\text{C}$, нижний $X_1^H = 100^\circ\text{C}$, по давлению $X_2^B=6*10^5\text{Па}$, $X_2^H=2*10^5\text{Па}$.

Нулевой или базовый уровень для каждого фактора определится следующим образом

$$X_1^0 = \frac{X_1^B + X_1^H}{2}; \quad X_2^0 = \frac{X_2^B + X_2^H}{2} \quad (2.8)$$

Точка с координатами

$$X_i^0 = \frac{X_i^B + X_i^H}{2}; \quad i = 1, n \quad (2.9)$$

называется центром плана или основным уровнем.

Величина

$$\Delta X_i = \frac{X_i^B - X_i^H}{2} \quad (2.10)$$

является интервалом варьирования по каждому фактору.

Если в эксперименте берется $K=2$, т.е. каждый фактор может принимать значение только на нижнем или верхнем уровне, то, $N=2^n$ и сокращено такой ПФЭ обозначается " 2^n ". Рассмотрим подробнее план эксперимента " 2^n ".

Пусть $n=2$, тогда ПФЭ содержит четыре опыта в вершинах прямоугольника. План такого эксперимента записывается в виде таблицы (матрицы планирования), представленной в табл. 2.1

Таблица 2.1
Матрица планирования ПФЭ 2^2

№ опыта	Факторы		у
	X_1	X_2	
1	$X_1^{(1)}=X_1^{(H)}$	$X_2^{(1)}=X_2^{(H)}$	y_1
2	$X_1^{(2)}=X_1^{(B)}$	$X_2^{(2)}=X_2^{(H)}$	y_2
3	$X_1^{(3)}=X_1^{(H)}$	$X_2^{(3)}=X_2^{(B)}$	y_3
4	$X_1^{(4)}=X_1^{(B)}$	$X_2^{(4)}=X_2^{(B)}$	y_4

Для упрощения математических выкладок и более компактной формы записи в: планировании эксперимента переходят от входных переменных в натуральном масштабе X_i ,

$i=1,2,\dots,n$ к нормированным $X_i^0, i=1,2,\dots,n$.

Этот переход осуществляется по формулам:

$$X_i^0 = \frac{X_i^H - X_i^0}{\Delta X_i} = -1 \quad (2.11)$$

$$X_i^0 = \frac{X_i^0 - X_i^0}{\Delta X_i} = 0 \quad (2.12)$$

$$X_i^B = \frac{X_i^B - X_i^0}{\Delta X_i} = 1 \quad (2.13)$$

Таблица 2.2

Матрица планирования ПФЭ 2^2 в нормированном виде

№ опыта	Факторы			Выходной параметр
	X_0	X_1	X_2	
1	1	-1	-1	y_1
2	1	+1	-1	y_2
3	1	-1	+1	y_3
4	1	+1	+1	y_4

В данную матрицу дополнительно введен нулевой фиктивный фактор, который во всех опытах имеет значение +1, это позволяет оценивать все коэффициенты b_i , $i = \overline{1, n}$ уравнения регрессии $y = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_n X_n$ по общей формуле

Таблица 2.3

Матрица планирования для ПФЭ 2^3 в нормированном виде

№ опыта	Факторы				y
	X_0	X_1	X_2	X_3	
1	1	-1	-1	-1	y_1
2	1	+1	-1	-1	y_2
3	1	-1	+1	-1	y_3
4	1	+1	+1	-1	y_4

5	1	-1	-1	+1	y_5
6	1	+1	-1	+1	y_6
7	1	-1	+1	+1	y_7
8	1	+1	+1	+1	y_8

В общем случае матрица планирования ПФЭ 2^n составляется следующим образом:

а) в первом опыте все факторы X_i , $i=1,2, \dots, n$ устанавливаются на нижнем уровне (кроме X_0 , который всегда равен +1)

б) фактор X_1 изменяет свое значение (уровень) от опыта к опыту;

в) частота варьирования каждого последующего фактора относительно предыдущего (например, X_2 относительно X_1 , X_3 относительно X_2 и т.д.) уменьшается в два раза.

При введении нового фактора, т.е. при переходе ПФЭ 2^n к ПФЭ 2^{n+1} , новая матрица планирования может быть получена путем добавления к предыдущей матрице снизу еще такой же матрицы и одного столбца, все элементы верхней половины которого равны -1 , а нижней $+1$.

2.3. Свойства матрицы планирования

1. Скалярное произведение любых двух векторов столбцов равно нулю (свойство ортогональности).

$$\sum_{i=1}^N X_{ij}^0 \cdot X_{ik}^0 = 0, \quad (2.14),$$

где i - номер опыта, j, k - номер фактора; $j \neq k$;

2. Сумма элементов любого (кроме X_0) столбца матрицы равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^N X_{ij} = 0 \quad (2.15)$$

3. Сумма квадратов элементов любого столбца матрицы равна N (количеству опытов), т.е.

$$\sum_{i=1}^N X_{ij}^2 = N, \quad (2.16)$$

Это свойство нормирования.

Свойство ортогональности уменьшает трудности, связанные с расчетом коэффициентов уравнения регрессии.

2.4. Вывод коэффициентов уравнения регрессии МНК

Вывод рассмотрим на примере линейной модели с тремя факторами

$$y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \quad (2.17)$$

Для определения коэффициентов b_0, b_1, b_2, b_3 (вектора b) используется метод наименьших квадратов (МНК).

При использовании метода в качестве критерия степени приближения расчетных значений y , полученных по уравнению регрессии (2.17), к фактическим (экспериментальным) используется величина S , определяемая по формуле:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i^{\text{э}} - y_i)^2 \quad (2.18),$$

где N - число экспериментальных точек.

Наилучшими значениями коэффициентов аппроксимирующего уравнения будут те, для которых сумма квадратов отклонений экспериментальных значений $y_i^{\text{экс}}$ от аппроксимирующей кривой будет минимальной, т.е.

$$S = \sum_{i=1}^N \left[y_i - f \left(\overset{0}{X}_{i1}, \overset{0}{X}_{i2}, \overset{0}{X}_{i3}, b_0, b_1, b_2, b_3 \right) \right]^2 \rightarrow \min \quad (2.1)$$

9)

или

$$S = \sum_{i=1}^N \left(y_i - b_0 \overset{0}{X}_{i0} - b_1 \overset{0}{X}_{i1} - b_2 \overset{0}{X}_{i2} - b_3 \overset{0}{X}_{i3} \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.20)$$

Необходимым условием минимума S является выполнение условий:

$$\frac{\partial S}{\partial b_j} = 0 \quad j = \overline{0, N} \quad (2.21),$$

где N – число коэффициентов уравнения регрессии

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^N \left(y_i - b_0 \overset{0}{X}_{i0} - b_1 \overset{0}{X}_{i1} - b_2 \overset{0}{X}_{i2} - b_3 \overset{0}{X}_{i3} \right) \overset{0}{X}_{i0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^N \left(y_i - b_0 \overset{0}{X}_{i0} - b_1 \overset{0}{X}_{i1} - b_2 \overset{0}{X}_{i2} - b_3 \overset{0}{X}_{i3} \right) \overset{0}{X}_{i1} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b_2} = -2 \sum_{i=1}^N \left(y_i - b_0 \overset{0}{X}_{i0} - b_1 \overset{0}{X}_{i1} - b_2 \overset{0}{X}_{i2} - b_3 \overset{0}{X}_{i3} \right) \overset{0}{X}_{i2} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b_3} = -2 \sum_{i=1}^N \left(y_i - b_0 \overset{0}{X}_{i0} - b_1 \overset{0}{X}_{i1} - b_2 \overset{0}{X}_{i2} - b_3 \overset{0}{X}_{i3} \right) \overset{0}{X}_{i3} = 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_0 \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 + b_1 \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot X_{i1}^0 + b_2 \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot X_{i2}^0 + b_3 \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot X_{i3}^0 = \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot y_i \\
 b_0 \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot X_{i1}^0 + b_1 \sum_{i=1}^N X_{i1}^0 + b_2 \sum_{i=1}^N X_{i1}^0 \cdot X_{i2}^0 + b_3 \sum_{i=1}^N X_{i1}^0 \cdot X_{i3}^0 = \sum_{i=1}^N X_{i1}^0 \cdot y_i \\
 b_0 \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot X_{i2}^0 + b_1 \sum_{i=1}^N X_{i1}^0 \cdot X_{i2}^0 + b_2 \sum_{i=1}^N X_{i2}^0 + b_3 \sum_{i=1}^N X_{i2}^0 \cdot X_{i3}^0 = \sum_{i=1}^N X_{i2}^0 \cdot y_i \\
 b_0 \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot X_{i3}^0 + b_1 \sum_{i=1}^N X_{i1}^0 \cdot X_{i3}^0 + b_2 \sum_{i=1}^N X_{i2}^0 \cdot X_{i3}^0 + b_3 \sum_{i=1}^N X_{i3}^0 = \sum_{i=1}^N X_{i3}^0 \cdot y_i
 \end{array} \right.$$

(2.23)

С учетом свойств ортогональности и нормирования получаем систему уравнений и ее решение

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_0 N = \sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot y_i \\
 b_1 N = \sum_{i=1}^N X_{i1}^0 \cdot y_i \\
 b_2 N = \sum_{i=1}^N X_{i2}^0 \cdot y_i \\
 b_3 N = \sum_{i=1}^N X_{i3}^0 \cdot y_i
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 b_0 = \left(\sum_{i=1}^N X_{i0}^0 \cdot y_i \right) / N \\
 b_1 = \left(\sum_{i=1}^N X_{i1}^0 \cdot y_i \right) / N \\
 b_2 = \left(\sum_{i=1}^N X_{i2}^0 \cdot y_i \right) / N \\
 b_3 = \left(\sum_{i=1}^N X_{i3}^0 \cdot y_i \right) / N
 \end{array} \quad (2.24)$$

2.5. Матричный способ нахождения коэффициентов уравнения регрессии

В матричном виде систему нормальных уравнений (2.23) можно записать в виде

$$X^T \cdot X \cdot b = X^T \cdot Y \quad (2.25), \text{ где}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (2.26); \quad X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N X_{i0} \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^N X_{i1} \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^N X_{i2} \cdot y_i \\ \sum_{i=0}^N X_{i3} \cdot y_i \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Матрица коэффициентов системы нормальных уравнений $(X^T X)$ имеет вид:

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_{i0}^2 & \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{i1} & \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{i1} & \sum_{i=1}^N X_{i1}^2 & \sum_{i=1}^N X_{i1} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{i2} & \sum_{i=1}^N X_{i1} X_{i2} & \sum_{i=1}^N X_{i2}^2 \\ \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{i3} & \sum_{i=1}^N X_{i1} X_{i3} & \sum_{i=1}^N X_{i2} X_{i3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N X_{i0} X_{i3} \\ \sum_{i=0}^N X_{i1} X_{i3} \\ \sum_{i=0}^N X_{i2} X_{i3} \\ \sum_{i=0}^N X_{i3}^2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

С учетом свойств ортогональности и нормирования матрица коэффициентов $X^T X$ становится диагональной и ее

диагональные элементы равны числу опытов в матрице планирования

$$X^T X = \begin{vmatrix} N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Матрица $(X^T X)^{-1}$ обратная матрице $(X^T X)$, получается равной

$$(X^T X)^{-1} = \begin{vmatrix} 1/N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/N \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

Умножив систему (2.25) слева на обратную матрицу (2.30) получим решение:

:

$$b = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/N \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N X_{i0} y_i \\ \sum_{i=1}^N X_{i1} y_i \\ \sum_{i=1}^N X_{i2} y_i \\ \sum_{i=1}^N X_{i3} y_i \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

Следовательно, любой коэффициент уравнения регрессии b_j определяется скалярным произведением столбца y на соответствующий столбец x_j , деленным на число опытов в

матрице планирования N .

