3. ГИДРОДИНАМИКА

Основная задача гидродинамики – изучение законов движения капельных жидкостей. Исследования в области гидродинамики заключаются преимущественно в нахождении основных величин – скоростей течения и давлений, возникающих в движущейся жидкости. Кроме сил, действующих на покоящуюся жидкость, при движении возникают дополнительно еще силы инерции и трения. В отличие от гидростатического давления, не зависящего от пространственной ориентации площадки, на которую оно действует, гидродинамическое давление, благодаря касательным силам, различно в направлениях x, y, z. Вязкость жидкости является причиной неравенства скоростей в различных точках одного и того же поперечного сечения движущейся массы жидкости. Установление связи между давлением и скоростью в любой точке движущейся жидкости и в любой момент времени относится к числу основных задач гидродинамики.

3.1. ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Движение жидкости может быть ***установившееся*** (стационарное) и ***неустановившееся***. В первом случае давление **p** и скорость **u** в каждой точке пространства, занимаемого движущимся объемом жидкости, постоянны во времени и зависят только от положения рассматриваемой точки в потоке жидкости, т.е. составляющие скорости и давления являются функцией координат: $p=f(x,y,z)$, $u=\varphi(x,y,z)$. Во втором случае значения **p** и **u** в любой точке пространства могут изменяться во времени **t** как по величине, так и по направлению: $p=f(x,y,z,t)$, $u=\varphi(x,y,z,t)$.

Равномерное движение – такой вид движения, при котором размеры и форма сечений не меняются по длине потока, следовательно, если движение еще и установившееся, скорости во всех сечениях потока одинаковы. ***Неравномерное*** движение характеризуется изменением по длине потока формы и (или) площади сечения потока и скоростей в соответствующих точках. Равномерным, например, является движение жидкости в трубе постоянного диаметра, а неравномерным – движение жидкости в трубе переменного сечения.

Напорное движение – движение жидкости, когда поток не имеет свободной поверхности, т.е. он со всех сторон ограничен твердыми стенками трубопровода. При ***безнапорном*** движении поток не со всех сторон ограничен твердыми стенками, т.е. имеет свободную поверхность, например, реки, арыки, канализационные трубы и др. Напорное движение характеризуется тем, что гидродинамическое давление в любой точке потока отлично от атмосферного (точнее, внешнего) и может быть как больше, так и меньше последнего. Безнапорное же движение определяется постоянным давлением на свободную поверхность, обычно равным атмосферному.

3.2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрим поток жидкости в некоторый момент времени. Для наглядного представления общей картины течения жидкости в каждый данный момент мысленно проведем так называемую ***линию тока***, т.е. линию, в каждой точке которой в данное мгновение вектор скорости жидкости совпадает с направлением касательной к этой линии (рис. 3.1). При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями движущихся частиц. Построим замкнутый контур, образующий малую площадку dS, и через все точки данного контура проведем линии тока. Эти линии образуют поверхность, называемую ***трубкой тока***. Часть потока, заключённая внутри трубки тока, называется ***элементарной струйкой***. Совокупность элементарных струек образует ***поток*** (рис. 3.2).

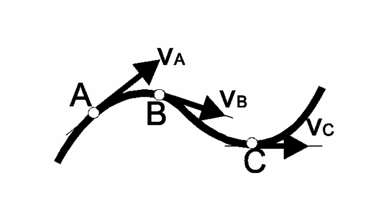


Рис. 3.1 Линия тока

При решении многих задач гидродинамики делаются предположения о том, что: **а)** поток жидкости состоит из отдельных элементарных струек, которые в случае установившегося движения не меняют во времени своей формы; **б)** поверхность элементарной струйки является как бы непроницаемой для частиц жидкости, движущихся в данной и соседней струйках; **в)** вследствие малости поперечного сечения элементарной струйки скорости во всех точках ее поперечного сечения можно считать одинаковыми. Такая модель жидкости называется ***струйной моделью*** движения жидкости. Данное представление о структуре потока упрощает его теоретическую интерпретацию.

Живое сечение элементарной струйки dS ($м^2$) – элементарно малая площадка, являющаяся площадью поперечного сечения струйки, нормального к линии тока.

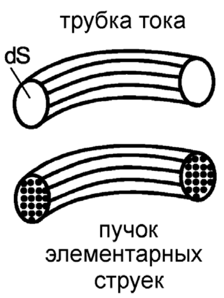


Рис. 3.2 Струйная модель

Живое сечение потока S (м^2) – площадь поперечного сечения, нормального к вектору средней скорости.

Средней скоростью движения жидкости v (м/с) в рассматриваемом живом сечении называется скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости через данное живое сечение, чтобы расход всего потока был равен расходу, соответствующему действительным скоростям частиц.