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{i0}^0 y_i}{N} \quad (2.32);$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{i1}^0 y_i}{N} \quad (2.33)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{i2}^0 y_i}{N} \quad (2.34);$$

$$b_3 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{i3}^0 y_i}{N} \quad (2.35)$$

где $N=8$ (ПФЭ 2^3)

Математическая модель представится в виде линейного уравнения регрессии в кодированном виде:

$$y = b_0 + b_1 X_1^0 + b_2 X_2^0 + b_3 X_3^0 \quad (2.36)$$

При учете взаимодействия факторов матрицу планирования необходимо расширить следующим образом:

Таблица 2.4
Расширенная матрица планирования ПФЭ 2^3

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	y
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	y_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Эффекты взаимодействия определяются аналогично линейным

эффектам:

$$b_{ik} = \frac{\sum_{\nu=1}^N X_i^{(\nu)} \cdot X_k^{(\nu)} \cdot y^{(\nu)}}{N}, \quad i \neq k \quad (2.37)$$

$$b_{ijk} = \frac{\sum_{\nu=1}^N X_i^{(\nu)} \cdot X_j^{(\nu)} \cdot X_k^{(\nu)} \cdot y^{(\nu)}}{N}, \quad k > i; k, i = \overline{1, n} \quad (2.38)$$

Переход от оценок коэффициентов в нормированном масштабе к оценкам в натуральном масштабе B_i (для линейной модели) производится по формулам:

$$B_i = \frac{b_i}{\Delta X_i} \quad (2.39);$$

$$B_0 = b_0 - \sum_{i=1}^N \frac{X_i^0}{\Delta X_i} \cdot b_i \quad (2.40)$$

Получить эти зависимости достаточно просто, для этого необходимо в уравнение регрессии в нормированном масштабе подставить выражение $\left(\frac{X_i - X_i^0}{\Delta X_i} \right)$ для каждого фактора.

Математическая модель в натуральном масштабе представится следующим образом:

$$y = B_0 + \sum_{i=1}^N B_i X_i + \sum_{i=1}^N B_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^N B_{ijk} X_i X_j X_k \quad (2.41)$$

2.6. Проверка коэффициентов уравнения регрессии на статистическую значимость по критерию Стьюдента

Коэффициент b_i считается статистически значимым, если его величина по модулю больше доверительного интервала, т.е. $|b_i| > t_\alpha \cdot S_{b_i}$, где t_α - коэффициент Стьюдента, определяемый из таблицы 2.6; S_{b_i} - погрешность в определении коэффициента b_i .

Погрешность S_{b_i} определяется по следующей зависимости:

$$S_{b_i} = \sqrt{S_{\text{воспр}}^2 \cdot C_{ij}} \quad (2.42),$$

где C_{ij} - диагональный элемент обратной матрицы $(X^T X)^{-1}$, т.е.

$$C_{ij} = 1/N \quad (2.43)$$

Дисперсия воспроизводимости $S_{\text{воспр}}^2$ определяется с учетом однородности дисперсий в каждом i -том опыте по формуле:

$$S_{\text{воспр}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (\bar{y}_i - y_{ij})^2}{N(m-1)} \quad (2.44)$$

где N - число опытов; \bar{y}_i - среднее значение выходного параметра в i -том опыте;

$\bar{y}_i = \sum y_{ij} / N$, y_{ij} - экспериментальное значение выходного параметра в j -том параллельном опыте; m - количество параллельных опытов.

Таким образом, для определения $S_{\text{воспр}}^2$ необходимо проводить параллельные опыты, обычно, достаточно двух опытов, т.е. $m = 2$.

Если $|b_i| < t_\alpha \cdot S_{b_i}$, то коэффициент считается незначимым и его исключают из уравнения регрессии, т.е. b_i принимается равным нулю.

Исключение из уравнения регрессии (2.17) незначимого коэффициента не скажется на остальных коэффициентах, так как они некоррелированы между собой. При этом выборочные коэффициенты b_j оказываются так называемыми несмешанными оценками для соответствующих генеральных коэффициентов (уравнение 2.2)

$$b_j \rightarrow \beta_j.$$

Величины коэффициентов уравнения регрессии характеризуют вклад каждого фактора в величину выходного параметра..

2.7. Проверка математической модели на адекватность

Проверку гипотезы об адекватности производят с использованием F - критерия Фишера, значение которого при $S_{ad}^2 > S_{воспр}^2$ определяется отношением

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_{воспр}^2} \quad (2.45)$$

где S_{ad}^2 - дисперсия адекватности (остаточная дисперсия),

$S_{воспр}^2$ - дисперсия воспроизводимости.

Остаточная дисперсия S_{ad}^2 характеризует рассеяние результатов наблюдений относительно уравнения регрессии и определяется по отношению:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{N - q} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_i^{(P)})^2 \quad (2.46)$$

где q – количество коэффициентов уравнения регрессии;

N – количество опытов;

$y_i^{(P)}$ - расчетные величины $y_i (i = \overline{1, N})$, полученные по уравнению регрессии;

\bar{y}_i - усредненные результаты наблюдений в параллельных опытах;

Дисперсия воспроизводимости $S_{воспр}^2$ определяется по формуле (2.44) и характеризует рассеяние результатов наблюдений относительно их среднего значения.

Величины $N-q$ и $N(m-1)$, стоящие в знаменателе выражений (2.46) и (2.44), называются числами степеней свободы соответствующих дисперсий и равны числу наблюдений N случайной величины y , уменьшенному на число дополнительных соотношений, используемых для расчета дисперсий.

Так, для расчета дисперсии адекватности $S_{ад}^2$ необходимо знать q значений коэффициентов регрессии, для нахождения которых используется система нормальных уравнений, включающая q уравнений. Число степеней свободы дисперсии адекватности $\nu_{ад} = N - q$.

При расчете дисперсии воспроизводимости $S_{воспр}^2$ необходимо определить выборочные дисперсии S_i^2 в каждом опыте:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad i = \overline{1, n} \quad (2.47).$$

Для расчета этих дисперсий требуется одно дополнительное соотношение

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_{ij} \quad (2.48),$$

определяющее значение \bar{y}_i в i -том опыте при m повторах,

поэтому число степеней свободы $\nu_i = m - 1$.

Дисперсия воспроизводимости $S_{воспр}^2$ определяется как сумма выборочных дисперсий S_i^2 , т.е.

$$S_{воспр}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2 \quad (2.49)$$

$$\text{или } S_{воспр}^2 = \frac{1}{N(m-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (2.50).$$

Число степеней свободы суммарной дисперсии воспроизводимости $S_{воспр}^2$ определяется выражением $\nu_{воспр} = N(m-1)$.

Критерий Фишера (2.45) показывает, во сколько раз уменьшается рассеяние относительно средней величины экспериментальных значений по сравнению с рассеянием относительно линии регрессии. Таким образом, чем больше значение критерия F , тем более адекватно уравнение регрессии описывает исходную совокупность данных.

При этом степень адекватности описания повышается с увеличением степени аппроксимирующего полинома (уравнения регрессии).

Оценка адекватности модели осуществляется сравнением расчетной величины критерия F с его табличным значением F_T , определяемым для заданного уровня значимости α и степеней свободы $\nu_{ад} = N - q$, $\nu_{воспр} = N(m-1)$ по таблицам F - распределения (табл. 2.7).

Уровень значимости α , обычно принимаемый равным 0,05, определяет вероятность P ($P=1-\alpha$), с которой можно считать достоверной принятую математическую модель.

При $F < F_T$ модель считается адекватной или

достоверной со степенью вероятности $P=95\%$, если $F > F_T$ - модель неадекватна. В последнем случае для получения адекватной модели необходимо предпринять один из следующих шагов:

1. Расширить матрицу планирования т.е. усложнить уравнение регрессии с последующим изменением системы нормальных уравнений и пересчетом коэффициентов модели.
2. Уменьшить степень вероятности P .
3. Изменить интервалы варьирования факторов.
4. Изменить состав факторов.
5. Изменить центр плана исследования, т.е. X_i^0

Необходимо знать, что анализ модели, предпринимаемые действия с целью получения адекватной модели являются компетенцией исследователя, знающего физическую суть изучаемого процесса, теорию планирования эксперимента, математическую обработку экспериментальных данных, основанную на классических методах статистики, регрессионного анализа, МНК.

Задание. Разработать математическую модель, определяющую влияние на выход продукта Y , факторов X_1, X_2, X_3 .

$X_1 = 1 \div 5$; $X_2 = 10 \div 20$; $X_3 = 4 \div 8$. Значения выходного параметра представлены в табл. 5.