Расход элементарной струйки (***элементарный расход***) dQ (м^3/с) – это объем жидкости, проходящий в единицу времени через живое сечение элементарной струйки. Предположим, что в сечении 1–1 (рис. 3.3) скорость движения равна u. Данная скорость одинакова для всех частиц жидкости, движущихся через сечение 1–1 элементарной струйки (свойство **в**). За время dt частицы жидкости, находящиеся в сечении 1–1, двигаясь со скоростью u переместятся в сечение 2–2, совершив путь dL (м). За время dt (с) через живое сечение элементарной струйки dS (м^2) пройдет количество жидкости, равное объему цилиндра dLdS. Отнеся расчеты к единице времени, получим dQ=dLdS= =udS, т.к. скорость u=dL/dt, то при dt=1 величина u=dL (скорость – путь, совершенный в единицу времени).

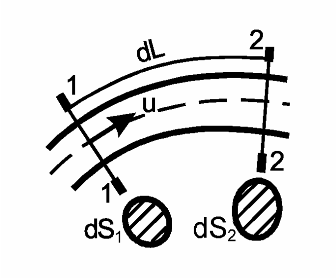


Рис. 3.3 Элементарная струйка

Расходом жидкости **Q** (м^3/с) в рассматриваемом сечении называется объем жидкости W (м^3), проходящий в единицу времени t (с) через живое сечение потока.

Расход равен сумме расходов элементарных струек:

$$Q = \int_S dQ = \int_S udS. \qquad (3.1)$$

Таким образом,

$$Q = \frac{W}{t}. \qquad (3.2)$$

В ряде случаев следует различать объемный расход Q (м^3/с) и массовый расход M (кг/с), который представляет собой массу жидкости m (кг), проходящей в единицу времени: M = m/t. Между объемным Q и массовым M расходом существует следующая зависимость – M=ρQ. В гидравлике приходиться иметь дело главным образом с объемным расходом. В дальнейшем будем называть его просто расходом.

В соответствии с понятием средней скорости примем, что все частицы движутся с одинаковой средней скоростью v (м/с). Тогда в уравнении (3.1) заменим переменную скорость u постоянной средней v.

$$Q = \int_S udS = \int_S vdS = v\int_S dS = v\,S \qquad (3.3)$$

Т.е. расход потока жидкости равен площади живого сечения потока, умноженной на среднюю скорость.

3.3. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПОТОКА

Основные гидравлические элементы потока – живое сечение S (м^2), смоченный (мокрый) периметр П (м), гидравлический радиус $R_Г$ (м) и эквивалентный диаметр $d_Э$ (м).

Смоченным периметром П называется длина контура живого сечения, по которому жидкость соприкасается со стенкой.

Гидравлический радиус $R_Г$ равен отношению площади живого сечения потока к смоченному периметру:

$$R_Г = \frac{S}{П}. \qquad (3.4)$$

Эквивалентный диаметр $d_Э$ – это учетверенный гидравлический радиус.

$$d_Э = 4R_Г = 4\frac{S}{П}. \qquad (3.5)$$

Иначе говоря, эквивалентный диаметр равен диаметру гипотетического трубопровода круглого сечения, для которого отношение S к П имеет то же значение, что и для данного трубопровода некруглого сечения.

3.4. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Чтобы правильно решить одну из основных задач практики гидравлики, т.е. определить величину гидравлических сопротивлений, необходимо составить ясное представление о механизме самого движения жидкости. При исследовании вопроса пришли к заключению о существовании двух различных режимов движения. Впервые предположение о существовании двух режимов движения жидкости было высказано Д.И. Менделеевым в 1880 г., но со всей очевидностью наличие режимов было подтверждено в 1883 г. английским физиком О. Рейнольдсом на основе простых и наглядных опытов.

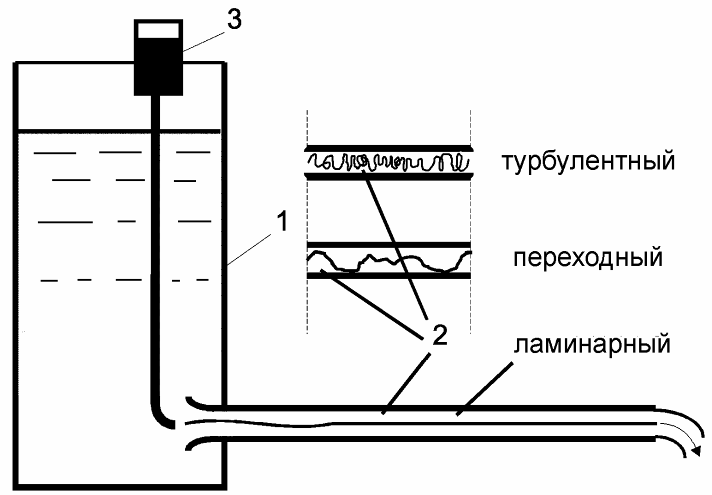


Рис. 3.4 Экспериментальная установка

К напорному баку 1 присоединена прозрачная (стеклянная) труба 2, по которой движется исследуемая жидкость (рис. 3.4). Над баком 1 расположен небольшой бачок 3 с подкрашенной (контрастной) жидкостью, свойства которой близки к свойствам исследуемой жидкости. Т.е. эту подкрашенную жидкость можно назвать индикатором или трассером. Подкрашенная жидкость при помощи тонкой трубки вводится в поток исследуемой жидкости.

В своих опытах Рейнольдс исследовал жидкости с различными физическими свойствами (вязкостью μ и плотностью ρ) в трубах разного диаметра **d**. Во время опытов также в широком диапазоне изменялась средняя скорость **v** движения жидкости.

При некоторых определенных условиях подкрашенная жидкость образует прямолинейную, резко выделяющуюся и не смешивающуюся с окружающей жидкостью струйку. Иначе говоря, жидкость движется отдельными не перемешивающимися слоями. Такой режим движения жидкости называется ***ламинарным***.

С увеличением скорости струйка подкрашенной жидкости начинает двигаться волнообразно, затем разрывается и перемешивается с потоком жидкости. Становится заметными вихреобразование и вращательное движение жидкости. Отдельные частицы перемешиваются между собой и движутся по самым причудливым, все время изменяющимся траекториям. Такой режим движения жидкости называется ***турбулентным***. Такое движение называется еще беспорядочным. Однако и при турбулентном режиме имеют место определенные закономерности.

Обобщив результаты своих многолетних (в течение более 10 лет) опытов, проведенных на круглых трубах, Рейнольдс нашел общие условия, при которых возможно существование того или иного режима и переход от одного режима к другому. Он установил основные факторы, определяющие характер режима: среднюю скорость движения жидкости v (м/с), диаметр трубопровода d (м), плотность жидкости ρ (кг/м^3), ее вязкость μ (Па·с). Для характеристики режима движения жидкости Рейнольдс ввел безразмерный параметр, учитывающий влияние перечисленных факторов, называемый числом или критерием Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd\rho}{\mu} \tag{3.6}$$

или, с учетом того, что $\mu=\nu\rho$,

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}. \tag{3.7}$$

Границы существования того или иного режима движения жидкости определяются двумя критическими значениями критерия Рейнольдса: нижним $Re_н$ и верхним $Re_в$. Значения скорости, соответствующие этим значениям также называют критическими. При $Re < Re_н$ возможен только ламинарный режим, а при $Re > Re_в$ – только турбулентный режим, в интервале от $Re_н$ до $Re_в$ – неустойчивое состояние потока (переходный режим). В опытах самого Рейнольдса $Re_н$=2000, $Re_в$=12000. Многочисленные эксперименты, проведенные в более позднее время, показали, что критические числа не являются устойчивыми и при известных условиях неустойчивая зона может оказаться шире. В настоящее время при расчетах принято считать, что **при Re < 2320 – всегда ламинарный режим, а при Re > 10000 – турбулентный**. Это справедливо **для труб и каналов круглого сечения**, а в других случаях могут быть другие значения.

Отметим, что при определении режима движения в каналах некруглого сечения, критерий Рейнольдса рассчитывается:

$$Re = \frac{vd_Э}{\nu} \text{ или } Re = \frac{vL}{\nu} \tag{3.8}$$

где $d_Э$ – эквивалентный диаметр, м; L – характерный линейный размер.

Критерий Рейнольдса Re является одним из основных критериев гидродинамического подобия напорных потоков. Он является мерой отношения кинетической энергии (сил инерции) жидкости к работе сил вязкого трения и от него в общем случае зависят все безразмерные коэффициента, входящие в расчетные зависимости, которые применяют в практике гидравлических расчетов.

3.5. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ПОТОКА

Вначале выведем уравнение неразрывности для струйки. Рассмотрим отсек жидкости между сечениями 1–1 и 2–2 элементарной струйки (рис. 3.5). За время dt в отсек 1–2 через площадь живого сечения dS_1 втечет жидкость в количестве dS_1u_1dt (т.е. объем бесконечного малого цилиндра, имеющего основание dS_1 и длину u_1dt). За это же время через живое сечение dS_2 из отсека 1–2 вытечет объем жидкости dS_2u_2dt. При этом форма отсека элементарной струйки не меняется **(свойство а)**, боковая поверхность непроницаема **(свойство б)** и жидкость несжимаема. Следовательно, объем жидкости, поступающий за время dt в отсек через сечение 1–1, должен быть равен объему жидкости, вытекающей за то же время из него через сечение 2–2.

$$dS_1u_1dt = dS_2u_2dt \text{ или } dS_1u_1 = dS_2u_2 \qquad (3.9)$$

Аналогично и для других сечений, следовательно,

$$dS\,u = \text{const}. \qquad (3.10)$$

Это и есть уравнение неразрывности для элементарной струйки. Таким образом, расход жидкости во всех сечениях элементарной струйки одинаков (в данный момент времени). На основании уравнения (3.9) можно заключить, что скорости движения жидкости обратно пропорциональны площадям соответствующих живых сечений.