Таблица 2.5

Значения выходного параметра

Вариант	1		2		3		4	
Выход	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i1}	Y_{i2}
№ опыта	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$

1	7,6	7	8,8	8,6	11	9	9,5	9,1
2	0,7	0,5	1,5	1,9	2,4	1,6	2,7	2,5
3	10,7	10,5	12	11,4	10	14	12,4	11,8
4	4,3	2,7	4,2	5,2	5,8	4,2	4,3	5,1
5	5,9	6,3	6,4	7,4	8	6	7,0	8,2
6	0,4	0,2	0,2	0,2	0,7	0,3	0,2	0,6
7	9,4	8,8	9,4	10,2	10,5	11,5	9,3	10,3
8	1,6	2,6	2,8	3,1	3,5	2,5		2,9
Вариант	5		6		7		8	
Выход	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{i1}	Y_{i2}
№ опыта	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$	$i = \overline{1,8}$
1	9,3	8,9	8,0	8,6	11,0	11,2	7,0	6,8
2	2,0	3,0	1,4	1,0	3,0	4,0		1,6
3	12,2	12,0	11,0	12,2	13,7	13,5	3,0	13,2
4	4,2	3,2	4,1	4,9	5,5	5,9	5,9	6,7
5	6,6	7,0	6,3	7,3	7,5	8,3	7,5	7,1
6	0,5	0,3	0,4	1,2	1,6	2,0	0,5	1,1
7	10	10,2	9,8	9,4	10	14	1,2	11,2
8	2,6	3,0	3,0	9,6	3,8	3,8	3,8	3,6

Порядок выполнения задания.

1. Определить уровни факторов (основной, верхний, нижний) и интервалы варьирования ΔX_i , $i=1,3$ для каждого фактора.
2. Представить математическую модель в виде линейной

множественной регрессии:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^B b_i X_i \quad (2.51)$$

3. Составить матрицу планирования в натуральном и кодированном видах, проверить правильность записи по свойствам.
4. Записать формулы для расчета коэффициентов уравнения регрессии.
5. Записать расчетные формулы для определения критериев Стьюдента и Фишера, определить их табличные значения по соответствующим распределениям (таблицы 2.6, 2.7)
6. Оформить таблицу в MS Excel, содержащую матрицу планирования, формулы для определения коэффициентов модели, дисперсий воспроизводимости и адекватности, критерия Фишера.
7. По полученным результатам оценить коэффициенты модели на статистическую значимость и сделать вывод об адекватности модели.
8. В случае неадекватности модели предложить и реализовать пути достижения адекватности.

Таблица 2.6

Квантили распределения Стьюдента

Число степеней свободы	Уровни значимости, α						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	636,62

2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,30	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,19	2,60	2,95	3,29	4,07

Таблица 2.7

Квантили распределения Фишера ($\alpha = 0,05$)

$V_{воспр}$	$V_{ад}$							
	1	2	3	4	5	6	12	24
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6

4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1

20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$V_{ад}$ - число степеней свободы дисперсии адекватности

$V_{воспр}$ - число степеней свободы дисперсии воспроизводимости

2.8. Разработка многофакторных математических моделей на основе пассивного эксперимента.

Математические модели, разрабатываемые на основе пассивного эксперимента, также как и модели, полученные на основе активного эксперимента, представляются в виде регрессионных зависимостей. В отличие от активного эксперимента пассивный сводится к наблюдению за объектом исследования и соответственно, измерению значений входных и выходного параметров.

После проведения эксперимента результаты наблюдений сводятся в таблицу (табл.2.8).

Таблица 2.8

Результаты наблюдений

факторы	входные				выходной	
№ опытов	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	y_{11}	y_{12}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	y_{21}	y_{22}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	y_{31}	y_{32}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	y_{41}	y_{42}
...

n	x _{n1}	x _{n2}	x _{n3}	x _{n4}	y _{n1}	y _{n2}
---	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Необходимо помнить, что для определения дисперсии воспроизводимости, а так же адекватности математической модели в каждом опыте нужно дублировать измерения выходного параметра (минимум 1 раз).

2.9. Вывод коэффициентов линейной множественной регрессии матричным методом.

Как указывалось выше, для описания изучаемого процесса первоначально выбирается уравнение линейной множественной регрессии.

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \quad (2.52))$$

где p - количество факторов.

Для N-го количества опытов можно записать систему уравнений (на примере четырех факторов):

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1x_{11} + a_2x_{12} + a_3x_{13} + a_4x_{14} \\ y_2 = a_0 + a_1x_{21} + a_2x_{22} + a_3x_{23} + a_4x_{24} \\ y_3 = a_0 + a_1x_{31} + a_2x_{32} + a_3x_{33} + a_4x_{34} \\ y_n = a_0 + a_1x_{n1} + a_2x_{n2} + a_3x_{n2} + a_4x_{n4} \end{cases} \quad (2.53)$$

В матричном виде система уравнений (2.53) запишется в виде:

$$x \cdot A = y, \quad (2.54)$$

$$\text{где } x = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_n \end{vmatrix}.$$

Определяем транспонированную матрицу

$$x^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{n2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{n3} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{n4} \end{vmatrix} \quad (2.55)$$

Умножим систему (2.54) слева на транспонированную матрицу x^T .

$$x^T \cdot x \cdot A = x^T \cdot y \quad (2.56)$$

где

$$x^T \cdot x = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_{i1} & \sum_{i=1}^N x_{i2} & \sum_{i=1}^N x_{i3} & \sum_{i=1}^N x_{i4} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1} \cdot x_{i2} & \sum x_{i1} \cdot x_{i3} & \sum x_{i1} \cdot x_{i4} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i2} \cdot x_{i1} & \sum x_{i2}^2 & \sum x_{i2} \cdot x_{i3} & \sum x_{i2} \cdot x_{i4} \\ \sum x_{i3} & \sum x_{i3} \cdot x_{i1} & \sum x_{i3} \cdot x_{i2} & \sum x_{i3}^2 & \sum x_{i3} \cdot x_{i4} \\ \sum x_{i4} & \sum x_{i4} \cdot x_{i1} & \sum x_{i4} \cdot x_{i2} & \sum x_{i4} \cdot x_{i3} & \sum x_{i4}^2 \end{vmatrix} \quad (2.57)$$

$$x^T \cdot y = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1} \cdot y_i \\ \sum x_{i2} \cdot y_i \\ \sum x_{i3} \cdot y_i \\ \sum x_{i4} \cdot y_i \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Определяем обратную матрицу $(x^T \cdot x)^{-1}$ и умножаем систему (2.56) слева на обратную матрицу

$$(x^T \cdot x)^{-1} \cdot (x^T \cdot x) \cdot A = (x^T \cdot x)^{-1} x^T \cdot y \quad (2.59)$$

Получаем решение системы (2.59):

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = (x^T \cdot x)^{-1} \cdot x^T \cdot y, \quad (2.60)$$

Реализация матричного метода решения линейной множественной регрессии в MS Excel. показана на рис. 2.3.

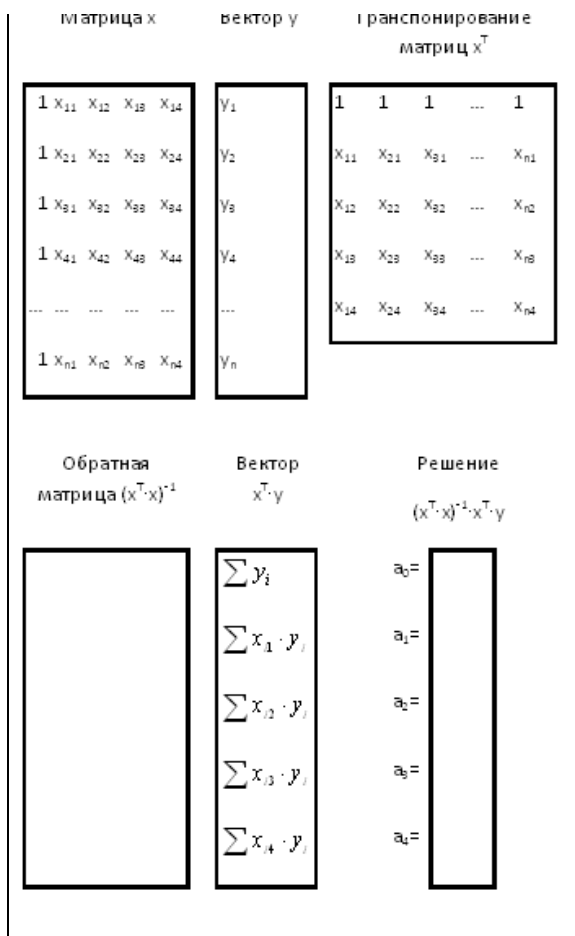


Рис.2.3. Реализация матричного метода решения линейной множественной регрессии в MS Excel (пассивный эксперимент)

Получение транспонированной матрицы x^T :

- 1) выделить диапазон ячеек, где будет помещена транспонированная матрица x^T ;

- 2) вызвать мастер функций, из окна «Категории» выбрать функцию ТРАНСП (), подтвердить выбор;
- 3) в окне функции ТРАНСП () курсор стоит в поле задания аргумента функции, выделить массив ячеек, где находится исходная матрица x;
- 4) установить курсор на «Панели формул» и нажать одновременно 3 клавиши: Shift+Ctrl+Enter.

Матричные функции (транспонирование, обращение, перемножение матриц) относятся к табличным формулам.

Механизм получения их идентичен. При выполнении этих функций, естественно, выбираются соответствующие им аргументы.

Проверка коэффициентов на статистическую значимость, а также оценка адекватности уравнения регрессии проводится по соответствующим критериям, которые описаны выше.

Задание.

Разработать математическую модель, определяющую вид зависимости между выходным параметром (y) и входными факторами ($x_1...x_n$).

Порядок выполнения задания.

1. Если решается реальная, конкретная задача, необходимо экспериментальными данными заполнить таблицу 3.1. Если экспериментальных данных нет, то результаты имитируются с помощью датчика случайных чисел, полученными значениями заполнить таблицу 2.8.
2. Для описания изучаемого процесса выбрать уравнение линейной множественной регрессии

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_i \quad (2.61)$$

3. Определить коэффициенты a_i , $i=0,p$, решив систему уравнений, составленную по экспериментальным данным, матричным методом в MS Excel.
4. Оценить коэффициенты на статистическую значимость, дополнив таблицу в MS Excel соответствующими формулами.
5. Определить расчетный критерий Фишера.
6. Проверить математическую модель на адекватность, в случае неадекватности предположить и реализовать путь достижения адекватности.

Контроль по теме

1. Классификация факторов по различным признакам.
2. Определение пассивного и активного эксперимента.
3. Определение полного факторного эксперимента.
4. Правила составления матрицы планирования эксперимента.
5. Свойства матрицы планирования.
6. Вывод коэффициентов математической модели.
7. Проверка коэффициентов модели на статистическую значимость.
8. Проверка математической модели на адекватность.
9. Пути достижения адекватности математической модели.

2.10. Проведение регрессионного анализа в модуле Multiple Regressions прикладной программы Statistica.

Одна из задач исследования качества вафельной продукции заключается в определении вида зависимости общего органолептического свойства от конкретных показателей качества, оцененных в баллах, и соотношения рисовой и гречневой муки в рецептуре. Математическая обработка экспериментальных данных проводилась в модуле Multiple Regression прикладной программы Statistica. Исходные данные представлены на рис.2.4.

	1	2	3	4	5	6
	рисовая:гречневая	вкус и запах	внешний вид	цвет	строение в изломе	общий балл
1	(10:90)	7	4	1	1	14
2	(20:80)	10	4	1	2	17
3	(30:70)	11	4	2	3	20
4	(40:60)	11	4	2	3	20
5	(50:50)	12	4	2	3	21
6	(60:40)	12	4	2	2	20
7	(70:30)	13	5	4	4	26
8	(80:20)	14	5	5	5	29
9	(90:10)	13	5	4	5	27

Рис.2.4. Исходные данные

В качестве зависимой переменной был определен общий балл, независимые переменные – соотношение рисовой и гречневой муки, вкус и запах, внешний вид, цвет, строение в изломе.

На рисунке 2.5. представлены результаты обработки данных модулем Multiple Regression, которые показывают, что из выбранных показателей статистически значимы вкус и запах, цвет и строение в изломе. Оценка регрессионной зависимости по достоверности производится по показателю коэффициента множественной корреляции ($\text{Multiple } R=0,99991559$), величина которого близка к единице, что означает практически идеальное описание экспериментальных данных множественной регрессией линейного вида.

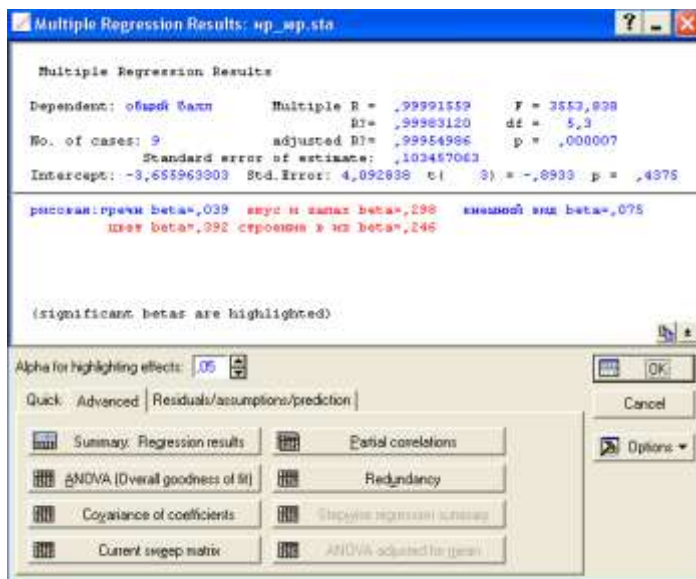


Рис.2.5. Окно модуля Multiple Regression с результатами обработки.

В верхней части окна приводятся наиболее важные параметры полученной регрессионной модели: *Multiple R* - коэффициент множественной корреляции; характеризует тесноту линейной связи между зависимой и всеми независимыми переменными. Может принимать значения от 0 до 1.

R²-коэффициент детерминации; численно выражает долю вариации зависимой переменной, объясненную с помощью регрессионного уравнения. Чем больше *R²*, тем большую долю вариации объясняют переменные, включенные в модель.

adjusted R² - скорректированный коэффициент детерминации. *adjusted R²* можно с большим успехом (по сравнению с *R²*) применять для выбора наилучшего подмножества независимых переменных в регрессионном уравнении.

F - F-критерий;

df - число степеней свободы для F-критерия; p - вероятность нулевой гипотезы для F-критерия;

Standard error of estimate - стандартная ошибка оценки (уравнения);

Intercept - свободный член уравнения;

Std.Error - стандартная ошибка свободного члена уравнения;

t - t -критерий для свободного члена уравнения;

p - вероятность нулевой гипотезы для свободного члена уравнения.

Beta - коэффициенты уравнения. Это стандартизированные регрессионные коэффициенты, рассчитанные по стандартизированным значениям переменных. По их величине можно сравнить и оценить значимость зависимых переменных, так как коэффициент показывает на сколько единиц стандартного отклонения изменится зависимая переменная при изменении на одно стандартное отклонение независимой переменной при условии постоянства остальных независимых переменных. Свободный член в таком уравнении равен 0. При помощи кнопок диалогового окна *Multiple Regressions Results* (рис. 2.5) результаты регрессионного анализа можно просмотреть более детально. Кнопка *Summary Regression results* позволяет просмотреть основные результаты регрессионного анализа (рис. 2.6.):

Regression Summary for Dependent Variable: общий балл (ир_юр.ста)						
R= ,99991559 R ² = ,99983120 Adjusted R ² = ,99954986						
F(5,3)=3553,8 p<,00001 Std.Error of estimate: ,10346						
N=9	Beta	Std. Err. of Beta	B	Std. Err. of B	t(3)	p-level
Intercept			-3,65596	4,092838	-0,89326	0,437533
рисовая;гречневая	0,038644	0,023392	0,06881	0,041651	1,65200	0,197102
вкус и запах	0,297686	0,024145	0,70183	0,056925	12,32909	0,001149
внешний вид	0,074787	0,027055	0,72936	0,263858	2,76421	0,069906
цвет	0,392496	0,035560	1,34404	0,121769	11,03763	0,001593
строение в изломе	0,246403	0,022945	0,88073	0,082015	10,73872	0,001727

Рис.2.6. Итоговая таблица регрессии

Пояснения параметров, изображенных на рис.2.6.

Beta – стандартизованные коэффициенты уравнения;
St. Err. of Beta - стандартные ошибки - *Beta* - коэффициентов;
B - коэффициенты уравнения регрессии;
St. Err. of B - стандартные ошибки коэффициентов уравнения регрессии;
t (3) - t-критерии для коэффициентов уравнения регрессии;
p-level - вероятность нулевой гипотезы для коэффициентов уравнения регрессии.

В диалоговом окне Multiple Regression Results указаны стандартизованные коэффициенты регрессии. Чтобы узнать, какие из независимых переменных дают больший вклад в предсказание предиктора, связанного с общим баллом, изучим регрессионные (или *B*) коэффициенты. Для этой цели воспользуемся данными, представленными в итоговой таблице регрессии (рис.2.6).

Эта таблица показывает стандартизованные (столбец *Beta*) и нестандартизованные регрессионные коэффициенты (столбец *B*). *Beta* -коэффициенты - это величины, которые получаются, если предварительно стандартизовать все переменные к среднему 0 и стандартному отклонению 1. В результате, величина *Beta* -коэффициентов позволяет сравнивать относительный вклад каждой независимой переменной в предсказание зависимой переменной. Как видно из таблицы результатов (рис.2.6), переменные, оценивающие вкус и запах, цвет и строение в изломе являются наиболее важными предикторами для общего балла, причем все они статистически значимы. Регрессионные коэффициенты для соотношения рисовой и гречневой муки и внешнего вида мало влияют на изменение общего показателя и статистически не значимы; тем не менее, поскольку они положительны, увеличение этих показателей способствует повышению общего балла оценки качества вафельной продукции.

Уравнение регрессии с нестандартизованными коэффициентами (столбец *B*) имеет следующий вид:

$$Y = -3,656 + 0,069X_1 + 0,702 X_2 + 0,729 X_3 + 1,344 X_4 + 0,881 X_5, (2.62)$$

где X_1 – соотношение рисовой и гречневой муки; X_2 – вкус и запах, оцененные в баллах; X_3 – внешний вид, оцененный в баллах; X_4 – цвет, оцененный в баллах; X_5 – строение в изломе, оцененное в баллах;

Для визуального представления регрессии использовали модуль Graphs, дающий возможность построить объемные графики в виде поверхностей, контурные графики в виде срезов поверхностей и распределение остатков относительно нормального закона распределения случайных величин. Адекватность регрессионных зависимостей в прикладной программе Statistica оценивается по распределению остатков относительно нормального закона распределения, построенного в полулогарифмических координатах. Остатки – это разности между наблюдаемыми (экспериментальными) значениями зависимого параметра и предсказанными, т.е. рассчитанными по уравнению регрессии.

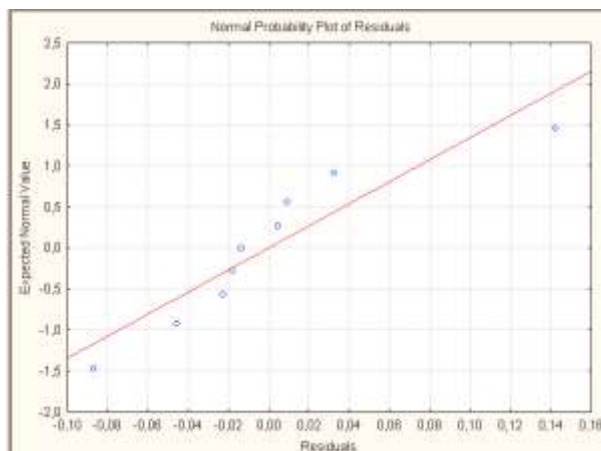


Рис.2.7. Распределение остатков зависимой переменной (общего балла) относительно нормального закона распределения.

Как видно из рисунка 2.7., остатки хаотично разбросаны относительно линии нормального закона распределения, т.е. между ними нет закономерной корреляционной связи, другими словами, они подчиняются нормальному закону распределения случайных величин. Это дает основание сделать вывод об адекватности регрессии. Согласно общепринятому правилу, для технологических процессов достаточна оценка регрессионных моделей с вероятностью 95%. Это считается высокой степенью приближения к реальному процессу, в нашем случае, связи общего балла с выбранными показателями качества вафель.

На рис.2.8. показана зависимость общего балла от соотношения рисовой и гречневой муки и строения в изломе. Следует отметить, что зависимости в виде поверхностей необходимы для визуального представления математических выкладок, в данном случае регрессионной зависимости, а также для эстетического восприятия, что является немаловажным моментом результатов исследований.