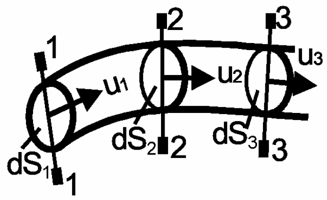


Рис. 3.5 Элементарная струйка

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{dS_2}{dS_1} \qquad (3.11)$$

Рассмотрим участок потока (рис. 3.5). Возьмем несколько сечений: 1–1, 2–2, 3–3. Обозначим dS_1, dS_2, dS_3 площади живых сечений элементарной струйки в указанных сечениях. Проинтегрируем выражение (3.9) в пределах соответствующих сечений.

$$\int_{S_1} u_1dS_1 = \int_{S_2} u_2dS_2 = \int_{S_3} u_3dS_3$$

На основании зависимости (3.3) (см. стр.31) получим

$$Q = \int_{S_1} v_1dS_1 = \ldots = \int_{S_3} v_3dS_3 = v_1S_1 = \ldots = v_3S_3 = \text{const}, \qquad (3.12)$$

где Q – расход жидкости, м^3; v_1, v_2, v_3 – значения средних скоростей в сечениях 1–1, 2–2, 3–3, м/с; S_1, S_2, S_3 – площади живых сечений потока, м^2.

Уравнение (3.12) является уравнением неразрывности (сплошности) для целого потока жидкости при установившемся движении. Аналогично выражению (3.11) для целого потока

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \qquad (3.13)$$

При установившемся движении произведение площади живого сечения потока S_i на среднюю скорость v_i есть величина постоянная, причем средние скорости потока обратно пропорциональны площадям соответствующих живых сечений.

3.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА)

В различных точках движущейся жидкости в результате действия внешних сил возникает давление, называемое гидродинамическим (в отличие от гидростатического, свойственного жидкости, находящейся в равновесии). Поэтому, как уже говорилось ранее, одной из задач гидродинамики является определение величин гидродинамического давления, возникающего внутри жидкости, а также скоростей движения жидкости в различных точках пространства, занятого жидкостью. Для решения этих задач необходимо составить уравнения движения жидкости, связывающие между собой скорости и ускорения с силами, действующими на жидкость.

Рассмотрим движение элементарного жидкого тела. Введем обозначения: p – гидродинамическое давление, u – скорость движения жидкости в точке с координатами x, y, z; u_x, u_y, u_z – составляющие скорости по осям координат. Предположим, что на движущуюся жидкость действуют объемные силы, проекции которых на оси координат, отнесенные к единице массы (иначе, проекции ускорений), равны X, Y, Z.

Общие уравнения движения идеальной жидкости могут быть получены из дифференциальных уравнений равновесия той же жидкости, если согласно принципу д’Аламбера, к действующим силам присоединить силы инерции. Проекции сил инерции, которые должны быть присоединены к уравнениям равновесия, также отнесем к единице массы и представим в следующем виде:

$$j_x = -\frac{du_x}{dt};\ j_y = -\frac{du_y}{dt};\ j_z = -\frac{du_z}{dt}.$$

Знак (–) показывает, что силы инерции направлены в сторону, противоположную ускорению.

Присоединив к дифференциальным уравнениям Эйлера (2.2) (см. стр.13) проекции сил инерции, получим выражение 3.14.

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

Эта система уравнений (3.14) устанавливает связь между объемными силами и скоростями, давлением и плотностью жидкости и **называется уравнениями Эйлера**. Смысл каждого из уравнений заключается в следующем: полное ускорение частиц вдоль координатной оси складывается из ускорений от действий массовых сил и сил давления.

3.7. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Воспользуемся дифференциальными уравнениями движения (3.14). Умножим первое уравнение на dx, второе – на dy, третье – на dz.