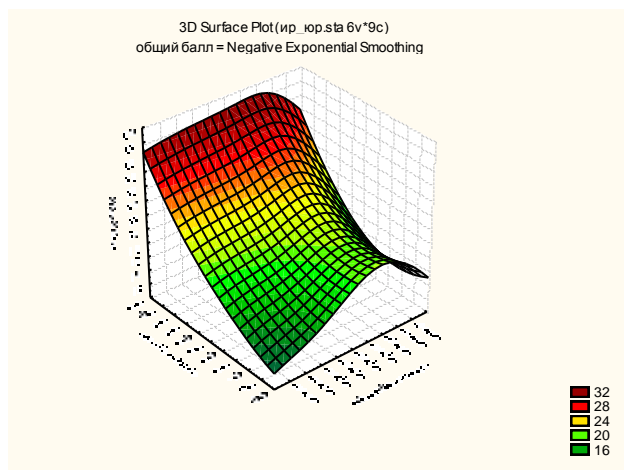


Рис. 2.8. Зависимость общего балла от соотношения рисовой и гречневой муки и строения в изломе

Для более полного графического анализа качества вафель построены контурные графики, представляющие собой расположенные на плоскости линии равного уровня, полученные при расщеплении трехмерной фигуры рядом секущих плоскостей. На рис.2.9. показан один из таких графиков.

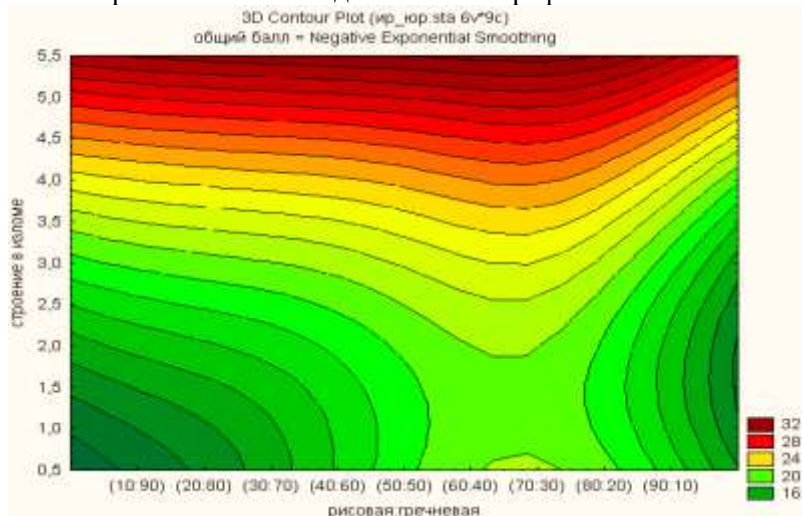


Рис. 2.9. Контурный график зависимости общего балла от соотношения рисовой и гречневой муки и строения в изломе

Контурные графики более четко и понятно интерпретируют объемные в виде поверхностей. Здесь можно проследить изменение зависимого параметра (общего балла) от выбранных, независимых переменных. Например, при соотношении рисовой и гречневой муки 80:20 и строении в изломе, оцененным 5-ю баллами, общий балл достигает, примерно, 29 единиц, что соответствует оптимально выбранной рецептуре вафельной композиции.

3. Разработка математических моделей в виде корреляционных функций.

При построении модели экспериментально-статистическим методом независимые переменные (факторы) X_1, X_2, \dots, X_k измеряются в процессе опыта и, как правило, имеют случайный характер, т.е. являются случайными величинами. Математическая модель в этом случае классифицируется как стохастическая. Отметим, что достоинством стохастических моделей является относительная простота их получения в результате статистической обработки экспериментальных данных, а недостаток заключается в неопределенности предсказания, особенно за пределами наблюдений.

В большинстве реальных задач переменные X_1, X_2, \dots, X_k носят случайный характер. В качестве примера можно привести: состав сырья, получаемого от различных поставщиков, концентрацию компонентов смеси в различных точках объекта и т.д. Кстати, последний пример является показательным, поскольку процесс смешения используется во многих технологических процессах пищевой промышленности: в хлебопекарном производстве - при изготовлении хлебулочных изделий с добавками, кондитерских изделий; витаминизации пищевых продуктов; в молочном производстве - при изготовлении мороженого и т.д. Следует отметить, что при изучении технологических процессов представление математической модели в виде поверхности отклика $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ является недостаточным, так как процесс должен быть изучен в динамике и оценен с точки зрения стабильности или однородности в течение определенного промежутка времени.

Поэтому в данной работе предлагается исследовать процесс именно с этой позиции. Математическая модель процесса в этом случае представляется в виде корреляционной функции, являющейся моделью вероятностного типа, позволяющей анализировать стохастическую связь параметров

случайного процесса в различных сечениях его реализации и оценивать стабильность или однородность изучаемого процесса.

3.1. Основные сведения о случайных процессах и их характеристиках

На практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, непрерывно изменяющимися в процессе опыта. Например, любые контролируемые параметры технологических процессов (температура, давление, расход сырья, концентрация компонентов и др.) изменяются во времени случайным образом и, следовательно, являются случайными величинами. За время наблюдения случайный процесс принимает тот или иной конкретный вид, заранее неизвестный, называемый реализацией случайного процесса. Если проведём серию наблюдений, то получим группу или "семейство" реализации случайного процесса. Случайный процесс можно рассматривать как систему, состоящую из бесконечного множества случайных величин.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, заранее неизвестно какое именно.

Различают стационарные (рис. 3.1) и нестационарные (рис. 3.2.) случайные процессы.

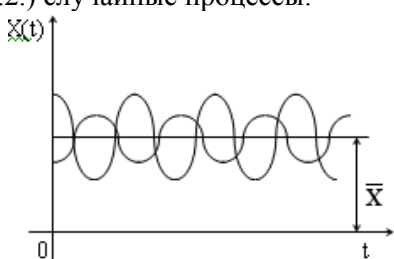


Рис. 3.1. Стационарный случайный процесс

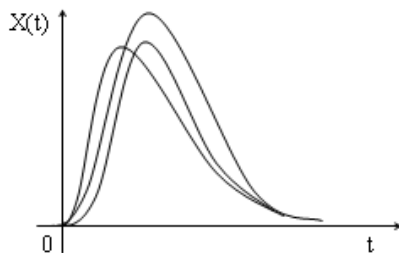


Рис.3.2.Нестационарный случайный процесс.

Стационарные случайные процессы протекают во времени однородно и имеют вид случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения \bar{X} , причем, ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени (рис. 3.1). Исследуя стационарный процесс на любом участке времени, получают одни и те же характеристики.

Нестационарные случайные процессы имеют определенную тенденцию развития во времени, характеристики такого процесса зависят от начала отсчета (рис. 3.2).

Количественно случайный процесс описывается случайной функцией времени $X(t)$, значения которой в любые моменты времени являются случайными величинами. Результаты различных наблюдений одного и того же случайного процесса будут определяться различными реализациями случайной функции (рис.3.3).

В отличие от характеристик случайных величин характеристики случайных функций не числа, а функции.

Характеристики случайных процессов дают количественные представления о важнейших свойствах этих процессов.

Одной из основных характеристик случайной функции является её математическое ожидание $M[X(t)]$:

$$M[X(t)] = M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)P(X,t)dx \cong \bar{X}(t) \quad (3.1)$$

где $P(X,t)$ - дифференциальная функция распределения X по времени t .

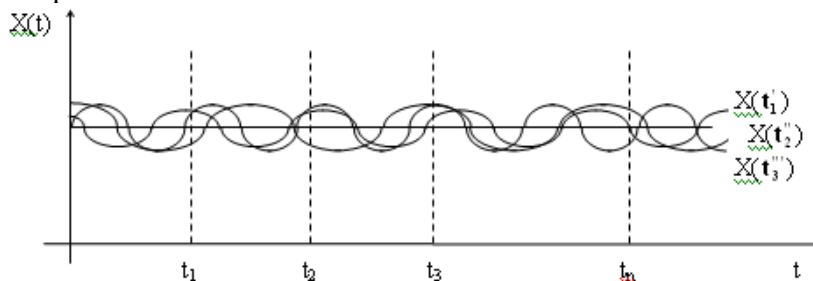


Рис 3.3. Реализации случайной функции

Математическое ожидание случайной функции - это неслучайная средняя функция $M[X(t)]$ вокруг которой группируются различные реализации случайной функции.

Дисперсия случайной функции - это неслучайная функция $\sigma_X^2(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующих сечений случайной функции. Дисперсия случайной функции характеризует разброс возможных реализаций случайного процесса вокруг средней реализации $M[X(t)]$

$$\sigma_X^2(t) = M\left\{[X(t) - M_X(t)]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\{X(t) - M_X(t)\}^2 \right] * P(X, t) dx \quad (3.2)$$

Корень квадратный из дисперсии случайной функции есть среднеквадратическое отклонение случайной функции.

Следует отметить, что дисперсия случайной функции не позволяет в полной мере характеризовать "случайность" реализации случайной функции.

Возможны различные типы случайных функций, имеющие одинаковые математические ожидания $M[X(t)]$ и дисперсии $\sigma_X^2(t)$, но реализация одних случайных функций будет иметь плавные изменения во времени, реализация других случайных функций будет носить хаотический характер колебаний во времени. Для описания внутренней структуры случайной функции используется специальная характеристика, которая называется корреляционной (автокорреляционной). Корреляционная функция определяет степень зависимости между сечениями случайной функции для разных сечений t .

Для пары сечений t_1 и t_2 корреляционная функция равна корреляционному моменту соответствующих значений случайной функции. Корреляционный момент равен математическому ожиданию произведений случайных величин

$X(t_1)$ и $X(t_2)$, предварительно центрированных относительно математических ожиданий $\bar{X}(t_1)$ и $\bar{X}(t_2)$.

$$K_x(t_1, t_2) = M\left\{\left(X(t_1) - \bar{X}(t_1)\right)\left(X(t_2) - \bar{X}(t_2)\right)\right\} \quad (3.3)$$

Корреляционная функция является мерой связи между случайными значениями $X(t_1)$ и $X(t_2)$, поэтому её используют для того, чтобы оценить, в какой мере процесс сохраняет свое значение с течением времени. Она показывает, в какой мере будущее значение случайной функции зависит от её значения в настоящее время, т.е. корреляционная функция является вероятностной характеристикой процесса.

3.2. Стационарный случайный процесс и некоторые его свойства.

Как уже отмечалось, стационарные случайные процессы отличаются однородностью, т.е. имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения (рис. 3.1). В качестве примеров стационарных случайных процессов можно привести следующие:

- а) в пищевой промышленности - колебания в дозировании компонентов для получения пищевых продуктов;
- б) колебания напряжения в электрической осветительной сети;
- в) случайные шумы в радиоприемнике и т.д.

Многие реальные процессы можно считать в большей или меньшей степени приближением к стационарным.

Стационарные случайные процессы очень часто встречаются в физических и технических задачах. По своей природе эти процессы проще, чем нестационарные, и описываются более простыми характеристиками.

Для стационарного процесса распределение случайных величин для каждого сечения t постоянно. Поэтому его вероятностные характеристики постоянны и не зависят от времени протекания процесса:

а) математическое ожидание

$$M_X(t) = M_X = \text{const} \quad (3.4)$$

б) дисперсия

$$\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2 = \text{const} \quad (3.5)$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса зависит только от промежутка времени между сечениями $\tau = t_2 - t_1$, и не зависит от положения аргументов t_1 и t_2

$$K_X(t, t + \tau) = K_X(\tau) \quad (3.6).$$

Следовательно, корреляционная функция стационарного случайного процесса есть функция не двух, а одного аргумента. Это обстоятельство значительно упрощает операции над стационарными случайными функциями.

Корреляционная функция симметрична относительно оси координат, она не изменяет своего значения при перестановке аргументов, т.е.

$$K_X(t_1 - t_2) = K_X(t_2 - t_1) \quad \text{или} \quad K_X(\tau) = K_X(-\tau) \quad (3.7)$$

Для упрощения расчетов часто вместо корреляционной функции используют нормированную корреляционную функцию $R_X(t_1, t_2)$

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} \quad (3.8),$$

которая является коэффициентом корреляции случайных величин в сечениях t_1 и t_2 . Для стационарных центрированных функций

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} = \frac{K_x(\tau)}{\sigma^2 X} \quad (3.9).$$

Нормированная функция корреляции - функция безразмерная. Она может принимать значения в пределах [-1, +1] и в зависимости от характера процесса имеет различный вид. Если функция корреляции равна 1, то это говорит о полном совпадении или прямой пропорциональности мгновенных значений двух рассматриваемых сечений. Если функция корреляции при каких-либо значениях аргумента имеет отрицательное значение, это говорит о том, что положительное отклонение процесса в одном сечении соответствует преимущественно отрицательному отклонению в другом.

подавляющая часть случайных процессов обладает эргодическим свойством.

Суть его заключается в том, что вероятностные характеристики стационарного процесса, полученные на ансамбле реализаций в каком-либо сечении t , равны с вероятностью, близкой к единице, аналогичным характеристикам, полученным при одной единственной реализации процесса путем усреднения по времени за достаточно большой промежуток.

Поясним определение эргодичности процесса.

Для получения вероятностных характеристик стационарного случайного процесса необходимо получить несколько его реализаций (рис.3.3). Математическая обработка их достаточно трудоемка. Естественно предположить, поскольку случайный стационарный процесс протекает однородно по времени, что одна единственная реализация достаточной продолжительности может служить достаточным материалом для получения характеристик случайной функции. Таким образом, одна реализация достаточной продолжительности T (рис.3.4) может заменить при обработке множество реализаций такой же продолжительности.

Вероятностные характеристики этой реализации (математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция) приблизительно (с вероятностью близкой единице) равны аналогичным характеристикам стационарного процесса, представленным множеством его реализаций. Их приближенное значение определяют путем осреднения значений единственной реализации по оси абсцисс (t).

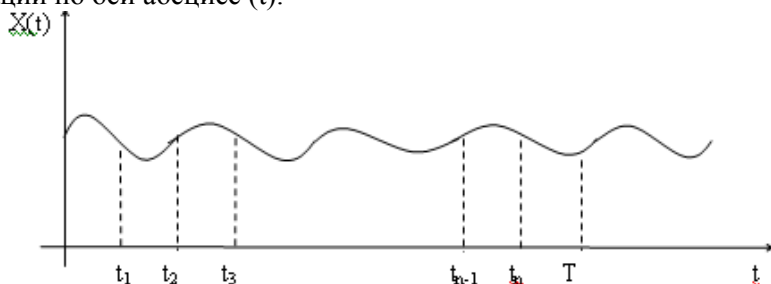


Рис.3.4. Реализация случайной функции

О наличии эргодического свойства стационарного процесса можно судить по виду его корреляционной функции. Корреляционная функция эргодического процесса при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к нулю, неэргодического - к постоянной величине (рис.3.5).

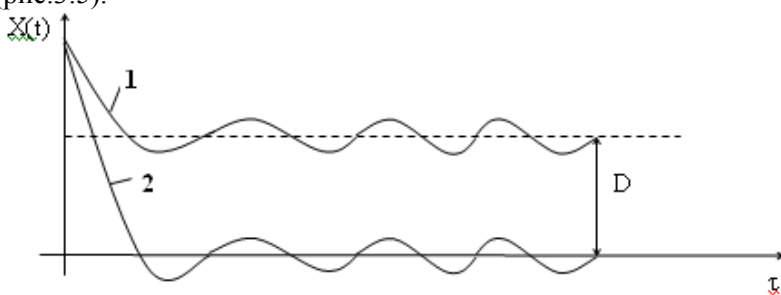


Рис.3.5. 1 – корреляционная функция неэргодического процесса;
2 - корреляционная функция эргодического процесса.

Корреляционная функция является важнейшей характеристикой случайной функции. Она показывает, как быстро затухают колебания во времени. По сути, корреляционная функция равна среднему значению парных произведений соответствующих отклонений значений функций $X(t)$ от математического ожидания:

$X(t_1) = X(t_1) - \bar{X}(t)$ и $X(t_2) = X(t_2) - \bar{X}(t)$, взятых в любые два момента времени протекания процесса и отстоящих друг от друга по промежутку времени $\tau = t_2 - t_1$.

Для случайной функции, плавно изменяющейся во времени (рис.3.6), корреляционная функция убывает медленно. Между сечениями с ростом интервала $\tau = t_2 - t_1$, связь значений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ сохраняется (рис. 3.7).

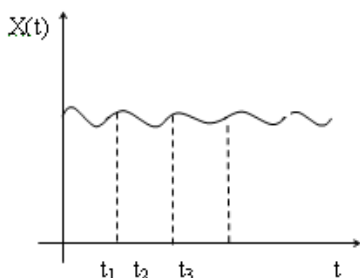


Рис.3.6.

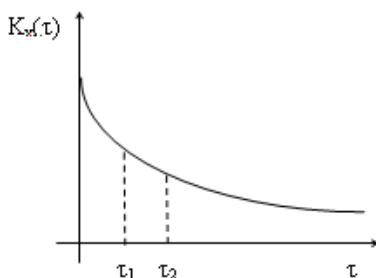


Рис.3.7.

Для случайной функции, подверженной частым и резким изменениям (рис.3.8), эта связь быстро сходит на нет (рис.3.9)

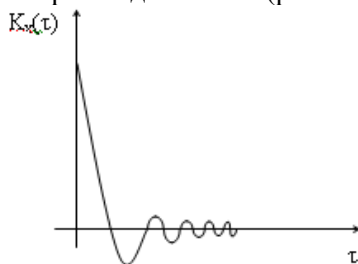
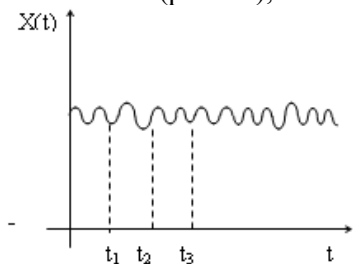


Рис.3.8.

Рис.3.9.

Так как степень затухания функции корреляции с увеличением интервала τ зависит от скорости, с которой в среднем протекает процесс, то по характеру функции корреляции судят о скорости протекания процесса (в данном случае понимается не скорость протекания физического процесса в технологической операции, а скорость случайного процесса изменения параметра X).

Таким образом, корреляционная функция может являться характеристикой степени стабильности изучаемого процесса. Чем стабильнее (однороднее) стационарный процесс во времени по своим свойствам (рис. 3-6), тем медленнее спад корреляционной функции (рис.3.7). Количественная характеристика стабильности потока будет рассмотрена ниже.

При $t_1 = t_2$ корреляционная функция превращается в дисперсию случайной функции

$$K_x(t_1, t_2) = \sigma_x^2(t) \quad (3.10)$$

Следовательно, корреляционная функция несет значительно больше информации о процессе, чем дисперсия, так как последняя является её частным случаем.

3.3. Экспериментальное определение характеристик эргодического стационарного процесса.

При изучении случайного стационарного процесса получают его реализацию за время T (рис. 3.10)

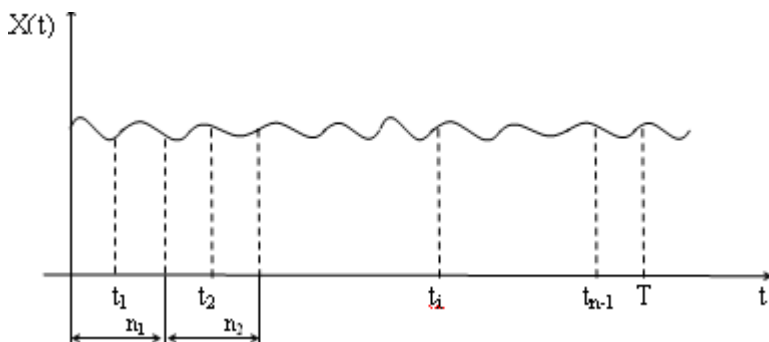


Рис.3.10. Случайный стационарный процесс

Интервал реализации процесса T разбивается на несколько равновеликих интервалов. Серединам этих интервалов будет соответствовать время t_1, t_2, \dots, t_n . Каждому t_i соответствует определенное значение случайной функции $X(t_i)$. Интервалы между сечениями выбираются в первом приближении таким образом, чтобы на этом участке реализации случайная функция $X(t)$ была близка к прямой.

Оценка математического ожидания случайной функции определяется как среднеарифметическое значение функций в интервалах t_i

$$\bar{X}(t) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(t_i) \quad (3.11)$$

Для облегчения последующих расчетов следует центрировать значения функции

$$X'(t_i) = X(t_i) - \bar{X} \quad (3.12)$$

Значения автокорреляционной функции для разных интервалов $\tau = m \frac{T}{n}$ вычисляются по формуле

$$K(\tau) = K\left(m \frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} X'(t_i) X'(t_{i+m}) \quad (3.13),$$

где m - количество значений автокорреляционной функции. Расчет ведется для каждой точки $m = 0, 1, 2, \dots$. Максимальную величину m выбирают такую, при которой $K(\tau)$ близко к нулю или совершает вокруг него небольшие колебания. Последнее объясняется тем, что по мере увеличения расстояния между сечениями τ возрастают погрешности и $K_x(\tau)$ приобретает случайный характер. Для сравнительного анализа случайных процессов автокорреляционную функцию нормируют.