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_x}{dt}dx &= Xdx - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx\\ \frac{du_y}{dt}dy &= Ydy - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy\\ \frac{du_z}{dt}dz &= Zdz - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz\end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

В результате сложения уравнений (3.15), получим

$$\frac{du_x}{dt}dx + \frac{du_y}{dt}dy + \frac{du_z}{dt}dz = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right). \qquad (3.16)$$

Будем рассматривать струйку, которая при установившемся движении является траекторией движения частиц. В этом случае dx, dy, dz будут проекциями элементарного пути dL, проходимого частицами за время dt, т.е. $dx=u_x dt$, $dy=u_y dt$, $dz=u_z dt$. Подставим эти значения в левую часть уравнения (3.16). читывая, что полная скорость u^2 выражается через составляющие по осям координат $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, запишем

$$\frac{du_x}{dt}u_x dt + \frac{du_y}{dt}u_y dt + \frac{du_z}{dt}u_z dt = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z =$$
$$= \frac{1}{2}d\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = \frac{1}{2}d\left(u^2\right)$$

В правой части уравнения (3.16) выражение Xdx+Ydy+Zdz=dU – является полным дифференциалом силовой функции U (см. уравн. 2.2, стр.13).

Т.к. рассматривается установившееся движение, при котором гидродинамическое давление не зависит от времени, то трехчлен в скобках уравнения (3.16) представляет собой полный дифференциал давления:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp\,.$$

Итак, уравнение (3.16) можно привести к виду:

$$\frac{1}{2}d\left(u^2\right) = dU - \frac{1}{\rho}dp\ ,$$

или

$$\frac{1}{2}d\left(u^2\right) + \frac{1}{\rho}dp - dU\,. \qquad (3.17)$$

Уравнение (3.17) устанавливает связь между скоростью u, давлением p и силовой функцией U для любого сечения струйки движущейся жидкости (см. рис. 3.6, стр. 40).

Проинтегрировав уравнение (3.17), получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = const\,. \qquad (3.18)$$

Т.е. для двух любых сечений элементарной струйки

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - U_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - U_2\,. \qquad (3.19)$$

Рассмотрим *частный* случай, когда из внешних объемных (массовых) сил на жидкость действует *только сила тяжести*. Тогда, силовая функция, соответствующая силе тяжести, может быть представлена, следующим образом:

$$U = -gz .$$

Подставляя значение U в уравнение (3.19), получим

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 . \qquad (3.20)$$

Ранее отмечалось, что все слагаемые отнесены к единице массы. Отнесем слагаемые уравнения (3.20) к единице веса жидкости, помня, что вес единицы массы равен g. Разделив левую и правую части уравнения на g, получим

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 . \qquad (3.21)$$

Зависимость (3.21) является уравнением Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости, которое устанавливает связь между скоростью движения u, давлением p и геометрическим положением сечений струйки z. Впервые это уравнение получено Даниилом Бернулли в 1738 г. в результате применения к движущейся жидкости закона сохранения энергии. Оно позволяет решать многие практические задачи гидравлики.

3.8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Предположим, что центры тяжести живых сечений струйки 1–1 и 2–2 (рис. 3.6) расположены на высотах z_1 и z_2 от плоскости сравнения 0–0 и что в этих центрах тяжести расположены пьезометрические трубки. Жидкость в каждой трубке поднимется на высоту $h_i = \frac{p_i}{\rho g}$, т.е. на пьезометрическую высоту. В уравнении (3.21) z_1 и z_2 (м) представляют собой геометрические высоты центров тяжести соответствующих живых сечений струйки над плоскостью сравнения, члены $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$ (м) – пьезометрические высоты, отвечающие давлениям в указанных центрах тяжести. Третий член уравнения $\frac{u_i^2}{2g}$ (м) является скоростным или динамическим напором, соответствующий скорости u_i.

Отложим от точки А отрезок Аа, равный пьезометрической высоте $\frac{p_1}{\rho g}$, а от точки В – отрезок Вb, равный $\frac{p_2}{\rho g}$. Затем от точек а и b отложим отрезки аа/ и bb/, соответствующие скоростным напорам $\frac{u_1^2}{2g}$ и $\frac{u_2^2}{2g}$.