Строится график нормированной автокорреляционной функции и производится ее аппроксимация после выбора типовой корреляционной функции.

Производится анализ случайного стационарного процесса с точки зрения стабильности (однородности) по полученным характеристикам.

3.4. Алгоритм обработки случайного стационарного процесса.

Алгоритм обработки случайного стационарного процесса представлен в виде блок-схемы на рис. 3.11.

Обозначения переменных:

N – количество значений случайной функции;

M – количество значений нормированной корреляционной функции;

$X(I)$ – i -ое значение случайной функции;

$X1(I)$ – i -тое значение центрированной случайной функции;

XS – среднее арифметическое значение;

D – дисперсия;

$D1$ – среднеквадратическое отклонение;
 K – коэффициент вариации;
 $Y1(I)$ – i -тое значение корреляционной функции;
 $Y(I)$ – i -тое значение нормированной корреляционной функции.

Примечание: в случае отсутствия экспериментальных значений случайной функции $X(t)$ (последовательность $X [1; N]$) получить с помощью датчика случайных чисел.

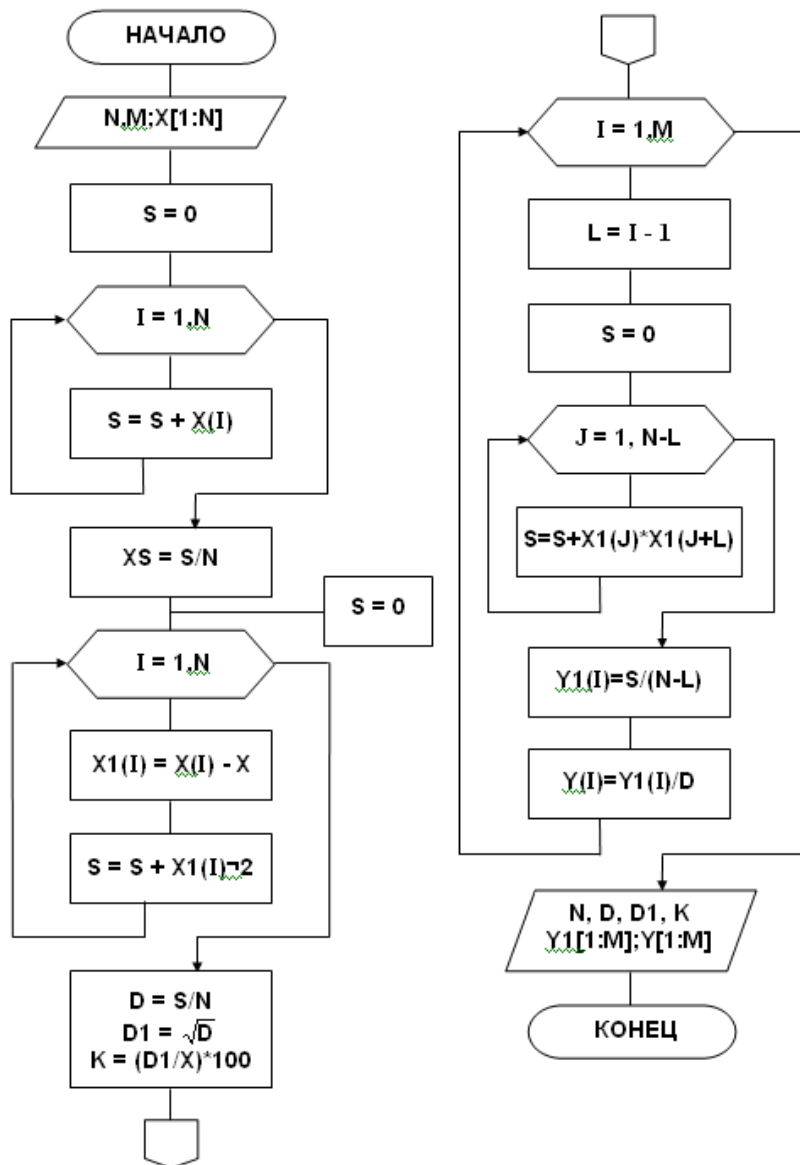


Рис.3.11. Алгоритм обработки случайного стационарного процесса

3.5. Выбор математической зависимости для описания корреляционной функции.

Принятое выражение для аппроксимации корреляционной функции должно удовлетворить её общим свойствам и отображать характерные свойства полученной зависимости. Большая точность приближения к рассчитанным значениям $K_x(\tau)$ не только не нужна для решения практических задач, но во многих случаях вредна, так как воспроизведение полученных в результате неточности замеров всех зигзагов $K(\tau)$ может внести искажение и усложнит решение задачи.

При аппроксимации полученной кривой корреляционной функции нужно исходить, во-первых, из общих теоретических предпосылок возникновения случайного процесса. Если теоретические предпосылки неизвестны, нужно обратить внимание на общий характер корреляционной функции и сравнить ее с типовыми кривыми.

Наиболее типовые корреляционные функции, позволяющие аппроксимировать широкий класс случайных процессов, представлены на рис.3.12.

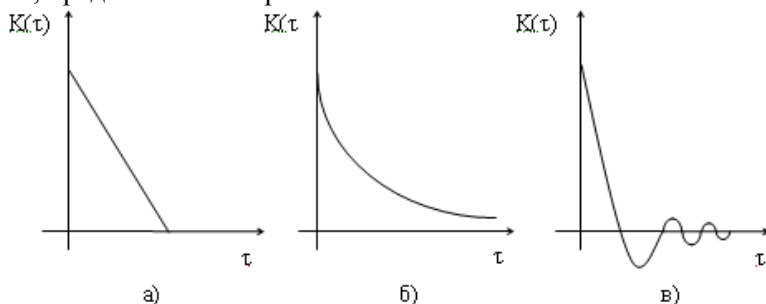


Рис.3.12. Типовые корреляционные функции

а) $K_x(\tau) = \sigma_x^2 * (1 - |\tau|\alpha)$;

б) $K_x(\tau) = \sigma_x^2 * e^{-\alpha|\tau|}$;

в) $K_x(\tau) = \sigma_x^2 * e^{-\alpha|\tau|} * \cos(\beta\tau)$.

Коэффициент α является информативным параметром, характеризующим степень стабильности (однородности) изучаемого случайного процесса.

При уменьшении α корреляционная функция убывает медленнее и, следовательно, характер изменения случайной функции более плавный, т.е. процесс более стабильный (однородный). При увеличении α корреляционная функция убывает быстрее и характер колебаний случайной функции более резкий и беспорядочный, т.е. процесс не отличается стабильностью.

Поведение функции $K_x(\tau) = \sigma_x^2 * e^{-\alpha|\tau|} * \cos(\beta\tau)$ зависит от соотношения параметров α и β , т.е. от того, что преобладает в корреляционной функции: убывание по экспоненциальному закону $e^{-\alpha|\tau|}$ или колебание по закону $\cos(\beta\tau)$. Очевидно, при сравнительно малых α преобладает убывание, при сравнительно больших - колебание.

ЗАДАНИЕ: Исследуется процесс распределения компонентов смеси по объему аппарата (например, микродобавок витаминов в муке). Распределение носит случайный характер. Косвенную оценку этого процесса можно дать с помощью измерения концентрации одного из компонентов смеси в течение времени T (время реализации процесса). Представляя концентрации в виде последовательности значений случайного стационарного процесса, определить:

- 1) статистические характеристики этого процесса (среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации);
- 2) нормированную корреляционную функцию процесса;
- 4) аппроксимировать нормированную корреляционную функцию процесса
- 4) проанализировать результаты обработки случайного стационарного процесса.

Порядок выполнения задания

1) При наличии экспериментальных данных необходимо выполнить пункты 1-4.

При отсутствии таковых с помощью датчика случайных чисел получить N значений случайной функции $X(t)$ в интервале $[a;b]$, имитирующих распределение компонентов смеси по объему аппарата.

2) По предложенной блок-схеме (рис.3.11) составить программу на VBA, определяющую основные статистические характеристики процесса (среднее арифметическое, дисперсию, коэффициент вариации, среднеквадратическое отклонение, нормированную корреляционную функцию).

3). Построить график нормированной корреляционной функции в MS Excel и по её виду выбрать аппроксимирующее выражение.

4). Аппроксимировать нормированную корреляционную зависимость в программе Statistica .

5) Проанализировать случайный стационарный процесс (распределение витаминов) с точки зрения эргодичности, однородности (стабильности) и сделать соответствующие выводы.

6) Повторить 1-4 для другой реализации процесса (в таблице исходных данных для каждого варианта предложено два интервала $[a;b]$, соответствующие двум случайным процессам). Реально это означает изменение состава смеси, т.е. исследуется распределение других компонентов смеси.

7) Сравнить два случайных стационарных процесса по количественным и качественным оценкам; определить, какой процесс является более однородным (стабильным); попытаться объяснить результаты анализа с физической точки зрения.

8) Охарактеризовать случайный стационарный процесс с точки зрения математического моделирования по различным признакам классификации математических моделей.

Таблица с исходными данными представлена на рис. 3.14.

№ вари- анта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
интервал [a; b], 1	1,2	3,4	5,6	2,3	4,5	6,7	8,9	12,13	2,4	4,6	10,11	12,13
интервал [a; b], 2	1,4	3,8	10,15	20,25	1,8	7,14	8,16	3,15	2,9	3,10	11,17	4,10
интервал времени t, с	2	1	2	3	1	5	4	2	3	4	2	4
кол-во значений X(t), N	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Рис.3.14. Исходные данные

Интервал корреляции $\tau = m \cdot t$, где $m = 0,9$.