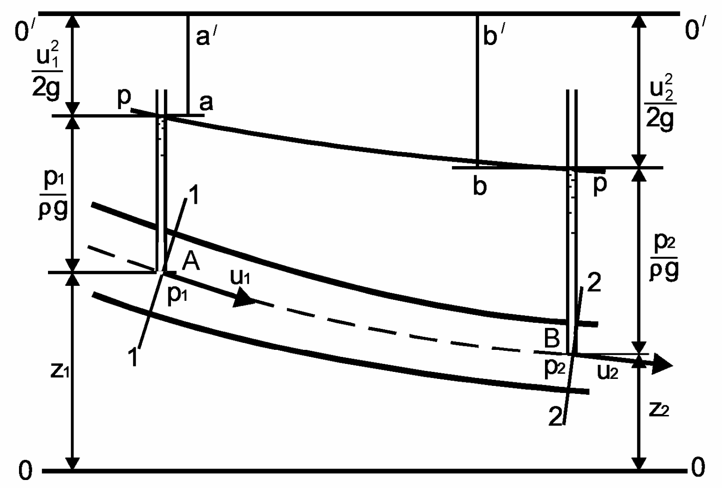


Рис. 3.6 Идеальная струйка

Аналогичные построения можно сделать для ряда живых сечений, взятых вдоль элементарной струйки. Т.к. сумма трех членов $\frac{u_i^2}{2g}$, $\frac{p_i}{\rho g}$ и z_i для идеальной жидкости постоянна вдоль оси струйки, то вершины вертикальных отрезков аа/ и bb/ располагаются на одинаковых вертикальных расстояниях от плоскости сравнения 0–0, и вершины этих отрезков должны лежать в одной горизонтальной плоскости, называемой *напорной плоскостью* $0'–0'$. В случае идеальной жидкости напорная плоскость является горизонтальной. Если плавно соединить уровни жидкости в пьезометрических трубках, то получим *пьезометрическую линию р–р*.

Сумма трех высот называется полным гидродинамическим напором и обозначается $H_Д$. Следовательно, полный напор представляет собой сумму потенциального $H = z + \dfrac{p}{\rho g}$ и скоростного $h_{ск} = \dfrac{u^2}{2g}$ напоров, т.е. $H_Д=H+h_{ск}$. Все изложенное отражает **геометрический смысл уравнения Бернулли**.

Выясним **физический смысл уравнения Бернулли**. Рассмотрим частицу жидкости массой dm, которая движется по линии тока. Определим величину полной энергии, которой обладает частица в сечениях 1–1 и 2–2. Полная энергия представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия в сечении 1–1 равна $\dfrac{u_1^2 dm}{2}$. Потенциальная энергия относительно плоскости сравнения 0–0 равна произведению веса частицы на высоту ее подъема над этой плоскостью $z_1 g dm$. В сечении 1–1 частица будет поднята на высоту $z_1 + \dfrac{p_1}{\rho g}$, где $\dfrac{p_1}{\rho g}$ – высота, соответствующая давлению, которое поднимет эту частицу, например, в пьезометрической трубке. В сечении 2–2 частица будет поднята на высоту $z_2 + \dfrac{p_2}{\rho g}$. Таким образом, в сечении 1–1 частица обладает потенциальной энергией $gdm\left(z_1 + \dfrac{p_1}{\rho g}\right)$. Аналогично в сечении 2–2 – $gdm\left(z_2 + \dfrac{p_2}{\rho g}\right)$.

Тогда полная энергия dE в сечениях будет равна:

$$\left.\begin{aligned} dE_1 &= \frac{dm\,u_1^2}{2} + dm\,g\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) \\ dE_2 &= \frac{dm\,u_2^2}{2} + dm\,g\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (3.22)$$

Разделив почленно уравнения (3.22) на вес gdm, определим полную энергию жидкости, отнесенную к единице ее веса, т.е. удельную энергию de.

$$\left.\begin{aligned} de_1 &= \frac{dE_1}{dm\,g} = \frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \\ de_2 &= \frac{dE_2}{dm\,g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

В (3.23) $\frac{u_1^2}{2g}$ и $\frac{u_2^2}{2g}$ – удельная кинетическая энергия; $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$ – удельная потенциальная энергия давления; z_1 и z_2 – удельная потенциальная энергия положения частицы в сечениях 1–1 и 2–2 соответственно.

Согласно уравнению Бернулли сумма трех указанных величин является постоянной, что приводит к равенству: $de_1 = de_2$.

Сечения 1–1 и 2–2 взяты произвольно, поэтому

$$de = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = const \tag{3.24}$$

Итак, сумма трех членов уравнения Бернулли есть сумма трех удельных энергий: удельной кинетической энергии, удельной потенциальной энергии давления и удельной потенциальной энергии положения. Для идеальной жидкости сумма трех удельных энергий по длине элементарной струйки – постоянна.

В общем, уравнение Бернулли является специальным выражением основного физического закона сохранения энергии.

3.9. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ СТРУЙКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Если вместо идеальной жидкости рассматривать реальную, то уравнение Бернулли должно будет существенным образом измениться. При движении реальной жидкости ее полная удельная энергия или напор будет убывать по направлению движения. Причина этому – неизбежные затраты энергии на преодоление сопротивлений движению, обусловленные внутренним трением в вязкой (т.е. реальной) жидкости. Значит, для струйки реальной жидкости полная удельная энергия в сечении 1–1 будет всегда больше, чем полная удельная энергия в следующем за ним сечении 2–

2 на величину указанных потерь энергии, и уравнение Бернулли вследствие этого принимает вид:

$$\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2+h^{/}. \qquad (3.25)$$

Подобно тому, как три члена левой части этого уравнения и три первых члена правой его части представляют собой полную энергию жидкости соответственно в сечениях 1–1 и 2–2, так и величина $h^{/}$ является мерой энергии, потерянной на преодоление сопротивлений при ее движении между указанными сечениями. Соответствующий этой потере удельной энергии напор называют потерей напора между сечениями 1–1 и 2–2. В соответствии с этим график уравнения Бернулли для струйки реальной жидкости (рис. 3.7) будет отличаться от аналогичного графика для идеальной жидкости. Поскольку в случае реальной жидкости полный напор вдоль струйки убывает по направлению движения, напорную линию изображают не горизонтальной прямой (как в случае идеальной жидкости), а

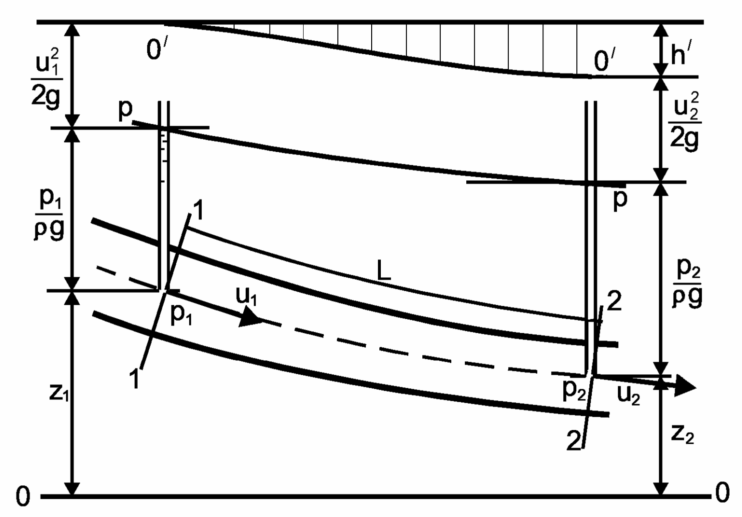


Рис. 3.7 Реальная струйка

некоторой кривой $0^{/}–0^{/}$. Для характеристики движения вязкой реальной жидкости пользуются понятиями: гидравлический и пьезометрический уклоны потока. Гидравлическим уклоном i называется падение полного напора, отнесенное к единице длины, измеряемой вдоль струйки. Средний гидравлический уклон на участке между двумя сечениями 1–1 и 2–2 определяется следующим образом:

$$i = \frac{h'}{L}. \tag{3.26}$$

Пьезометрическим уклоном i_p называется изменение потенциального напора, отнесенное к единице длины.

$$i_p = \frac{\left(z_1 + {}^{p_1}\!/_{\rho g}\right) - \left(z_2 + {}^{p_2}\!/_{\rho g}\right)}{L} \tag{3.27}$$

Уклоны i и i_p – отвлеченные, безразмерные величины.

3.10. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Выведем уравнение Бернулли для установившегося потока вязкой (реальной) жидкости, состоящего из совокупности элементарных струек. Воспользуемся уравнением (3.20) для элементарной струйки (см. стр. 39). Т.к. предполагается, что поток состоит из совокупности элементарных струек, то уравнение Бернулли для целого потока может быть получено путем суммирования (интегрирования) полных энергий всех элементарных струек, составляющих поток, и потерь энергии, произошедших в них.

Проинтегрировав уравнение (3.26) по живому сечению потока, получим уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h \tag{3.28}$$

Как бы увеличив элементарную струйку до размеров целого потока, мы установили, что уравнение Бернулли для целого потока вязкой жидкости по своему построению аналогично уравнению Бернулли для элементарной струйки.

Отметим важное отличие. Удельная кинетическая энергия или скоростной напор в уравнении Бернулли для потока реальной жидкости рассчитывается по **средней скорости v** движения жидкости. Новым элементом в этом случае являются коэффициенты кинетической энергии α (коэффициент Кориолиса), величина которых зависит от степени неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока. Они корректируют величину кинетической энергии при определении ее по **средним скоростям v** в соответствующих живых сечениях 1–1 и 2–2. Коэффициент α определяется опытным путем на основании специальных измерений скоростей в различных точках потока жидкости. Для ламинарного режима в круглых трубах α=2,0, а для турбулентного (развитого) α=1,05…1,1.

Уравнение (3.28) является уравнением Бернулли для целого потока реальной жидкости. При этом сумма трех его членов есть сумма трех удельных энергий (м) целого потока вязкой жидкости в сечениях 1–1 и 2–2, где $\dfrac{\alpha v^2}{2g}$ – удельная кинетическая энергия потока; $\dfrac{p}{\rho g}$ – удельная потенциальная энергия давления; z – удельная энергия положения; h – потери энергии, происшедшие при движении реальной (вязкой) жидкости от первого сечения ко второму.