3.6. Демонстрационный пример обработки стационарного случайного процесса на VBA

```

(General) | korr
Sub korr()
Dim x(21), x1(21), y(20), y1(20) As Single
n = InputBox("введите количество значений случайной функции n")
m = InputBox("ввод количества значений нормированной корр. функции m")
For i = 2 To n + 1 'ввод массива случайной функции из листа Excel:
x(i) = Cells(i, 1)
Next
s = 0
For i = 1 To n
s = s + x(i)
Next: xs = s / n: s = 0
For i = 1 To n 'центрирование случайной функции
x1(i) = x(i) - xs
Rem вывод массива центрированной случайной функции на лист Excel:
Cells(i + 1, 2) = x1(i)
s = s + x1(i) ^ 2
Next
d = s / n: d1 = d ^ (1 / 2): k = (d1 / xs) * 100
For i = 1 To m
L = i - 1: s = 0
For j = 1 To n - L
s = s + x1(j) * x1(L + j)
Next
y1(i) = s / (n - L): y(i) = y1(i) / d
Cells(i + 1, 3) = y1(i)
Cells(i + 1, 4) = y(i)
Next
End Sub

```

Рис. 3.15. Программа на VBA обработки стационарного случайного процесса

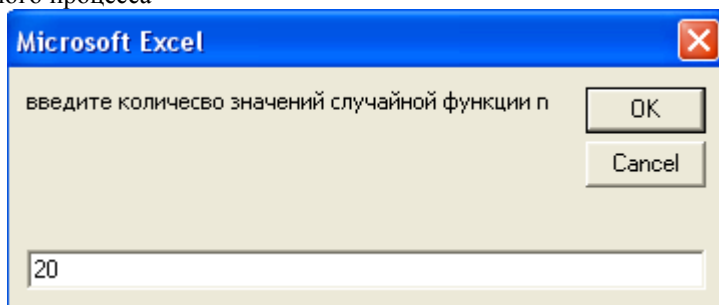


Рис.3.16. Окно ввода количества значений случайной функции

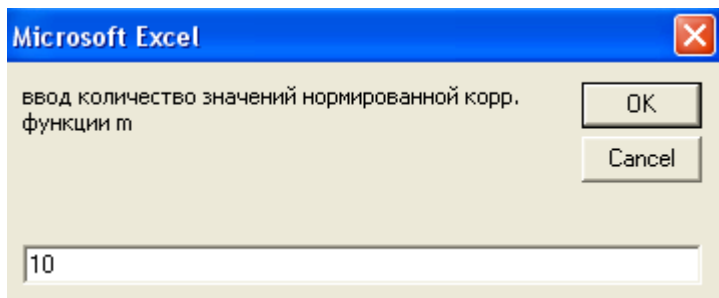


Рис.3.17. Окно ввода количества значений нормированной корреляционной функции

	A	B	C	D
1	Значения X(i)	Значения X1(i)	Значения Y1(i)	Значения Y(i)
2	2,41	-2,1965	0,257792741	0,999999965
3	2,42	0,2135	-0,00925275	-0,035892205
4	2,43	0,2235	-0,013144139	-0,050987234
5	2,41	0,2335	-0,017799515	-0,069045833
6	2,42	0,2135	-0,018430563	-0,07149372
7	2,27	0,2235	-0,023612084	-0,091593281
8	2,26	0,0735	-0,00190775	-0,007400325
9	2,27	0,0635	-0,000711212	-0,00275885
10	2,28	0,0735	-0,00289275	-0,011221224
11	2,27	0,0835	-0,006025932	-0,023375102
12	2,29	0,0735		
13	2,27	0,0935		
14	2,28	0,0735		
15	2,27	0,0835		
16	2,27	0,0735		
17	2,28	0,0735		
18	2,29	0,0835		
19	2,27	0,0935		
20	2,27	0,0735		
21	2,28	0,0735		

Рис.3.18. Результаты обработки стационарного случайного процесса

По результатам обработки стационарного случайного процесса построен график зависимости нормированной корреляционной функции от интервала корреляции (рис.3.19).



Рис.3.19. График зависимости нормированной корреляционной функции от интервала корреляции

Для аппроксимации зависимости нормированной корреляционной функции от интервала корреляции используем возможности программы Statistica. В таблицу программы вносим исходные данные (значения нормированной корреляционной функции) (рис 3.18).

Data: Spreadsheet2.sta* (10v by 10c)					
	1	2	3	4	5
	t	y	Var3	Var4	Var5
1	0	1			
2	2	-0,03589			
3	4	-0,05099			
4	6	-0,06905			
5	8	-0,07149			
6	10	-0,09159			
7	12	-0,0074			
8	14	-0,00276			
9	16	-0,01122			
10	18	-0,02338			

Рис.3.18. График зависимости нормированной корреляционной функции от интервала корреляции

Подключаем модуль Statistics, в котором выполняем команду Advanced Linear/Nonlinear Models/ Nonlinear Estimation. В открывшемся окне вводим функцию (рис. 3.19).

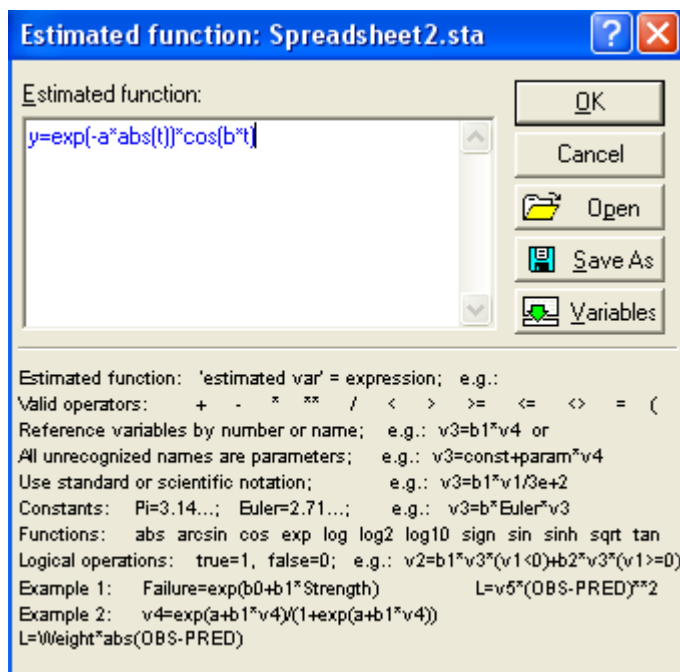


Рис.3.19. Окно для ввода функции

Полный анализ функции представлен на рис.3.20.

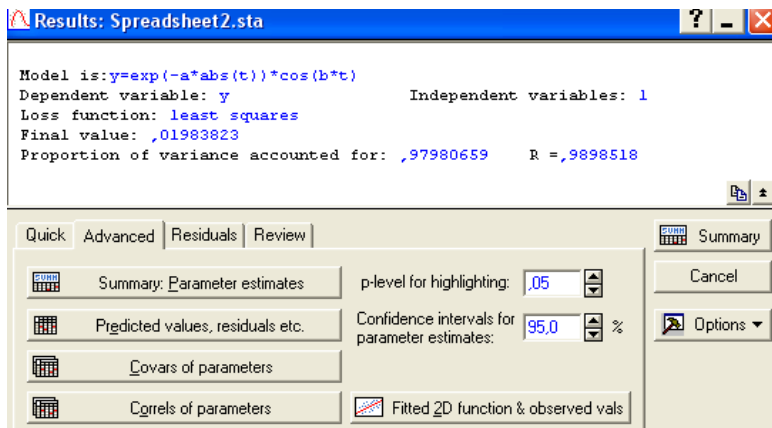


Рис.3.20. Окно с результатами обработки

Результаты аппроксимации (Summary) представлены на рис. 3.21.

Model is: $y = \exp(-a \cdot \text{abs}(t)) \cdot \cos(b \cdot t)$ (Spreadsheet2.sta)
 Dep. Var. : y
 Level of confidence: 95.0% ($\alpha = 0.050$)

	Estimate	Standard error	t-value df = 8	p-level	Lo. Conf Limit	Up. Conf Limit
a	$0,793299$	$0,297188$	$2,66935$	$0,028391$	$0,10798$	$1,478616$
b	$-0,854557$	$0,124697$	$-6,85305$	$0,000131$	$-1,14211$	$-0,567004$

Рис.3.21. Результаты аппроксимации функции.

Для изображения дискретной зависимости (значений нормированной корреляционной функции) используем кнопку Fitted 2d function & observed vals.

Для построения аппроксимирующей зависимости (рис.3.22) выполняем команду Graph Properties (All Options). При необходимости график можно редактировать, используя эту же команду.

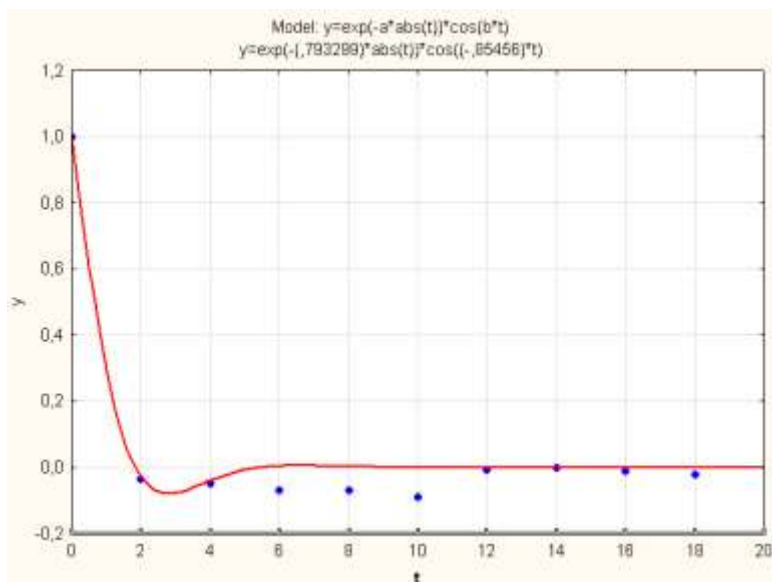


Рис.3.22. Графики нормированной корреляционной функции и аппроксимирующего ее выражения.

Контроль по теме

- 1) Определение случайного стационарного процесса.
- 2) Свойства случайного стационарного процесса.
- 3) Статистические характеристики.
- 4) Физический смысл корреляционной функции.
- 5) Характеристика случайного стационарного процесса по виду и параметрам корреляционной функции.
- 6) Информативность коэффициентов аппроксимирующего выражения корреляционной функции.
- 7) Характеристика корреляционной функции процесса как математической модели по различным признакам классификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильков Ю.В. Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. - М: Финансы и статистика, 2001. - 256с.
2. Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. Математическое моделирование. Часть 1: Осциллятор. – М.: РУДН, 2007. – 64с.
3. В.П. Боровиков В.П., Боровиков И.П. STATISTICA - Статистический анализ и обработка данных в среде Windows - М.: Фининь, 1998.- 608с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2002. – 543с.
5. Боровиков В. П. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов – Спб.: Питер, 2003. – 688с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. КноРус, 2010.- 480с.
7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа 2000. – 383с.
8. Грачев Ю.П., Плаксин Ю.М. Математические методы планирования эксперимента. - М.: ДеЛи принт, 2005.-296с.