Как уже указывалось, удельная энергия в гидравлике называется напором (м), поэтому уравнения Бернулли в геометрической интерпретации может быть представлено следующим образом: $H_{Д1}=H_{Д2}+h$, где $H_{Д1}$ – полный напор потока в сечении 1–1; $H_{Д2}$ – полный напор потока в сечении 2–2; h – потери напора между сечениями 1–1 и 2–2.

3.11. ВИДЫ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

При движении жидкости различают два вида сопротивлений и, соответственно, два вида потерь напора:

1) потери напора по длине (сопротивления по длине);
2) местные потери напора (местные сопротивления).

Потери напора обусловливаются наличием трения жидкости о стенки, ограничивающие поток, а также действием сил внутреннего трения. Потери напора по длине распределяются равномерно по длине потока. Местные потери – это потери напора, возникающие в местах изменения живого сечения или конфигурации потока, т.е. происходит резкое местное изменение величины и (или) направлений его скоростей.

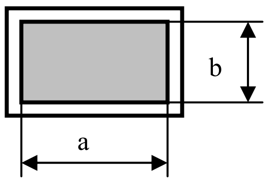
Пример 3.1. Определить эквивалентные диаметры прямоугольной трубы, круглой и кольцевого сечения

Условное обозначение круглых труб следующее $d_н \times \delta$ мм, где $d_н$ – наружный диаметр трубы, δ – её толщина стенки.

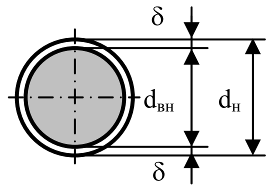
Размеры некоторых стандартных круглых труб

25x3	38x3,5	57x4	89x5	133x4	219x6
32x3,5	48x4	76x4	108x4	159x4,5	

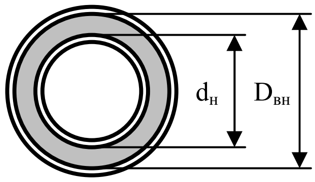
Внутренний диаметр трубы $d_{вн} = d_н - 2\delta$.



$$d_э = 4\frac{ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$



$$d_э = 4\frac{\pi d_{вн}^2}{4} \Big/ \pi d = d_{вн}$$



$$d_э = 4\frac{\frac{\pi}{4}(D_{вн}^2 - d_н^2)}{\pi(D_{вн} + d_н)} = D_{вн} - d_н$$

Для круглых труб эквивалентный диаметр равен внутреннему диаметру трубы ($d_э = d_{вн}$), *для кольцевых сечений* эквивалентный диаметр равен разности внутреннего диаметра кожуховой трубы и наружного диаметра малой трубы ($d_э = D_{вн} - d_н$).

Пример 3.2. Во сколько раз уменьшится скорость потока при неизменном расходе, если диаметр трубопровода увеличится вдвое (d_2=$2d_1$)?

$$w_2 = w_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \Bigg/ \left(\frac{\pi d_2^2}{4} \right) = w_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = w_1 \frac{d_1^2}{4d_1^2} = \frac{w_1}{4}$$

Скорость потока уменьшится в 4 раза.

Пример 3.3. Определить внутренний диаметр трубы $d_в$ (мм) и подобрать трубу из стандартного ряда $d_н x\delta$ (мм), обеспечивающую скорость движения воды в ней равной 0,5÷2,5 м/с. Расход воды G=500÷5000 кг/ч. Температура воды t=0÷100 ^oC.

Алгоритм решения: t (^oC) $\to$ ρ (кг/м^3);

G (кг/ч) $\to$ V (м^3/с) $\to$ S (м^2) $\to$ $d_в$ (мм) $\to$ $d_н x\delta$ (мм).

Пример 3.4. Определить число труб n размером $d_н x\delta$ (мм), обеспечивающих расход G=5000÷20000 кг/ч жидкости с температурой t ^oC из условия соблюдения режима её течения Re.

Сделать вывод: требуется более (менее) n труб.

Алгоритм решения: t (^oC) $\to$ ρ (кг/м^3) $\to$ μ (Па·с);

$d_н x\delta$ (мм) $\to$ $d_в$ (мм)] $\to$ S (м^2);

Re $\to$ w (м/с);

G (кг/ч) $\to$ V (м^3/с) $\to$ w_1 (м/с) в одной трубе $\to$ w_1/w $\to$ n.

Контрольные вопросы: 1. По каким признакам установившееся движение жидкости отличается от неустановившегося, равномерное от неравномерного, напорное от безнапорного? 2. Какое значение имеет эквивалентный диаметр? 3. Чем отличается структура потока при ламинарном и турбулентном режимах движения жидкости в трубах? 4. Как определить число Рейнольдса для круглого трубопровода? 5. Каков геометрический смысл различных членов уравнения Бернулли? Каков их энергетический смысл?